ANALİTİK KATSAYILI
KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Sinem GÜZEL

T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANALİTİK KATSAYILI KISMİ

DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Sinem GÜZEL

Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2014

TEZ ONAYI

Sinem GÜZEL tarafından hazırlanan 'Analitik Katsayılı Kısmi Diferensiyel Denklemler' adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL

Üye: Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Emrullah YAŞAR İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Hüseyin Ovalıoğlu İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

../../….

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../….

İmza

Sinem Güzel

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ANALİTİK KATSAYILI KISMİ DİFENESİYEL DENKLEMLER

Sinem GÜZEL

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bazı temel kavram ve tanımlar, ikinci mertebeden lineer eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin kanonik forma indirgenmesi ve kanonik formdaki genel temsilleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Volterra tipindeki integral denklemlerin çözümleri için ardışık yaklaşmalar metodu verilmiştir ve

$$\Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0 \qquad (E_0)$$

denkleminin Rieman fonksiyonu Volterra tipi bir integral denklem çözülerek bulunmuştur.

Dördüncü bölümde, (E_0) denkleminin argümanları kompleks değerli bir bölge içine analitik devamı ve basit ve çok bağlantılı bölgelerde (E_0) denkleminin çözümlerinin temel temsilleri elde edilmiştir.

Son bölümde, katsayıların ve fonksiyonların reel değerli olması durumu incelenmiş ve $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ ve $(1 + x^2 + y^2)\Delta u + 4n(n+1)u = 0$ denklemlerinin regüler çözümleri için genel temsil formülleri türetilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Rieman fonksiyonu, Metaharmonik fonksiyon, Kanonik forma indirgeme

2014, iv+75 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ANALITICAL COEFFICIENTS

Sinem GÜZEL

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezayi HIZLIYEL

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts and definitions, reduction to canonical form of the second order linear partial differential equations and the general representaion in canonical form are given.

In the third section, the method of successive approximation for the solution of the integral equation of Volterra type are given and the Riemann function of equation

$$\Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0 \qquad (E_0)$$

is found by solving a Volterra type integral equation.

In fourth chapter, analytic continuation of the solution of the equation (E_0) into the domain of the complex values of arguments and general representation of solution of the equation (E_0) in simply and multiply connected domains have been obtained.

In the final chapter, the case of real-valued coefficients and functions have been examined and the general represantations formulas is derived for the regular solutions of the equations $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ and $(1 + x^2 + y^2)\Delta u + 4n(n+1)u = 0$.

Key Words: Riemann functions, Metaharmonic functions, Reduction to canonical form.

2014, iv+75 sayfa

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sırasında, yaptığım çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren araştırmalarımın her aşamasında öneri, bilgi ve yardımlarını esirgemeyerek gelişimime katkıda bulunan, çalışmalarım süresince her anlamda bana destek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL'e saygı ve sevgilerimle teşekkür ederim.

Bana hiçbir desteğini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürler.

Sinem GÜZEL

../../….

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

İki bağımsız değişkenli analitik katsayılı eliptik tipten lineer kısmi diferensiyel denklemleri sağlayan bir kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar sınıfı bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Böyle fonksiyonlar I. N. Vekua (1937, 1939, 1945, 1967) ve S. Bergman (1937, 1943, 1945) tarafından incelenmiştir.

Bu tezde, basit ve çok bağlantılı bölgelerde

$$E(u) \coloneqq \Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y),$$

formundaki bir denklemin tüm regüler çözümlerini veren bir kompleks değişkenli holomorf fonksiyonlar cinsinden genel temsil formülleri türeteceğiz. Çözümlerin bu genel temsilleri $z = x + iy, \zeta = x - iy$ kompleks değişkenlerinin herhangi bir analitik $\varphi(z),\ \varphi^*(z)$ fonksiyon çifti ile ilişkili olarak lineer operatörler ile verilebilir ki genelde bu çözümler kompleks değerlidirler. Bu operatörlerin çekirdekleri sadece denklemin katsayılarına bağlı olarak Riemann fonksiyonu anlamında ifade edilebilirler ve genel durumda ardışık yaklaşmalar metoduyla elde edilmişlerdir.

Bu genel temsiller eliptik denklemlerin çözüm sınıfının yapısal özelliklerini çok belirgin ortaya çıkarır ve eliptik tipten kısmi diferensiyel denklemi sağlayan fonksiyon sınıfı için bir kompleks değişkenli analitik fonksiyon sınıfının bilinen bir çok özelliğini genişletmeye imkan tanır. Ayrıca bu temsiller sınır değer problemlerinin uygulamaları ve özel fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutmaktadır.

