Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakülteleri Dergisi
Cilt: IV, Sayı: 2, 1989

POZİTİF KATSAYILI FARK DENKLEMLERİ YOLUYLA LİNEER ELİPTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAHMİNİ

Aydın OKÇU*

ÖZET

x gerçel n-boyutlu uzayda $x_1, x_2, ..., x_u$ koordinatlı bir nokta olmak üzere;

$$L((u)) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u \qquad (1)$$

diferansiyel ifadesi ve m_s de m_{sj} $(j = 1,2,..n)$ intepral bileşenli n-boyutlu bir vektör uzayı, h ağ uzunluğu olmak üzere;

$$Lh((u)) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(x, h)\, u(x + m_s h) \qquad (2)$$

sonlu fark ifadeleri tanımlanarak teorem ve tanımlar bu ifadelere dayalı olarak yapıldı. Bazı sınırlamalar yapılarak bu ifadelerin benzerliği üzerinde duruldu. Bazı şartlar sağlanmak üzere, bir sonlu fark ifadesinin bir diferansiyel denkleme dönüştürülmesinin mümkün olabileceği üzerinde duruldu.

Eğer sınırlı bir bölgede;

$$c_s(x, h) > 0, \quad (s \neq 0), \quad c_0(x, h) < 0 \qquad (3)$$

veya en azından

$$c_s(x, h) \geqslant 0, \quad (s \neq 0), \quad c_0(x, h) \leqslant 0 \qquad (3a)$$

koşulu gerçekle gerçekleniyorsa ve

$$\sum_{s=0}^{N} c_s(x, h) \leqslant 0 \qquad (4)$$

ise bu durumda $L_h((u)) = 0$ fark denkleminin çözümleri eliptik diferansiyel denklemler gibi maksimum prensibini gerçekler. Matematiğin temel prensipleri olan varlık, teklik ve yakınsaklık bu teoremlerde de geçerlidir.

Eğer (3) veya (3a) koşulu gerçekleniyorsa (2) fark denklemine pozitiftir veya negatif değildir diyeceğiz.

---

* *Doç. Dr.; U.Ü. Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir.*

n birden büyük olmak üzere x'in herhangi bir komşuluk sistemi verilsin. Bu komşulukta pozitif fark denklemine benzer olmayan L(u) diferansiyel ifadesinin x'-de eliptik olduğu gösterildi.

L(u) nın x'in sınırlı bir B bölgesinde, düzgün sınırlı ve yakınsak kat sayılara sahip olması halinde yeterince küçük bir h için L(u) ya benzer pozitif tipte bir $L_h(u)$ fark denkleminin varlığı gösterildi.

x ler n-boyutlu Euclidean uzayında ağ uzunluğu h olan bir ortagonal kafes olsun. V(x) sınırlı alanın dışında sıfır, E-B de sınırlı bir fonksiyon olmak üzere;

$$C_s(x, h) \geqslant 0, \quad (s = 1, \dots N), \qquad \sum_{s=1}^{N} C_s(x, h) \leqslant 1 \qquad x \in B$$

için

$$u(x) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{N} C_s(x, h)\; u(x + m_s h) & x \in B \\ v(x) & x \in E - B \end{cases}$$

şeklindeki fark denkleminin çözümünü düşünelim. Eğer u(x)'in B deki maksimum ve minimumu E-B deki bir noktaya bağlı kalıyorsa

$$\min v(x) \leqslant u(x) \leqslant \max v(x)$$

olduğu ispatlandı.

SUMMARY

The Approximation of Linear Elliptic Differential Equations By Difference Equations with Positive Coefficients

Considering a differential expression of the form

$$L((u)) = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u \qquad (1)$$

where x is the point with coordinates $x_1, x_2, \dots, x_u$ in real n-dimensional space and besides that a finite difference expression of the form

$$L_h((u)) = \sum_{s=0}^{N} c_s(x, h)\, u\,(x + m_s h) \qquad (2)$$

where m_s is an n-dimensional vector with integral components m_{sj} $(j = 1, \dots n)$ and h is the mesh length.

