Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakülteleri Dergisi
Cilt: VI, Sayı: 2, 1991

# NÜMERİK ÇÖZÜMLERDE MAJONANTLARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

**Hasan SOYDAN***

## ÖZET

*Dahlguist $z'$, $u$'nun majorantı ve $\forall z \varepsilon P$ için $L_1 z \leq Lz \leq L_2 z$ oluyorsa, $|Lu - (L_1 u + L_2 u)/2| \leq (L_2 z' - L_1 z')/2$ olduğunu bir lemma ile göstermiş ve $\forall z \varepsilon P$ için $Lz \geq 0$ ise $|Lu| \leq Lz'$ olduğunu da Lemmanın sonucu olarak vermiştir.*

*Bu çalışmada lemma genelleştirilmiş $u_i$ fonksiyonlarının $i = 1, 2, \ldots, n$ ($n$ sonlu) için sıra ile majorantları $z'_i$ ve $\forall z_i \varepsilon P$ için $L_{i1} z_i \leq z_i \leq L_{i2} z_2$ oluyorsa $|\sum_{i=1}^{n} [L_i u_i - (L_{i1} u_i - (L_{i1} u_i + L_{i2} u_i)/2]| \leq \sum_{i=1}^{n} (L_{i2} z'_2 - L_{i1} z'_i)/2$ ve ayrıca $\propto_i$ ler gerçel sayılar ve $\propto_i < 0$ olduğunda $L_{i1}$ yerine $L_{i2}$ ve $L_{i2}$ yerine de $L_{i1}$ yazılmak suretiyle $\forall \propto_i$ için,*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \propto_i [L_i u_i - (L_{i1} u_i + L_{i2} u_i)/2] \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2} z'_i - L_{i1} z'_i)/2$$

*olduğu kanıtlanmıştır.*

---

* *U.Ü. Necatibey Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Öğretim Üyesi.*

## SUMMARY

### Generalization of the Majorants in Numerical Solutions

*Dahlguist has shown that it's* $|Lu - (L_1u + L_2u)/2| \leq (L_2z' - L_1z')/2$ *with a lemma, if z' is the majorant of u and it's* $L_1z \leq Lz \leq L_2z$ *for* $\forall z \varepsilon P$*, and he has also given that it's* $|Lu| \leq Lz'$ *if it's* $Lz > 0$ *for* $\forall z \varepsilon P$*, as a result of a lemma.*

*In this article, lemma is generalized as it's* $|\sum_{i=1}^{n} [L_iu_i - (L_{i1}u_i - (L_{i1}u_i + L_{i2}u_i)/2]| \leq \sum_{i=1}^{n} (L_{i2}z'_2 - L_{i1}z'_i)/2$*, if in* $u_i$ *functions, it's* $L_{i1}z_i \leq L_iz_i \leq L_{i2}z_i$ *for it's majorant* $z'_i$ *and for* $\forall z \varepsilon P$ *in order. And it has been proved that it's* $|\sum_{i=1}^{n} \propto_i [L_iu_i - (L_{i1}u_i + L_{i2}u_i)/2] \leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2}z'_i - L_{i1}z'_i)/2$ *if the* $\propto_i$*'s are real numbers and* $\propto_i \leq 0$ *then it's substituted* $L_{i2}$ *with* $L_{i1}$ *and* $L_{i1}$ *with* $L_{i2}$*.*


## GİRİŞ

$z^{(k)}(x)$ türevi bir I aralığında sabit işaretli, $L_1$ ve $L_2$ değerleri sonlu algoritma ile hesaplanabilen lineer fonksiyonlar olmak üzere, birçok lineer L fonksiyonu yardımıyla,

$$L_1z \leq Lz \leq L_2z \tag{1}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**Örnek 1:** $I = [x_\upsilon, x_{\upsilon+k}]$, $x_\upsilon < x_{\upsilon+1} < \dots < x_{\upsilon+k}$ ve $L_1u$ ile $L_2u$ da sırasıyla $\{u(x_\mu)_{\mu=\upsilon}\}^{\upsilon+k-1}$ ile $\{u(x_\mu)\}_{\mu=\nu+1}^{\upsilon+k}$ değerleri kullanılarak, polinomial interpolasyonla bulunan tahmin değerleri olsunlar. Eğer $u \varepsilon C^k(I)$ ise Lagrange interpolasyon formülleri,

$$u(x) - L_1u = \frac{1}{k!} \prod_{i=\nu}^{\nu+k-1} (x - x_\mu)\, u^{(k)}(\xi_1), \quad \xi_1 \varepsilon I$$