2. İKİ BAĞIMSIZ DEĞİŞKENLİ İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER ELİPTİK DENKLEMLER

Bu bölümün birinci kısmında, ilerleyen bölümlerde kullanılacak bazı temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir. İkinci kısmında ise ikinci mertebeden lineer eliptik kısmi diferensiyel denklemleri kanonik forma indirgenmesi ve kanonik formdaki genel temsilleri verilmiştir.

2.1. Temel kavramlar, Terimler ve Gösterimler

Bu kısımda, kullanacağımız bazı yardımcı terimler kavramlar ve gösterimler açıklanacaktır.

$x_1, \cdots, x_n$ sayılarının sıralı kümesi $\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ noktası olarak adlandırılacaktır. Sayılar, genelde kompleks değerli olabilir ve noktanın koordinatları olarak adlandırılacaktır. Bazen bir noktayı göstermek için tek bir karakter de kullanılabilir.

$\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ noktalarının

$$\left|x_1 - x_1{}^0\right| < \rho, \ \left|x_2 - x_2{}^0\right| < \rho, \cdots, \left|x_n - x_n{}^0\right| < \rho,$$

şartını sağlayan kümesine $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ nin bir ρ -komşuluğu denir. Burada $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ sabit bir nokta ve ρ pozitif bir sayıdır.

Bir $\mathfrak{M}$ kümesinin yığılma noktaları kümesini $\mathfrak{M}'$ ile gösterelim $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'$ kümesine ise $\mathfrak{M}$ nin kapanışı denir. Eğer $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ ise $\mathfrak{M}$ ye kapalı küme, $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$ ise $\mathfrak{M}$ ye kendi içinde yoğun küme denir. Bir küme hem kapalı hem de kendi içinde yoğun ise bu kümeye mükemmel küme denir.

Kapalı bir küme, eğer boş olmayan ve ortak noktası olmayan iki kapalı kümeye ayrılmıyorsa bu kümeye bağlantılı küme denir. Kapalı bağlantılı kümeye kontinum (Continuum) denir. Dikkat edilirse, nokta bir kontinumdur. Eğer bir kontinuum birden fazla nokta içeriyorsa mükemmel bağlantılı küme diye adlandırılır.

Bir noktanın bir ρ -komşuluğu tamamen kümenin içinde kalacak şekilde varsa noktaya kümenin iç noktası denir.

Bir noktanın bir ρ -komşuluğu kümenin hiçbir noktasını bulundurmayacak şekilde mevcutsa noktaya dış nokta denir.

Bir nokta iç veya dış nokta değilse kümenin sınır noktası denir. Kümenin sınır noktalarının oluşturduğu kümeye kümenin sınırı denir ve kapalı bir küme olduğu kolayca gösterilebilir.

Bir $\mathfrak{M}$ kümesinin tüm noktaları iç nokta ise bu kümeye açık küme denir. Açık bir küme eğer iki açık ve kesişmeyen kümelerin toplamları cinsinden yazılamıyorsa bağlantılıdır denir. Bağlantılı açık bir kümeye bölge denir.

Aşikâr olarak bir noktanın herhangi bir ρ -komşuluğu bir bölgedir. $x_1,\cdots,x_n$ değişkenleri biri diğerinden lineer bağımsız olarak sırasıyla kompleks düzlemin $T_1,\cdots,T_n$ bölgelerinde değiştiğinde $(x_1,\cdots,x_n)$ nokta kümesi de bir bölgedir. Böyle bir bölgeye silindirik denilecektir ve genellikle $(T_1,\cdots,T_n)$ ile gösterilir. Örneğin $\left(x_1{}^0,\cdots,x_n{}^0\right)$ noktasının ρ -komşuluğu bir silindirik bölgedir ve bu durumda T_k,

$$\left|x_k - x_k{}^0\right| < \rho, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

olan bir çemberdir.

Sonsuzdaki bir nokta ile tamamlanan düzleme tam (complete) düzlem denir. Stereografik projeksiyon yardımıyla tam düzlem birim küre yüzeyi üzerine bire bir ve konformal olarak dönüştürülebilir.

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ fonksiyonu $\mathfrak{M}$ kümesi üzerinde $(x_1,\cdots,x_n)$ noktalarında verilmiş olsun. Eğer $\mathfrak{M}$ kümesinin herhangi iki $(x_1,\cdots,x_n)$, $(x_1',\cdots,x_n')$ noktası için

$$|f(x_1', x_2', \cdots x_n') - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)| < K\sum_{k=1}^{n}|x_k' - x_k|^{\alpha}, \tag{2.1}$$

ise f fonksiyonuna $\mathfrak{M}$ üzerinde Hölder şartını sağlar denir. Burada K>0 ve α; 0<α ≤1 olacak şekilde noktalarından bağımsız iki sabittir. (2.1) şartını sağlayan fonksiyonlara $\mathfrak{M}$ üzerinde Hölder süreklidir denir. Bu tür fonksiyonların özellikleri ayrıntılı olarak N.I. Muskhelisvili tarafından belirtilmiştir. (Bkz. Muskhelisvili ,1946 Bölüm 1).