We can prove the subject matter theorem by expressions (1) and (2). By putting some limitations, we can explain the similarity between these two expressions. It can be seen that a finite difference expression can be transformed in to differential equation by providing certain rules.

if

$$c_s(x, h) > 0, \quad (s \neq 0), \quad c_0(x, h) < 0 \qquad (3)$$

or at least

$$c_s(x, h) \geqslant 0, \quad (s \neq 0), \quad c_0(x, h) \leqslant 0 \qquad (3a)$$

is satisfied in some bounded region and if the condition is present

$$\sum_{s=0}^{N} c_s(x, h) \leqslant 0$$

then it is easy to prove that, the solutions of the difference equation $L_h((u)) = 0$ satisfy a maximum principle analogous to elliptic differential equations.

The main mathematical principles of existence, uniqueness and convergence are also applicable to these theorems.

A difference expression (2) will be said to be of positive or of non-negative type if conditions (3) or (3a) are satisfied.

Let $n > 1$ and any neighborhood system of x is given then L((u)) differential expression, which is not positive difference equation in the neighborhood system, is shown that it is elliptic at x.

If L((u)) has uniformlly bounded coefficients at the bounded region B of x. For a sufficiently small h, the existence of a difference equation $L_h((u))$ of positive type analogous to L((u)) is shown.

Let x be a point which depends on a orthogonal lattice having h mesh length in the n-dimentional euclidiean space.

Let v(x) is zero outside the bounded region and a bounded function in E-B as well under conditions.

$$c_s(x, h) > 0, \quad (s = 1, \dots N), \quad \sum_{s=1}^{N} c_s(x, h) < 1, \qquad x \in B$$

Lets think about the solution of the difference equations in the form of

$$u \begin{cases} \sum_{s=1}^{N} c_s(x, h)\, u(x + m_s h) & x \in B \\ v(x) & x \in (E - B) \end{cases}$$

If the maximum and the minimum of u(x) in B depend on o point in (E-D).

$$\min v(x) \leqslant u(x) \leqslant \max v(x)$$

is proved.

GİRİŞ

x, gerçel n-boyutlu uzayda $x_1, x_2, \dots x_u$ koordinatlı bir nokta olmak üzere;

$$L((u)) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u \tag{1}$$

şeklindeki bir diferansiyel ifadeyi ele alalım. m_s; m_{sj} (j = 1, ...n) bileşenli bir vektör h da ağ uzunluğu olmak üzere

$$L_h((u)) = \sum_{s=0}^{N} c_s(x, h)\, u(x + m_s h) \tag{2}$$

bir sonlu fark ifadesi olsun. Genelliği bozmadan $s \neq t$ için $m_s \neq m_t$ ve m_0 ında bir sıfır vektör olduğunu kabul edebiliriz. Şayet x noktası civarında (2) deki $u(x + m_s h)$ ın Taylor açılımları L((u)) ya oransal bir şekilde başlıyorsa veya diğer bir söyleyişle sıfıra eşit olmayan x veya h a eşit olan bir λ (x, h) fonksiyonu varda (2) ile verilen sonlu farklar ifadesi L((u)) ya benzerdir.

$$\sum_{s=0}^{N} c_s(x, h) = h^2 \lambda(x, h)\, c(x) \tag{3}$$

$$\sum_{s=1}^{N} c_s (x, h)\, m_{sj} = h\, \lambda (x, h)\, b_j (x) \quad (j = 1, \ldots n) \tag{4}$$

$$\sum_{s=1}^{N} c_s (x, h)\, m_{si} . m_{sk} = \lambda (x, h)\, a_{ik}(x) \quad (i\,;\, k = 1, \ldots n) \tag{5}$$

