Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakülteleri Dergisi
Cilt: VI, Sayı: 2, 1991

FİNSLER GEOMETRİK NESNE ALANININ LİE TÜREVİ

İbrahim AKYÜZ*

ÖZET

Bu çalışmada, Finsler geometriye giriş için bazı dönüşümler, diferansiyellenebilen manifold, lineer olmayan bağıntılar ve Finsler tipdeki geometrik nesneler kavramı verildi. Finsler geometrik nesne alanının Lie türevi için gerekli tanımlar yapıldı. Bu türevin özellikleri belirtilerek Finsler geometrik nesneye uygulanışı gösterildi.

SUMMARY

Lie Derivative of a Finsler Geometric Object Field

In this study, for introduction to the Finsler geometry, some transformations, differentiable manifold, non-linear connections and geometrical objects of Finsler type have been given. For Lie derivative of Finsler geometric object field, the necessary definations have been described, and the proporties of Lie derivative have been determined. The application of this derivative to Finsler geometric object field has been shown.

---

* *U.Ü. Necatibey Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Öğretim Üyesi.*

1. GİRİŞ

C^{∞} sınıfının diferansiyellenebilen manifoldu M olarak verilsin.

$x \varepsilon M$ bir nokta ise bu Mx ile gösterilsin.

(x, y) çiftinde, $x\varepsilon M$, $y\varepsilon Mx$ ve

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} Mx$$

olsun. Dönüşümü ise $\pi : T(M) \rightarrow M$ ile verilsin.

T(M) deki lineer olmayan bağlantı N ise N nın katsayıları $N^{k}{}_{i}(x, y)$ ile gösterilsin. T(M) deki koordinatların değişimi

$$x^{i'} = x^{i'}(x^{1}, x^{2}, ..., x^{n})$$

$$y^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} y^{j} \qquad (1.1)$$

ile verilsin. $N^{k}{}_{i}$ (x, y) katsayılarının dönüşüm kuralı,

$$N^{h'}{}_{k'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} N^{h}{}_{k} + \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{1}} \frac{\partial^{2} x^{1}}{\partial x^{k'} \partial x^{m'}} y^{m'} \qquad (1.2)$$

dir. Görüldüğü gibi eşitliğin ikinci tarafında y^{i} koordinatları vardır.

M deki bir lineer bağlantı $T^{v}{}_{jk}$ (x) ise T(M) deki lineer olmayan bağlantı $T^{i}{}_{jk}$ $(x)y^{k}$ dir ve $T^{i\prime}{}_{jk}$ ye eş lineer olmayan bağlantı denir.

2. M MANİFOLDUNDA FİNSLER GEOMETRİK NESNELER

Tanım 2.1. M deki k. ci mertebeden bir Finsler geometrik nesne alanı $\Omega^{\wedge}(x,y)$, $(\wedge, \Sigma, \pi, ... = 1, ... N)$ N fonksiyonların bir kümesidir. (1.1) koordinatlarının değişiminde

$$\Omega^{\wedge}(x',y') = F^{\wedge}(\Omega (x, y), x^{i}, x^{i'}, \partial_{j}^{x'}, ..., \partial_{jk} .... j_{1}\, x^{i'}) \qquad (2.1)$$

dönüşüm kuralı vardır. Eğer (2.1) dönüşümü geçerli ise $\Omega^{\wedge}$ lineerdir ve

$$\Omega^{\wedge'} (x', y') = F_{r}^{\wedge} (x^{i}, x^{i'})\ \Omega^{\Sigma} (x, y) + G^{\wedge} (x^{i}, x^{i'}) \qquad (2.2)$$

yazılabilir. $\Omega^{\wedge}$ ye bir Finsler lineer geometrik nesne alanı denir.

$G^{\wedge} = 0$ olduğunda $\Omega^{\wedge}$ homojen alandır.

$N^i_j(x, y)$ ve $N^{-i}_j(x, y)$ lineer olmayan bağlantının katsayıları ise

$$A^i_j(x, y) = N^i_j(x, y) - N^{-i}_j(x, y)$$

yazıldığında $A^i_j(x, y)$ nın (2.1) göre, dönüşüm kuralı

$$A^{i'}_{j'}(x', y') = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} A^i_j(x\, y)$$

dır. Bundan dolayı bir Finsler diferansiyellenebilen lineer ve homogen geometrik nesne alanıdır. Bu nedenle M de Finsler tensör alanı adını alır.

$N^i_j(x, y)$ lineer olmayan bağlantının katsayıları olmak üzere

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$$

verilsin. $\Gamma^i_{jk}(x, y)$ 2. mertebeden Finsler tensör alanının katsayıları olduğunda dönüşüm kuralı aşağıdaki şekildedir.

$$T^{i'}_{j'k'}(x', y') = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk}(x, y) + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}$$

$K^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x, y)$ Finsler geometrik nesne alanı olduğunda dönüşüm kuralı

$$K^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q}(x', y') = \frac{\partial x^{i'}1}{\partial x^i 1} \cdots \frac{\partial x^{i'} p}{\partial x^i p} \quad \frac{\partial x^j 1}{\partial x^j 1'} \cdots \frac{\partial x^j q}{\partial x^{j'} q} K^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x\, y)$$

dır ve M de (p, q) tipinde Finsler Tensör alanıdır.