L düzlemde

$$x = x(s),\ \ y(s)\ \ ,0 \le s \le \ell$$

ile verilmiş basit açık yada kapalı bir eğri olsun. Burada $x(s)$ ve $y(s)$ sürekli fonksiyonlar ve eğer $0 < |s_2 - s_1| < \ell,\ \ 0 \le s_1 \le \ell\ \ 0 \le s_2 \le \ell$ ise $x(s_1) + iy(s_1) \ne x(s_2) + iy(s_2)$ dir. Kapalı eğri olması durumunda ayrıca $x(s+\ell) = x(s),\ \ y(s+\ell) = y(s)$ sağlanır. Eğer $x(s)$ ve $y(s)$ fonksiyonları $[0,\ell]$ kapalı aralığında sürekli türevleri varsa L eğrisine düzgün (smooth) eğri denir. Eğer L düzgün bir eğri ise $(x(s), y(s))$ noktasındaki teğeti ile bir sabit yön vektörü arasındaki açı θ(s), $[0,\ell]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Eğer $x'(s)$ ve $y'(s)$ $[0,\ell]$ aralığında Hölder sürekli ise θ (s) de L üzerinde Hölder sürekli olur. Bu tür eğrileri Hölder sürekli düzgün eğriler diye adlandıracağız.

T bir düzlemsel bölge, tam düzleme göre bu bölgenin tümleyeni m+1 tane kesişmeyen $C_0, \cdots, C_m$ kontinumdan ibaret olsun. Burada C_0 sonsuzdaki noktayı içerir ve $C_1, \cdots, C_m$ de sınırlı kümelerdir. Bilhassa C_0 sadece sonsuzdaki noktadan ibaret olabilir, ayrıca bazı ya da tüm $C_1, \cdots, C_m$ ler de tek bir noktadan ibaret olabilir. Böyle bölgelere (m+1)-bağlantılı bölgeler denir, T bölgesi $m = 0$ ise basit bağlantılı, $m > 0$ ise çok bağlantılı olarak adlandırılacaktır.

$L_0, \cdots, L_m$ sırasıyla $C_0, \cdots, C_m$ nin sınırları olsun. Bu durumda T nin sınırı $L = L_0 + \cdots + L_m$ dir.

Eğer $L_0, \cdots, L_m$ basit düzgün eğriler ise T ye A sınıfından bir bölge, eğer $L_0, \cdots, L_m$ Hölder anlamında basit düzgün eğriler ise T ye Ah sınıfından bir bölge denir.

$x_1,\cdots,x_n$ değişkenlerinin bir $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ fonksiyonu bir $(x_1{}^0,x_2{}^0,\cdots,x_n{}^0)$ noktasında analitiktir denir eğer bu noktanın bir ρ-komşuluğu mevcut ve bu komşulukta

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1\cdots k_n}\left(x_1-x_1{}^0\right)^{k_1}\cdots\left(x_n-x_n{}^0\right)^{k_n}, \tag{2.2}$$

şartı sağlanır ise. Burada $a_{k_1\cdots k_n}$ sabittir. Bu serinin bu komşulukta mutlak ve düzgün yakınsak olduğu kolayca gösterilebilir ve

$$a_{k_1\cdots k_n}=\frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{\partial^{k_1+\cdots k_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1{}^{k_1}\cdots\partial x_n{}^{k_n}}\right)\Bigg|_{x_1=x_1{}^0,\cdots x_n=x_n{}^0},$$

dır. Yani, (2.2) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ fonksiyonunun bir Taylor serisidir. Eğer fonksiyon $\mathfrak{M}$ kümesinin her noktasında analitik ise fonksiyon bu kümede analitiktir denir.

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ fonksiyonu n boyutlu uzayın bir D bölgesinde $x_1,x_2,\cdots,x_n$ değişkenlerinin bir analitik fonksiyonu olsun. Bu taktirde $2n$ boyutlu uzayın bir D^* bölgesinde $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ olması durumunda f ile uyuşan $z_1=x_1+iy_1$, $z_n=x_n+iy_n$ kompleks değişkenlerinin bir tek $f^*(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ fonksiyonu mevcuttur. Burada aşikar olarak $D\subset D^*$ dır. $f^*(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ fonksiyonuna $x_1,x_2,\cdots,x_n$ argümanlı reel değerli bölgeden kompleks değerli bölgeye $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ fonksiyonunun analitik devamı denir.