Genel olarak, verilen bir diferansiyel denkleme benzer olan sonsuz tane sonlu farklar ifadesi olacaktır. Pek çok uygulamada;

$$c_s (x, h) > 0 \quad (s \neq 0) \;, \quad c_0 (x, h) < 0 \tag{6}$$

veya en azından

$$c_s (x, h) \geqslant 0 \quad (s \neq 0) \;, \quad c_0 (x, h) \leqslant 0 \tag{6a}$$

şeklindeki ifadeleri kullanmak gerekecektir. Özelliklede eliptik diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümlerinde bu özellik geçerlidir.

Şayet (6) ifadesi sınırlı bir bölgede sağlanıyorsa ve $\sum_{s=0}^{N} c'_s (x, h) \leqslant 0$ ise bu durumda $L_h ((u')) = 0$ fark denkleminin çözümleri eliptik diferansiyel denklemlere maksimum benzerlik prensiplerini sağlar. Bu konu üzerinde ileride daha geniş şekilde durulacaktır.

Bu şekildeki bir prensibin varlığı, fark denklemlerine ait sınır değer problemlerinin çözümünde $h \to 0$ iken çözümün varlığı, tekliği ve yakınsaklığı gibi standart yöntemlerin uygulanmasını sağlar. Ayrıca sonlu farklar lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerini ihtiva eden problemlerin çözümünde de kullanılır.

Bu çalışmanın asıl amacı verilen bir eliptik diferansiyel denklemin 6 ve (6a) koşulunu sağlayan $L_h ((u))$ fark denklemine benzeyip benzemediğinin araştırılmasıdır.

POZİTİF TÜRDEKİ FARK DENKLEMLERİ:

Sık yazdığımız $c_s (x, h)$, $\lambda (x, h)$ ifadelerini sadeleştirmek için, eğer 6 veya 6a gerçekleşiyorsa (2) fark denklemine pozitiftir veya negatif değildir diyeceğiz. $x + m_s h$ ın komşuluğundaki her x noktasına ait vektörler m_s dir. Dolayısıyla bu vektörlerle tanımlanmış kafeslere ait komşuluk sistemlerinden bahsedebiliriz. (6) koşulundan yararlanmadan bazı komşuluk sistemlerini kullanarak, her $L((u))$ için benzer bir $L_h ((u))$ bulmak mümkündür. Gerçekten $+ 1$, $- 1$, veya 0 bileşenli tüm vektörlerin m kümesini almak yeterlidir. İlk teoremimiz, $L_h((u))$ nun pozitif tipte olması halinde bunun artık doğru olmadığını göstermektedir.

TEOREM 1:

$n > 1$ olsun. Herhangi bir x noktası ve rastgele bir komşuluk sistemi alalım. Bu komşuluk sisteminde negatif olmayan tip fark denklemlerine benzer olmayan $L((u))$ eliptik diferansiyel ifadesi bulunabilir.

İSPAT:

n mertebeli bütün $[x_{ih}]$ simetrik matrislerinin $n.(n + 1)/2$ boyutlu Ω uzayını ele alalım ve Ω daki bütün pozitif tanımlı matrislerin kümesini D ile gösterelim. D tepesi orjinde olan pozitif yarı belirli matrise karşılık gelen Det $[x_{ik}] = 0$ yüzeyinin Γ kısmı ile sınırlandırılan bir konveks koni olsun. D çok yüzlü bir koni değildir. n = 2 için Γ nin bir naplı dejenere bir quatratik koni olduğu açıktır. $n > 2$ olması halinde, Γ ile $x_{ik} = 0$ $(i, k > 2)$ ile tanımlanan doğrusal alt yüzeyinin kesişimini düşünelim.

Bu kesişim $x_{11}x_{22} - x_{12}^2 \geqslant 0$ eşitsizliğini gerçekleyen doğrusal nokta kümesidir. Bu nedenle Γ, $(\frac{1}{2} n (n+1) - 1)$ boyutlu düz kısmı kapsamaz.