(2)

$$u(x) - L_2u = \frac{1}{k!} \prod_{i=\nu+1}^{\nu+k} (x - x_\mu)\, u^{(k)}(\xi_2), \quad \xi_2 \varepsilon I$$

olur. u yerine z yazılsın. O zaman sgn $z^{(k)}$ (x) I'da sabittir. u(x) yerine de Lu yazılsın. Böylece $\forall x \varepsilon I$ için,

$$\operatorname{sgn}(Lz - L_2 z) = \operatorname{sgn} \frac{x-x_{\nu+k}}{x-x_\nu} \operatorname{sgn}(Lz - Lz_1)$$

$$= - \operatorname{sgn}(Lz - Lz_1)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi x'in durumuna göre ya (1) eşitsizliği ya da tersi elde edilir.

**Örnek 2:** $h = 2^{-k}$ ile, Simpson formülünün

$$Lu = \int_0^1 u(x)\,dx$$

İntegraline uygulanmasından elde edilen sonuç $S_k u$ olsun. [0, 1] aralığında örnek 1'deki dönüşümlerle, $z^{(k)}(x) > 0$ ise,

(3) $$2S_k z - S_{k-1} z \leq L_z \leq S_k z$$

bulunur.

Konu aşağıdaki gibi genelleştirilirse;

Tanım;

$\propto_1 \geq 0$, $\propto_2 \geq 0$ $\propto_1 \varepsilon R$, $\propto_2 \varepsilon R$ ve S bir lineer uzay olsun. Belirli bir $P \subset S$ alt kümesine,

$$z_1 \varepsilon P,\ z_2 \varepsilon P \Rightarrow \propto_1 z_1 + \propto_2 z_2 \varepsilon P$$

ve

$$z \neq 0, \qquad z \varepsilon P \qquad -z \varepsilon P$$

şartlarını sağlıyorsa S'nin pozitif konisi adı verilir.

Tanım: P pozitif koni, $z - u \varepsilon P$ ve $z + u\ \varepsilon P$ oluyorsa z'ye u'nun majorantı adı verilir.

Bu tanım ile $z = [(z + u) - (z - u)]/2\ \varepsilon P$ sonucu elde edilir; u'nun bir majorantını oluşturmak, u'yu P'nin iki elemanının farkı olarak yazabilme ile aynı anlamdadır. Gerçekten,

$$2u = (z+u) - (z-u)$$

dur. Tersine $z_1 \varepsilon P$, $z_2 \varepsilon P$ olmak üzere $u = z_1 - z_2$ yazılabiliyorsa $z_1 + z_2$'nin bir majorant olacağı açıktır.

Lemma, z', u'nun majorantı ve $\forall z \varepsilon P$ için $L_1 z \leq Lz \leq L_2 z$ oluyorsa,

$$|Lu - (L_1 u + L_2 u)/2| \leq (L_2 z' - L_1 z')/2$$

dir.

İspat: z' u'nun majorantı olduğundan $z' + u \varepsilon P$ dir. Öyleyse hipotezden,

$$L_1 (z' + u) \leq L(z' + u) \leq L_2 (z' + u),$$

aynı düşünce ile $z' - u \varepsilon P$ olduğundan da,

$$L_1 (z' - u) \leq L(z' - u) \leq L_2 (z' - u)$$

yazılabilirler. Son eşitsizliğin her tarafı –1 ile çarpılıp,

$$-L_2 (z' - u) \leq -L (z' - u) \leq -L_2 (z' - u)$$

ilk eşitsizlikte toplanırsa,

$$(L_1 - L_2) z' + (L_1 + L_2)u < 2Lu < (L_2 - L_1) z' + (L_2 + L_1) u$$

ifadesi elde edilir. Bu da,

(4) $$- (L_2 - L_1) z' \leq 2Lu - (L_1 + L_2)u \leq (L_2 - L_1) z'$$

veya bütün yanlar 2 ile bölünerek,

$$- \frac{L_2 - L_1}{2} z' \leq Lu - \frac{L_1 + L_2}{2} u \leq \frac{L_2 - L_1}{2} z'$$

veya

$$|Lu - (L_1 + L_2)u/2| \leq (L_2 - L_1) z'/2$$

ya da,

$$|Lu - (L_1 u + L_2 u)/2| \leq (L_2 z' - L_1 z')/2$$

demektir.