Reel değişkenli bir analitik fonksiyonun argümanlarına kompleks değerlerin atanmasını sağlayan bu sonucun ispatını burada çıkardık. Bu kompleks argümanlar doğal olarak verilmiş fonksiyonun yapısına bağlı olarak değişen tanımlı bir bölgeye sahiptir, genellikle kompleks argümanların imajiner kısımları yeterince küçüktür. Buna rağmen eğer $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ argümanlarının tüm reel değerleri için yakınsak bir Taylor serisine açılabilir ve argümanlarına herhangi bir kompleks değer atanabilirse böyle bir fonksiyona tam fonksiyon denir.

T, düzlemde z kompleks değişkeninin bir bölgesi olsun. Reel eksene göre T nin simetriğini $\overline{T}$ ile göstereceğiz. Eğer T reel eksene göre simetrik ise aşikar olarak T ve $\overline{T}$ aynıdır.

z, T de değişken olsun. Eşleniği $\bar{z}$ şimdi $\overline{T}$ de değişkendir. Eğer $f(z)$ T de holomorf bir fonksiyon ise eşlenik fonksiyonu $\overline{f(z)}$, $\overline{T}$ de $\bar{z}$ nin holomorf fonksiyonudur.

2.2 Kanonik Formda İkinci Mertebeden Lineer Eliptik Diferensiyel Denklemler

İki bağımsız değişkenli ikinci mertebeden bir lineer eliptik diferansiyel denklem iyi bilindiği gibi her zaman

$$E(u) = \Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \tag{E}$$

kanonik forma dönüştürülebilir. Burada Δ, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplace operatörüdür. a, b, c katsayıları ve f x ve y değişkenlerinin verilmiş bir fonksiyonu, u çözüm olarak adlandırılan bilinmeyen fonksiyondur.

a, b, c katsayıları ve f fonksiyonu $z = x + iy$ düzleminin bir $\mathfrak{T}$ bölgesinde analitik olması durumunda $\mathfrak{T}$, (E) denkleminin tanım bölgesi olarak adlandırılacaktır.

Eğer $f(x,y) = 0$ ise (E) denklemine homojendir denir ve (E_0) ile gösterilir.

Ω, T de bir bölge olsun. Eğer $u(x,y)$, Ω de birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve (E) denklemini sağlarsa denklemin bu çözüme denklemin regüler çözümü denir. Eğer u(x,y) Ω de analitik ise çözüme analitik çözüm denir.

(E) denkleminin u(x,y) çözümü, a, b, c katsayıları ve f fonksiyonu genelde x, y reel argümanlarının kompleks değerli fonksiyonlarıdır. Bazı özel sonuçlar x, y reel argümanları için, a, b, c katsayıları reel değerler aldığında her zaman elde edilebilir. Bu durumda $u(x,y)$ denklemin reel çözümü olarak adlandırılacaktır.

(E) ye ilave olarak

$$E^*(v) = \Delta v - \frac{\partial a v}{\partial x} - \frac{\partial b v}{\partial y} + cv = f^*, \tag{E*}$$

denklemi ele alınır. Burada f^* bir analitik fonksiyondur. (E^*) ye (E) nin adjoint denklemi denir. Aşikar olarak (E) ve (E^*) nin tanım bölgeleri aynıdır ve bu da (E) nin (E^*) adjoint dönüştüğünün kanıtıdır.

Şimdi

$$z = x + iy,\ \zeta = x - iy, \tag{2.3}$$

değişkenlerini tanımlayalım, x ve y reel sayılar olduğunda bu sayılar birbirinin eşleniğidir. Bu durumda nadiren ζ yerine $\bar{z}$ yazılabilir. Eğer x ve y lineer bağımsız kompleks değişkenler alınırsa $z,\ \zeta$ da ayrıca lineer bağımsız kompleks değerler olacaktır. (2.3) den

$$x = \frac{1}{2}(z + \zeta),\quad y = \frac{1}{2i}(z - \zeta) \tag{2.4}$$

elde edilir.

$f(x, y)$, x ve y nin analitik fonksiyonu olsun. Eğer f analitik olarak x ve y nin kompleks değerli bölgesine devam ettirilebilirse bu taktirde x ve y için (2.4) ifadesini yazacağız ki iki kompleks değişkenin bir $F(z,\zeta)$ analitik fonksiyonu elde edilir. Aşikar olarak

$$F(z,\zeta) = f\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)$$

dır. Şimdi

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2.5}$$

diferensiyel operatörlerini düşünelim ki kolayca

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{\partial^q}{\partial \zeta^q}\right) = \frac{\partial^q}{\partial \zeta^q}\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\right),\quad p, q = 0,1,2\cdots$$

özelliklerine sahip olduğu görülür. Böylece

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \zeta^q} = \frac{1}{2^{p+q}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^q,\ \ p, q = 0,1,2\cdots$$

şeklindeki operatörleri tanımlamış oluruz. Bilhassa,

$$4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\zeta}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\Delta \tag{2.6}$$

dır. $\partial/\partial z,\ \partial/\partial\zeta$ operatörlerini herhangi bir türevlenebilir fonksiyona uygulayabiliriz. Her zaman $\partial u/\partial z,\ \partial u/\partial\zeta$ yi z ve ζ ye göre kısmi türev olarak algılamamalıyız. Bu sadece z ve ζ değişkenli u fonksiyonu analitik olduğunda geçerlidir.