$[m_{si}, m_{sk}]$ matrisi pozitif yarı tanımlı bir matris olduğundan Ω nın $[x_{ik}] = [m_{si}, m_{sk}]$, $(s = 1, \ldots N)$ şeklindeki N noktaları Γ üzerinde bulunurlar. $c_s \geqslant 0$ olduğu yerlerde Ω nın $\sum_{s}^{N} c_s m_{si} \cdot m_{sk}$ koordinatlı tüm noktaları D deki D_1 konveks çok yüzlü konisinde bulunurlar. D çok yüzlü olmadığından D_1 de bulunmadığından D_1 de bulunmayan d ışınları D de vardır. Verilen L((u)) diferansiyel ifadesinin $a_{ik}(x)$ değerleri, verilen bir x noktasına d üzerinde bir nokta karşılık getirirse bu durumda (5) denklemleri (6a) denklemi ile uyuşmaz, örneğin; fark ifadesinin negatif bir tip denklem olduğu varsayımı gibi. İspatın bir sonucu olarak x noktasında tanımsız $[a_{ik}(x)]$ matrisli L((u)) diferansiyel ifadesinin negatif türden olmayan bir fark ifadesine kesinlikle benzemediğini görürüz.

Aynı komşuluk sisteminin tüm diferansiyel denklemlerde kullanılır isteğini ortadan kaldırdığımız zaman aşağıda verilen 2. teoremdeki olumlu olmayan ifade 1. teoremdeki negatif olan ifade ile değiştirilebilir hatta (6a) yerine (6) koşullarının alınması daha iyi olur.

Şayet L((u)) eliptik ve de Det $[a_{ik}(x)] \geqslant$ sabit > 0 ise bu durumda L((u))'ya B nin $\overline{B}$ kesiminde düzgün eliptiktir diyeceğiz.

TEOREM 2:

L((u)) x-uzayının sınırlı bir B bölgesinin bir $\overline{B}$ kesiminde düzgün eliptik ve $\overline{B}$ de düzgün yakınsak katsayılara sahip bir diferansiyel ifade olsun. Bu durumda yeterince küçük h için L((u)) ya benzer pozitif tipte bir $L_h((u))$ fark denklemi vardır.

Rankı bir olan n. mertebeden pozitif tanımlı matrisler kümesinde d_j, $(j = 1,2,\ldots n)$ n, gerçel bir sayı olmak üzere bütün $[d_i, d_k]$ matrisleri sıfır değildir. Ω nın noktaları Γ üzerinde olurlar. m_j $(j = 1,2, \ldots n)$ tam sayılar olmak üzere özellikle $[m_i, m_k]$ şeklindeki matrislerle ilgileneceğiz. Bu matrislere rankı bir olan integral türde matrisler diyeceğiz.

YARDIMCI TEOREM:

D deki kapalı sınırlı her $\overline{G}$ kümesi; rankı bir olan integral türden pozitif tanımlı matrislere karşılık gelen Γ nın noktalarının oluşturduğu konveks çok yüzlü koniyi içine alır. $\overline{G}$ nin bir noktasını temsil eden teşkil edilmiş noktaların lineer bileşimindeki katsayılar $\overline{G}$ nin sıfırlarından uzak düzgün yakınsak olarak seçilebilir.