3. GEOMETRİK FİNSLER ALANININ LİE TÜREVİ

M üzerinde bir dönüşüm

$$'x^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \ \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \qquad (3.1)$$

olarak verilsin. T(M) deki dönüşüm

$$\grave{x}^i = f^i(x^1, x^2, ..., x^n), \ \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \tag{3.2}$$

$$\grave{y}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} y^j$$

olarak düşünüldüğünde (3.1) in dönüşümü M de genelleştirilmiş olarak adlandırılır.

$$\text{M deki } (x^i, y^i) \rightarrow (x^{i'}, y^{i'})$$

$$x^{i'} = f^i(x^1, x^2, ..., x^n)$$

$$y^{i'} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} y^j \tag{3.3}$$

koordinatların değişimini (3.2) dönüşümü tek olarak belirler.

$\Omega^{\wedge}(x, y)$ M üzerinde bir Finsler geometrik nesne alanı ise (3.2) yardımıyla $\Omega^{\wedge}$ $(\grave{x}, \grave{y})$ ye dönüştürülür. (3.3) kullanılarak $(x^{i'}, y^{i'})$ koordinatlarında bileşenleri $\grave{\Omega}^{\wedge}$ olan $\grave{\Omega}^{\wedge}$ şeklinde yeni bir Finsler geometrik nesne alanı tanımlanacaktır. Bu da

$$\grave{\Omega}^{\wedge'}(x', y') \overset{\text{tan.}}{=} \Omega^{\wedge}(\grave{x}, \grave{y}) \tag{3.4}$$

ile verilir.

Ω (x, y) alanının Lie değişimi

$$\grave{\Omega}^{\wedge}(x, y) - \Omega^{\wedge}(x, y) \tag{3.5}$$

şeklindedir.

$(v^i(x))$ vektörü ile belirtilen sonsuz küçük dönüşüm (3.1) ile verildiği düşünüldüğünde

$$\grave{x}^i = x^i + v^i(x)\, dt$$

dir.

Böylece M deki genelleştirilmiş dönüşüm

$$\grave{x}^i = x^i + v^i(x)\, dt$$

$$`y^i = y^i + \frac{\partial v^i}{\partial x^j} y^j \, dt$$

olarak yazılabilir.

Bu durumda (3.5) Lie farkı, $\Omega^\wedge$ (x, y) alanın Lie diferansiyeli olarak adlandırılır ve $\underset{v}{L}\, \Omega^\wedge$ (x, y) dt ile gösterilir. Böylece

$$\underset{v}{L}\, \Omega^\wedge (x, y)\, dt = \Omega^\wedge (x, y) - \Omega^\wedge (x, y) \tag{3.6}$$

yazılır.

(3.6) daki dt nin katsayısı $\Omega^\wedge$ (x, y) Finsler geometrik nesne alanın $v^i(x)$ vektör alanına göre Lie türevi olarak adlandırılır ve $\underset{v}{L}\, \Omega^\wedge$ (x, y) ile gösterilir.

$$a_{j(0)} v^i = v^i , \qquad \partial_{j(s)}\, v^i = \partial_{j_s} \ldots j_1\, v^i$$

olmak üzere Lie türevi

$$\underset{v}{L}\, \Omega^\wedge (x, y) = v^m \frac{\partial \Omega^\wedge}{\partial x^m} + y^m \frac{\partial v^j}{\partial x^m} \quad \frac{\partial \Omega^\wedge}{\partial y^j} - \sum_{s=0}^{k} F_m{}^{j(s)}$$

$$(\Omega^\Sigma ; x^i, x^{i'})\ \partial_{j(s)}\, v^m \tag{3.7}$$

eşitliğinde

$$F_m{}^{j(0)}\ (\Omega^\Sigma ; x^i, x^{i'}) = [\frac{\partial F^\wedge}{\partial f^m}]_{(x,\, y)}$$

ve (3.8)

$$F_m{}^{j(s)}\ (\Omega^\Sigma ; x^i, x^{i'}) = [\frac{\partial F}{\partial(\partial j_s \ldots j_1 f^m)}]_{(x,\, y)}$$

dir. (x, y) noktası

$$f^i = x^i, \quad \partial_j f^i = \delta^i{}_j, \quad \partial_{j(s)} f^i = 0 \quad (s = 2, \ldots, k)$$

olur.