(2.4), (2.5) ve (2.6) yı kullanarak (E) denklemini

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)u=F(z,\zeta), \tag{F}$$

biçiminde yazabiliriz. Burada

$$\begin{aligned}
A(z,\zeta)&=\frac{1}{4}\left\{a\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)+ib\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)\right\},\\
B(z,\zeta)&=\frac{1}{4}\left\{a\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)-ib\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)\right\},\\
C(z,\zeta)&=\frac{1}{4}c\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right),\\
F(z,\zeta)&=\frac{1}{4}f\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

dir.

(F) ye (E) denkleminin kompleks formu olarak adlandırılır. İki denklem özünde aynı olmasına rağmen farklı sembolize edilirler. E(u) her zaman *x* ve *y* değişkenlerinde (E) denkleminin sol tarafına u uygulanmış halidir ve F(u) ise z ve ζ değişkenlerinde aynı işlemi bir sabit farkıyla gösterir.

(E^*) adjoint denkleminin kompleks şekli aşikar olarak

$$F^*(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\zeta}-\frac{\partial Av}{\partial z}-\frac{\partial Bv}{\partial\zeta}+Cv=F^*(z,\zeta) \tag{F^*}$$

dır.

$\mathfrak{D}$ bölgesi T de aşağıdaki özelliğe sahip basit bağlantılı bir bölge olsun: $A(z,\zeta)$, $B(z,\zeta)$, $C(z,\zeta)$ fonksiyonları z,ζ değişkenlerinin $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ silindirik bölgesinde analitik fonksiyonlarıdır. Böyle bir bölgeyi (E) denkleminin temel bölgesi olarak adlandıracağız. Aşikâr olarak (E) için temel olan bölge (E^*) adjoint denklemi için de temel bölge olacaktır ve terside doğrudur.

Temel bölgenin her zaman mevcut olduğu kolayca görülebilir. Bir örnek olarak T bölgesinin herhangi bir noktasında herhangi bir yeterince küçük ρ-komşuluğu alınabilir. Eğer, bilhassa (E) nin a, b, c katsayıları x ve y nin tam fonksiyonları ise A, B, C fonksiyonları z, ζ değişkenlerinin bir tam fonksiyonu olacaktır ve bu durumda z-düzleminin tamamı da bir temel $\mathfrak{D}$ bölgesi olarak alınabilir.

Dikkat edilirse eğer $\mathfrak{D}$, (E) denkleminin bir temel bölgesi ise $\mathfrak{D}$ nin herhangi bir basit bağlantılı alt bölgesi de bir temel bölge olacaktır.

Şimdi

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)u=0 \qquad (F_0)$$

homojen denklemini göz önüne alalım ve bu denklemde u yu

$$u=\Lambda u' \qquad (2.8)$$

Fonksiyonu ile yer değiştirelim. Burada Λ; $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ silindirik bölgesinde z, ζ değişkenlerinin bir analitik fonksiyonu ve $\mathfrak{D}$, (E_0) denkleminin bir temel bölgesidir. Bunlara ilave olarak $\mathfrak{D}$ de $|\Lambda|>0$ varsayacağız. Şimdi u' için

$$F'(u')=\frac{\partial^2 u'}{\partial z\partial\zeta}+A'(z,\zeta)\frac{\partial u'}{\partial z}+B'(z,\zeta)\frac{\partial u'}{\partial\zeta}+C'(z,\zeta)u=0 \qquad (F_0')$$

denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A'&=A+\frac{\partial\log A}{\partial\zeta},\quad B'=B+\frac{\partial\log\Lambda}{\partial z}\\ C'&=C+A\frac{\partial\log A}{\partial z}+B\frac{\partial\log A}{\partial\zeta}+\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial z\partial\zeta}\end{aligned} \qquad (2.9)$$

dır.