İSPAT:

Her pozitif kuadratik form n lineer formun karelerinin toplamı şeklinde yazılabileceğinden, D nin her noktası rankı bir olan negatif olmayan matrislere karşılık gelen Γ noktalarının oluşturduğu çok yüzlü içinde kalır. Borel'in örtme teorisi yardımıyle $\overline{G}$ nin böyle belirli sayıda çok yüzlü konilerin bileşimi içinde kalacağını söyleyebiliriz. Bu konilerin oluşturulan tüm kenarlarının meydana getirdiği tek bir çok yüzlü D^* konisi $\overline{G}$ nü içine alır. Her $[d_i, d_k]$ matrisi integral türden $[m_i, m_k]$ matrisi yardımı ile kolayca tahmin edilebilir. Her iki matrise karşılık gelen Ω daki ışınların doğrultu Cosinüsleri izin verdiğimiz ölçüde farklılık gösterebilirler. $|d_j - m_j/n_j| < 1/n^2_j$ olacak şekilde bir m_j/n_j rasyonel sayısının varlığı sonucu olan bu gerçeğin ispatını atlıyoruz. Bu nedenle yardımcı teoremdeki D_1 den istenen özellikleri taşıyan bir koni ile D^* konisi değiştirilebilir

Yardımcı teoremimizdeki ikinci iddiayı ispat etmek için m boyutlu sınırlı bir konveks çok yüzlünün herhangi bir iç noktası tüm bileşenlerin pozitif kat sayılı lineer bir bileşimidir diyebilir veya pozitif gösterime izin verebiliriz. Gerçekte pozitif P bir iç nokta olsun ve pozitif gösterimli bazı iç noktalarda Q olsun. R de QP ile çok yüzlü sınırının kesimi olsun. R nin negatif olmayan gösterimi ile Q gösteriminin pozitif kat sayılarının uygun lineer bileşimleri oluşturularak P gösterimi elde edilebilir. Böylece P nin sonuçlanan gösterimi pozitif olur.

Şimdi P yi G nin herhangi bir noktası olarak alalım. P den geçen her hiperalan π konveks çok yüzlüsündeki D_1 ile kesişir. İkinci olarak bu hiperalan öyle seçilmelidirki π sınırlandırılsın, örneğin hiperalan D_1 in $\overline{D}_1$ kısmında olan orjine doğru herhangi bir ışına paralel değildir. Bu sonuçla pozitif olmayan kuadratik forma karşılık gelmediği için D_1 nin herhangi bir ışınına zıt olmayan bir ışının $\overline{D}_1$ de olmadığı anlaşılır. Buna paralel olan hiperalan istenilen özellikleri taşıyacaktır. Süreklilikten dolayı P nin bütün komşuluğunda bu özellik geçerli olacaktır. Yine Borel örtme teoreminden dolayı $\overline{G}$ nin bütün noktaları yakınsak pozitif bir temsile müsaade eder.

Teorem II nin İspatı $x \epsilon \overline{B}$ iken yardımcı teoremde tanımlanan $\overline{G}$ kümesini L((u)) nun yakınsak, tanımlı $[a_{ik}(x)]$ matrisleri yoluyla tanımlanan Ω daki noktalar kümesi olarak alırsak, $\sum_{s=1}^{N} k_s m_{si} . m_{sk} = a_{ik}$ ve $k_s(x)$ düzgün sınırlı pozitif fonksiyonlar olmak üzere; yardımcı teorem ($s = 1,...N$) için bir m_s komşuluk sisteminin varlığını gösterir. Eğer c_s ve pozitif λ yı $k_s = c_s/\lambda$ ve $C_0 = -1$ seçersek bu durumda (5) ve (6) ifadeleri sağlanacaktır.

Alınan λ nın değerini (3) denkleminden tayin ederiz. Örneğin:

$$\lambda(x, h) = \left| \sum_{s=1}^{N} k_s(x) - h^2 c(s) \right|^{-1} \qquad (7)$$

dir. Bu ifade h ın istenildiği gibi yeterince küçük alınması halinde düzgün pozitiftir olacaktır.