Yukardaki bağıntılardan

$$\Omega^\wedge (x', y') - \Omega^\wedge (x', y') = F^\wedge (\Omega^\Sigma ; x^i, x^{i'}) - F^\wedge (\Omega^\Sigma ; x^i, x^{i'})$$

ve (3.6) dan, dt ye göre birinci mertebeden terimler alındığında

$$\underset{v}{L}\,\Omega^{\wedge}(x', y') = \frac{\partial F^{\wedge}}{\partial \Omega^{\wedge}}\, \underset{v}{L}\,\Omega^{\Sigma}(x, y) \qquad (3.9)$$

bulunur. (3.9) $\underset{v}{L}\,\Omega\,(x, y)$ nin dönüşüm kuralıdır.

Teorem 3.1 $\Omega^{\wedge}(x, y)$ bir Finsler lineer geometrik nesne alanı ise $\Omega^{\wedge}(x, y)$ Finsler geometrik nesne alanının Lie türevi bir Finsler geometrik nesne alanıdır.

$\Omega^{\wedge}(x, y)$, bir lineer geometrik nesne alanı ise (3.9) dan, onun dönüşümünde (1.1) kuralı geçerlidir ve

$$\underset{v}{L}\Omega^{\wedge}(x', y') = F^{\wedge}{}_{\Sigma}(x^{i}, x^{i'})\, \underset{v}{L}\,\Omega^{\Sigma}\quad (x, y)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.2 . $\Omega^{\wedge}(x, y)$ Finsler lineer geometrik nesne alanının $\underset{v}{L}\,\Omega^{\wedge}(x, y)$ Lie türevi bir Finsler lineer homogen geometrik alanıdır.

$\Omega^{\wedge}(x, y)$ (2.4) dönüşüm kuralını gerçekleştirirse bunun geometrik anlamı $\underset{v}{L}\,\Omega^{\wedge}(x, y) = 0$ dır. Bu durumda

$$\underset{a\underset{1}{v} + b\underset{2}{v}}{L}\,\Omega^{\wedge}(x, y) = a\,\underset{\underset{1}{v}}{L}\,\Omega^{\wedge}(x, y) + b\,\underset{\underset{2}{v}}{L}\,\Omega^{\wedge}(x, y),\ a, b\ \varepsilon\ R$$

olur.

$\underset{1}{\Omega^{\wedge}}(x, y)$ ve $\underset{2}{\Omega^{\wedge}}(x, y)$ aynı dönüşüm kuralına sahip olduğu zaman

$$\underset{v}{L}\,1/2\,(\underset{1}{\Omega^{\wedge}}(x, y) \mp \underset{2}{\Omega^{\wedge}}(x, y) = 1/2\,\underset{v}{L}\,\underset{1}{\Omega^{\wedge}}(x, y) \mp 1/2\,\underset{v}{L}\,\underset{2}{\Omega^{\wedge}}(x, y)$$

bulunur.

Gr, diferansiyellenebilen M manifoldunda dönüşümün r parametreli bir grubu ise $\underset{a}{L} = \underset{\underset{a}{v}}{L}$, $(a = 1, 2, ... r)$ dir.

Teorem 3.3 M manifoldunda herhangi $\Omega^{\wedge}(x, y)$ Finsler lineer geometrik nesne alanı ve M deki dönüşümün r parametreli Gr grubu için, $c_{ab} = -c_{ba}$ dir. Gr grubunun sabit yapısı olmak üzere temel formül

$$(L_a, L_b)\,\Omega^{\wedge}(x, y) = c_{ab}\,L_c\,\Omega^{\wedge}(x, y), \qquad (a, b, c = 1, ..., r)$$

ve

$$(L_a, L_b) = L_a L_b - L_b L_a$$

dir.

$K^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ (x, y) tensör alanı olarak verildiğinde (3.7) den

$$\underset{v}{L}\, K^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} (x, y) = v^m \frac{\partial K^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^m} + y^h \frac{\partial v^m}{\partial x^h} \frac{\partial K^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial y^m}$$

$$- K^{m i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial v^{i_1}}{\partial x^m} - \ldots - K^{i_1 \ldots i_{p-1} m}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial v^{i_p}}{\partial x^m}$$

$$+ K^{i_1 \ldots i_p}_{m j_2 \ldots j_q} \frac{\partial v^m}{\partial x^{j_1}} + \ldots + K^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1} m} \frac{\partial v^m}{\partial x^{j_q}} .$$

Eğer Γ^i_{jk} (x, y) Finsler lineer geometrik nesne ise Lie türevi

$$\underset{v}{L}\, \Gamma^i_{jk} (x, y) = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j} + v^m \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^m} + y^h \frac{\partial v^m}{\partial x^h} \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^m}$$

$$- \Gamma^m_{jk} \frac{\partial v^i}{\partial x^m} + \Gamma^i_{mk} \frac{\partial v^m}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jm} \frac{\partial v^m}{\partial x^k}$$

olduğu görülür.

KAYNAKLAR

1. MATSUMOTO, M.: Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Space to Appear From VEB Deutsh Berlin.
2. MIRON, R.: Sur la derivate de Lie des objects geometriques W Tensor (N.S.) 1966.
3. RUND, H.: The differential geometry of Finsler spaces Berlin, 1959.