Bu (2.8) değişken değiştirmesi (F_0) denkleminin formunu yeni formdaki katsayılar Λ ye bağlı olmasına rağmen etkilemez. Şimdi Λ nın keyfiliği kullanılabilir ve yeni denklemin katsayıları bazı uygun koşulları sağlayacak şekilde seçilebilir. İhtiyaca göre örneğin

$$A'B' - C' = 0 \quad . \qquad\qquad . \tag{2.10}$$

Bunun için gerekli ve yeterli şart Λ nin

$$\frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial z \partial \zeta} = A(z,\zeta)B(z,\zeta) - C(z,\zeta)$$

denkleminin bir çözümü olmasıdır. Bu ilk başta

$$\log \Lambda = \Phi(z) + \Psi(\zeta) - \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} [C(t,\tau) - A(t,\tau)B(t,\tau)] d\tau \tag{2.11}$$

yi sağlamayı verir, burada z_0, ζ_0 sırasıyla $\mathfrak{D}$ ve $\overline{\mathfrak{D}}$ bölgelerinde sabit noktalar ve $\Phi(z)$, $\Psi(\zeta)$ ise sırasıyla $\mathfrak{D}$ ve $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorf fonksiyonlardır. Eğer bu fonksiyonlar

$$\Phi'(z) = -B(z,\zeta_0), \quad \Psi'(\zeta) = -A(z,\zeta_0) \tag{2.12}$$

şeklinde seçilirse (2.11) yardımıyla (2.9) dan

$$A'(z,\zeta) = \int_{z_0}^{z} h(t,\zeta) dt, \quad B'(z,\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} k(z,\tau) d\tau \tag{2.13}$$

elde edilir. Burada

$$h(z,\zeta) = \frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z} + A(z,\zeta)B(z,\zeta) - C(z,\zeta)$$
$$h(z,\zeta) = \frac{\partial B(z,\zeta)}{\partial z} + A(z,\zeta)B(z,\zeta) - C(z,\zeta)$$

dir. h, k fonksiyonlarına (F) nin değişmezleri (invaryantları) denir ve aşikar olarak $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ silindirik bölgesinde z, ζ değişkenlerinin analitik fonksiyonlardır.

Λ fonksiyonu (2.11) den (2.12) ile birlikte sıfırdan farklı bir sabit farkıyla belirlenebilir. Bu yüzden Λ

$$\Lambda = \Lambda(z,\zeta,z_0,\zeta_0) = \exp\left\{ -\int_{z_0}^{z} B(t,\zeta_0) dt - \int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z_0,\tau) d\tau + \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} [A(t,\tau)B(t,\tau) - C(t,\tau)] d\tau \right\}, \tag{2.15}$$

olarak alınabilir. Aşikar olarak $\Lambda(z,\zeta,z_0,\zeta_0)$, $z,\, z_0 \in \mathfrak{D}$, $\zeta,\ \zeta_0 \in \overline{\mathfrak{D}}$ silindirik bölgesinde z,ζ,z_0,ζ_0 değişkenlerinin bir analitik bir fonksiyondur.

Yukarıda verilenlerden aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

Eğer Λ ile (2.15) verilmişse (F_0) denklemi (2.8) değişken değişimi ile

$$F'(u') = \frac{\partial^2 u'}{\partial z \partial \zeta} + A'(z,\zeta)\frac{\partial u'}{\partial z} + B'(z,\zeta)\frac{\partial u'}{\partial \zeta} + A'(z,\zeta)B'(z,\zeta)u' = 0,$$

formuna indirgenir ve

$$A'(z_0,\zeta) = 0, \quad B'(z,\zeta_0) = 0, \tag{2.16}$$

şartlarını sağlar. Burada $A',\ B'$ (2.13) ile verilmiştir.

(F_0) şeklindeki bir denklem incelendiğinde katsayıların her zaman (2.10) ve (2.16) koşullarını sağlaması gereklidir durumuna kendimizi ne zaman sınırlamamız gerekir? İlerde (F_o) nin (z_0,ζ_0) noktasında, (2.10) ve (2.16) koşullarını sağladığı takdirde birinci normal forma indirgenebileceği söylenecektir.

Kolayca

$$\Lambda^* = \Lambda(z_0,\zeta_0,z,\zeta)$$

nın (F_o^*) adjoint denkleminin birinci normal formu olduğu gösterilebilir.

Son olarak (F_o) Λ fonksiyonunun uygun bir seçimi ile ve (2.8) formülünün kullanarak aşağıdaki formlardan herhangi birine indirgenebilir

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z \partial \zeta} + \left\{ \int_{\zeta_0}^{\zeta} [k(z,\tau) - h(z,\tau)]d\tau \right\} \frac{\partial u'}{\partial \zeta} - h(z,\zeta)u' = 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z \partial \zeta} + \left\{ \int_{z_0}^{z} [h(t,\zeta) - k(t,\zeta)]d\tau \right\} \frac{\partial u'}{\partial z} - k'(z,\zeta)u' = 0 \tag{2.18}$$

(Darboux , 1915 sayfa 23-27). Bilhassa $h = k$ olduğunda

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z \partial \zeta} - h(z,\zeta)u' = 0 \tag{2.19}$$

dır. (2.17) ve (2.18) ifadeleri sırasıyla (F_o) denkleminin ikinci ve üçüncü normal formu ve (2.19) ye eşit invaryantlara sahip olması halinde (F_o) denklemi için basit normal formudur denir.