Son olarak, (4) koşulunu gerçeklemek için m_s negatif iken yine aynı $[m_{si}, m_k]$ matrisini oluşturduğunu görürüz. Genellemeyi kayıp etmemeksizin komşuluk sistemimizin bütün m_s ve $-m_s$ vektörlerini içine aldığını varsayabiliriz. m_s lerin zıtlarına karşılık gelen c_s kat sayı çiftlerinin toplamlarının sabit kalması ve c_s lerin pozitif kalarak değişmesi halinde (3), (5) ve (6) koşulları daima gerçeklenecek şekilde kalmazlar. Bu uyarıya göre m_s ($s = 1, ...N$) ile $\mu_{-t} = -\mu_t$ nin yerine μ_t ($t = \mp 1, \mp 2, ..., \mp \frac{1}{2} N$) yazılarak değiştirilebilir. Benzer şekilde c_s kat sayıları ν_t ($t = \mp 1$,

$\ldots \mp \frac{1}{2}$ N) olarak tekrar isimlendirilir. Önceden tayin edildiği üzere m_s lerin terslerine karşılık gelen çiftlerin herbir toplamı c_t toplamı hesaplarımızda

$$\nu_t > 0 \qquad \nu_t + \nu_{-t} = c_t \quad (t = 1, \ldots \tfrac{1}{2} N) \tag{8}$$

yi veriyordu. Şimdi (4) şartı

$$\sum_{t=1}^{N/2} (\nu_t - \nu_{-t})\, \mu_{tj} = \lambda\, hb_j \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{4a}$$

şeklinde veya 8 den dolayı

$$\sum_{t=1}^{N/2} (2\nu_t - c_t)\, \mu_{tj} = \lambda\, hb_j \quad \text{yazılabilir.}$$

ν_t ler için bu denklemlerin pozitif çözüme sahip olduklarını göstermek için $\delta_t = \delta_t$ (x, h) denklemini

$$2\,\nu_t = c_t + \sqrt{c_t}\;\delta_t\, h_t \quad (t = 1, \ldots, \tfrac{1}{2} N) \tag{9}$$

denklemiyle gösteririz bu da (4a) yı

$$\sum_{t=1}^{N/2} \sqrt{c_t}\;\mu_{tj}\,\delta_t = \lambda b_j$$

haline getirir.

$A = [\sqrt{c_t}\mu_{tj}]$ bu sistemdeki kat sayıların n satırlı ve N/2 kolunlu bir matrisi olsun. ($N/2 > n$ almalıyız). Varsayımdan B deki sıfırdan uzak olarak düzgün yakınsak olarak sınırlandırılan λ $[a_{ik}]$ matrisinin determinantı (5) e göre AA^T nin ürünüdür.

Bundan dolayı A matrisi rank n ve $\overline{B}$ de yakınsak olarak sınırlı çözüme haiz bir sistemdir. (9) daki ν_t nin eşdeğerleri pozitif olur en azından yeterince küçük bir h için 8 de verilen

$$2\nu_{-t} = c_t - \sqrt{c_t}\,\delta_t\, h$$

ile verilen ν_t içinde geçerlidir. Bu da teorem II nin ispatını tamamlar.

3. MAKSİMUM PRENSİBİ

Girişte söylenenleri açıklamak için, burada maksimum prensibinin tartışmasıyla makaleyi bitireceğiz. Buradaki tüm noktalar ağdaki h adım uzunluğuna bağlı olacaktır.

Eğer belirli bir x noktası için c_s (x, h) nın değeri sıfırdan farklı ise $x + m_s h$ ye m_s (s = 1, ...N) komşuluk sistemindeki bu x noktaların etkin komşuluğudur diyeceğiz. Her bir nokta bir önceki noktanın komşuluğunda olacak şekilde ağ noktalarının belirli bir dizisi verilsin. Bu durumda bu dizinin her bir noktası müteakkip noktalarla etkin bağlantılı olacaktır.