Sonuç: $\forall z \varepsilon P$ için $Lz \geq 0$ ise $|Lu| \leq Lz'$ dür.

İspat: Yukarıdaki son eşitsizlikte $L_1$ yerine 0, $L_2$ yerine L yazılırsa,

$$|Lu| \leq Lz'$$

elde edilir.

Burada u'nun z' majorantı oluşturulabilirse, $L_1z'$ ve $L_2z'$ 'ü ve yine $L_1u$ ve $L_2u$ yu hesaplanarak Lu için kesin hata sınırını elde edebiliriz. Lz' kesin olarak hesaplanabildiğinden z' 'nün seçilmesine gerek kalmaz.

Lemmanın genelleştirilmesi, $z'_i$, $u_i$'nin majorantı ve $z \varepsilon P$ için $L_{i1}\, z_i < L_i\, z_i < L_{i2}\, z_i$ $i = 1, 2, ...., n$ (ve n sonlu) ise,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [L_i u_i - (L_{1i}\, u_i + L_{2i}\, u_1)/2] \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (L_{i2}\, z'_i - L_{i1} z')/2$$

dir.

İspat: (4) eşitsizliği $L_{i1}\, z_i \leq L_i z_i \leq L_{i2} z_i$ için

(5) $$-(L_{i2} - L_{i1})\, z'_i \leq 2L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2})\, u_i \leq (L_{i2} - L_{i1})\, z'_i$$

şeklinde yazılır ve bu sonucun i = 1, 2, ..., n için bulunan değerleri yazılıp taraf tarafa toplanırsa,

(6) $$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} (L_{i2} - L_{i1})\, z'_i &\leq \sum_{i=1}^{n} [2L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2})\, u_i] \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (L_{i2} - L_{i1})\, z'_i \end{aligned}$$

bulunur. Bu da eşitsizliğin bütün yanları 2 ile bölünüp,

(7) $$\left| \sum_{i=1}^{n} [L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i/2] \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (L_{i2} z'_i - L_{i1} z'_1)$$

bulunur.

Sonuç: 1 i = 1, 2, ..., n (n sonlu) olmak üzere $\forall z_i\, \varepsilon P$ için $L_i z_i \geq 0$

(8) $$\left| \sum_{i=1}^{n} L_i u_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} L_i z'_i$$

İspat: (7) eşitliğinde, $\forall_i$ için $L_{i1}$, yerine 0, $L_{i2}$ yerine $L_i$ yazılıp eşitsizliğin iki yanı 2 ile çarpılarak aranan sonuç bulunur.

Sonuç: 2 $\propto_i \geq 0$ gerçel sayılar olmak üzere genelleştirilmiş lemmanın şartlarında,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \propto_i [L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i/2] \right| < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2} z'_i - L_{i1} z'_i)$$

dir.

İspat: (5) eşitsizliğinin her yanı $\propto_i$ ile çarpılıp,

$$- \propto_i (L_{i2} - L_{i1})z'_i < \propto_i [2L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i] < \propto_i (L_{i2} - L_{i1}) z'_i$$

$i = 1, 2, ..., n$ için yazılarak taraf tarafa toplanırsa

$$(9) \qquad - \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2} - L_{i1}) z'_i \leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i [2L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2} - L_{i1}) z'_i$$

veya bütün yanlar 2 ile bölünerek,

$$(10) \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} \propto_i [L_i u_i - (L_{i1} u_i - L_{i2} u_i)]/2 \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2} - L_{i1}) z'_i$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikten de istenirse $\forall_i$ için $L_{i1}$ yerine 0 ve $L_{i2}$ yerine de $L_i$ yazılıp her iki yan 2 ile çarpılarak (8) eşitsizliğine benzer

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \propto_i L_i u_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i L_i z'_i$$

sonucu elde edilebilir.

## KAYNAKLAR


1. DAHLGUIST, G.C.: Numerical Solution of Nonlinear Differantial Equation, 1986.
2. UHLMANN, W.: Fehlerabschatzungen bei Antangs Anfangswertaufgaben.
3. WIDDER, D.V.: The Laplace Transform Princton, 1976.