3. KOMPLEKS BÖLGEDE VOLTERRA TİPİNDEKİ İNTEGRAL DENKLEMLER

Bu bölümde, birinci kısmında Volterra tipindeki integral denklemlerin çözümleri için ardışık yaklaşmalar metodu verilecektir. İkinci kısımda (E_0) denkleminin Riemann fonksiyonu Volterra tipi bir integral denklem çözülerek bulunacaktır. Üçüncü kısımda özel örneklere yer verildikten sonra (E_0) denkleminin Analitik Çözümlerine, Goursat Probleminin çözümüne değinilecektir.

3.1 Ardışık Yaklaşmalar Metodu

(E) denkleminin çözümlerinin yapısal özellikleri araştırıldığında

$$
\begin{aligned}
w(z,\zeta)-\int_{z_0}^{z} K_1(z,\zeta,\xi)w(\xi,\zeta)d\xi-\int_{\zeta_0}^{\zeta} K_2(\zeta,z,\eta)w(z,\eta)d\eta \\
-\int_{z_0}^{z} d\xi \int_{\zeta_0}^{\zeta} K(z,\zeta,\xi,\eta)d\eta = F(z,\zeta),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

integral denklemi çok önemli bir rol oynayacaktır, burada $K_1,\, K_2,\, K,\, F$ $z,\xi \in T,\ \zeta,\eta \in T^*$ bölgesinde argümanları verilmiş analitik fonksiyonlarıdır ve *T*, *T** kompleks düzlemde basit bağlantılı bölgedir, $z_0,\ \zeta_0$ sırasıyla *T* ve T^* de sabit noktalardır. Her zaman için (T,T^*) silindirik bölgesinde analitik olan, z ve ζ kompleks değişkenlerinin bir tek analitik w(z, ζ) fonksiyonu (3.1) in çözümü olacak şekilde mevcut olacağı gösterilecektir. Bu durum ardışık yaklaşmalar metodu ile ispatlanabilir. Fakat bu metod (Myunts, 1934 ,§28) örneğinde görüldüğü gibi çok uzundur. Bu yüzden (3.1) in çözümü için amaca uygun basit, farklı bir metod verilecektir.

İlk başta denklem

$$
w_1(z,\zeta)-\int_{z_0}^{z} K_1(z,\zeta,\xi)w_1(\xi,\zeta)d\xi = F(z,\zeta),
$$

özel şekliyle düşünülsün. Burada ζ parametre rolünü oynar, $\zeta \in T^*$. Ardışık yaklaşmalar metodu ile kolayca bu denklemin

$$w_1(z,\zeta)=F(z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}\Gamma_1(z,\zeta,\xi)F(\xi,\zeta)d\xi \qquad (3.2)$$

ile verilen bir çözüme sahip olduğu kolayca gösterilebilir. Burada

$$\Gamma_1(z,\zeta,\xi)=K_1^{(1)}(z,\zeta,\xi)+K_1^{(2)}(z,\zeta,\xi)+\cdots \qquad (3.3)$$

ve $K_1^{(1)}$, $K_1^{(2)}$,…sırasıyla

$$K_1^{(1)}=K_1,\ K_1^{(n)}(z,\zeta,\xi)=\int_{\xi}^{z}K_1(z,\zeta,t)K_1^{(n-1)}(t,\zeta,\xi)dt,\ n=2,3\cdots$$

ardışık çekirdekleridir. (3.3) serisinin $z,\ \xi\in T$ ve $\zeta\in T^*$ silindirik bölgesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu kolayca gösterilebilir. Buradan $\Gamma_1(z,\zeta,\xi)$ toplamı bu bölgede $z,\ \zeta,\ \xi$ nin bir analitik fonksiyonudur. (3.2) ile verilen $w_1(z,\zeta)$ fonksiyonu aşikâr olarak (T,T^*) bölgesinde analitiktir.

Benzer şekilde

$$w_2(z,\zeta)-\int_{\zeta_0}^{\zeta}K_2(z,\zeta,\xi)w_2(\xi,\zeta)d\xi=F(z,\zeta),$$

denkleminin de

$$w_2(z,\zeta)=F(z,\zeta)+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma_2(z,\zeta,\xi)F(\xi,\zeta)d\xi$$

ile verilmiş bir çözüme sahip olduğu kolayca gösterilebilir. Burada

$$\Gamma_2(\zeta,z,\eta)=K_2^{(1)}(\zeta,z,\eta)+K_2^{(2)}(\zeta,z,\eta)+\cdots \qquad (3.4)$$

ve $K_2^{(1)}$, $K_2^{(2)}$,…sırasıyla

$$K_2^{(1)}=K_2,\ K_2^{(n)}(\zeta,z,\eta)=\int_{\eta}^{\zeta}K_2(\zeta,z,\tau)K_2^{(n-1)}(\tau,z,\eta)d\tau,\ (n=2,3\cdots)$$

dır.