TEOREM 3:

x noktaları n-boyutlu Euclidean uzayında, ağ uzunluğu h olan ortagonal bir kafese ait noktalar olsun. v(x) sınırlı alanın dışında sıfır E-B de sınırlı bir fonksiyon olsun. Buna göre

$$x \epsilon B \text{ için } c_s(x, h) \geqslant 0 \quad (s = 1, \ldots, N), \quad \sum_{s=1}^{N} c_s(x, h) \leqslant 1 \tag{11}$$

olmak üzere

$$u(x) \quad \begin{matrix} \sum_{s=1}^{N} c_s(x, h)\ u(x + m_s h) & x \epsilon B \text{ için} \\ u(x) & x \epsilon E\text{-}B \text{ için} \end{matrix} \tag{12}$$

şeklindeki fark denkleminin çözümünü düşünelim. Eğer u(x) in B deki maksimum ve minimumları E-B deki bir noktaya etkin bağlantılı kalıyorsa,

$$\min v(x) \leqslant u(x) \leqslant \max v(x) \tag{13}$$

dir.

İSPAT (13) eşitsizliğinin her iki tarafı için benzer bir ispat yapılacağından, ispatı sadece eşitliğin sağ tarafı için yapmak yeterli olacaktır. V = max v(x), U = $\max_{x \epsilon B}$ u(x) yi oluşturursak o zaman U $\leqslant$ 0 için V $\geqslant$ 0 ve U $\leqslant$ V kesinlikle doğrudur. Bu nedenle U > 0 kabul edebiliriz. x_0, B de $u(x_0) = U$ olacak şekilde bir nokta olsun. Bu durumda

$$U = u(x_0) \leqslant U \sum_{s_1(x_0)} c_s(x_0, h) + V \sum_{s_2(x_0)} c_s(x_0, h) \tag{14}$$

toplamı sıra ile E-B ve B deki x_0 komşuluğunun $s_1(x_0)$ ve $s_2(x_0)$ alt kümelerinde bulunan $x_s + m_s h$ noktaları için S nin alacağı bütün değerler için geçerli olacaktır. Eğer,

$$\sum_{s_2(x_0)} c_s(x_0, h) > 0 \quad \text{ise} \tag{15}$$

11 ve 14, V < U kabulümüzün

$$U < U \sum_{s=1}^{N} c_s(x, h) \leqslant U \tag{16}$$

çelişkisini yarattığını gösterir ve (13) ispat edilir. Eğer $\sum_{s_2(x_0)} c_s(x_0, h) = 0$ ise 11 ve 12 den x_0 ın tüm x komşuluğunda u(x) = U sonucuna varırız.

KAYNAKÇA

1. M.K. JAIN: Numerical Solution of Differantial Equations, Wiley Eastern Limited, 1984.
2. W.F. AMES: Numerical Methods for Partial Differantial Equations, Thomas Nelson 1969.

3. P.L.T. BRIAN: A finite difference method of high accuracy for the solution of three dimensional transient heat conduction problems, Aiche J., 1961.
4. M.M. CHAWLA: A sixth order tridiagonal finite difference method for non-linear two point boundary value problems, BIT, 1977.
5. M.M. CHAWLA and C.P. KATTI: Finite difference methods for two point boundary value problems involuing high-order differential equations; BIT, 1979.
6. G.E. FIRSYTHE and W.R. WASOW: Finite Difference Methods for Partial Differential Equations, Wiley, 1960.
7. L. BERS: On mildly non-linear partial difference equations of elliptic type, Nat. Bur. Standards, Los Angeles, NAML Report 52-25.
8. W. WASOW: On the duration of random walks, Ann of Math Stat., 22.
9. D. GREENSPAN: Introductory Numerical Analysis of Elliptic Boundary Value Problems, Harper and Row 1965.
10. H.H. RACHFORD and D.W. PEACEMAN: The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J. Soc. Indust. Appl. Math 1955.
11. L. COLLATZ: Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation for Lineare Differential glerchungen. Schriften des math. Seminans, Univ. Berlin, 1935.