(3.4) serisi $z\in T$ ve $\zeta,\eta\in T^*$ silindirik bölgesinde mutlak ve düzgün yakınsaktır, dolayısıyla $\Gamma_2(\zeta,z,\eta)$ toplamı bu bölgede argümanlarının analitik fonksiyonudur. $w_2(z\ \zeta)$ fonksiyonu da aşikar olarak (T,T^*)de analitiktir.

Kolayca Γ_1, Γ_2 nin aşağıdaki bağıntıları sağladığı gösterilebilir:

$$\Gamma_1(z,\zeta,\xi)=K_1(z,\zeta,\xi)+\int_{\xi}^{z}K_1(z,\zeta,t)\Gamma_1(t,\zeta,\xi)dt$$
$$=K_1(z,\zeta,\xi)+\int_{\xi}^{z}K_1(z,\zeta,t)K_1(t,\zeta,\xi)dt \tag{3.5}$$

$$\Gamma_1(\zeta,z,\eta)=K_2(\zeta,z,\eta)+\int_{\tau}^{\zeta}K_1(\zeta,z,\tau)\Gamma_2(\tau,z,\eta)\,dt$$
$$=K_1(z,\zeta,\xi)+\int_{\eta}^{\zeta}K_1(\zeta,z,\tau)K_1(\tau,z,\eta)\,dt. \tag{3.6}$$

Şimdi (3.1) in çözümünü

$$w(z,\zeta)=w_0(z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}\Gamma_1(z,\zeta,\xi)w_0(\xi,\zeta)d\xi+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma_2(\zeta,z,\eta)w_0(z,\eta)d\eta \tag{3.7}$$

şeklinde arayalım. Burada $w_0(z,\zeta)$, (T,T^*) de yeni bilinmeyen analitik fonksiyondur. (3.7) yi (3.1) de yerine yazıp (3.5) ve (3.6) yı kullanırsak

$$w_0(z,\zeta)-\int_{z_0}^{z}d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta}K_0(z,\zeta,\xi,\eta)w_0(\xi,\eta)d\eta=F(z,\zeta) \tag{3.8}$$

elde edilir. Burada

$$K_0(z,\zeta,\xi,\eta)=K_1(z,\zeta,\xi)\Gamma_2(\zeta,\xi,\eta)+K_2(\zeta,z,\eta)\Gamma_1(z,\eta,\xi)+K(z,\zeta,\xi,\eta)$$
$$+\int_{\xi}^{z}K(z,\zeta,\xi_1,\eta)\Gamma_1(\xi_1,\eta,\xi)d\xi_1+\int_{\eta}^{\zeta}K(z,\zeta,\xi,\eta_1)\Gamma_2(\eta_1,\xi,\eta)d\eta_1$$

dır. Aşikar olarak $K_0(z,\zeta,\xi,\eta)$, $\xi\in T$ ve $\zeta,\ \eta\ \in T^*$ bölgesinde bir analitik fonksiyondur. (3.8) e ardışık yaklaşım metodu uygulanırsa

$$w_0(z,\zeta)=F(z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta}K_0(z,\zeta,\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\eta \tag{3.9}$$

ile verilmiş bir çözüme sahip olduğu görülür. Burada

$$\Gamma_0(z,\zeta,\xi,\eta)=K_0^{(1)}(z,\zeta,\xi,\eta)+K_0^{(2)}(z,\zeta,\xi,\eta)+\cdots \tag{3.10}$$

ve

$$K_0^{(1)}=K_0,\ K_0^{(n)}=\int_{\xi}^{z}dt\int_{\eta}^{\zeta}K_0(z,\zeta,t,\tau)K_0^{(n-1)}(t,\tau,\xi,\eta)d\tau,\ n=2,3\cdots$$

dır.

(3.10) serisinin $z,\ \xi\in T$ ve $\zeta,\ \eta\ \in T^*$ bölgesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu kolaylıkla gösterilebilir; buradan $\Gamma_0(z,\ \zeta,\ \xi,\ \eta)$ toplamı bu bölgede bir analitik fonksiyondur. (3.9) ile verilen $w_0(z,\zeta)$ fonksiyonu açık olarak (T,T^*) bölgesinde analitiktir.

Şimdi (3.9) u (3.7) de yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
w(z,\zeta) = F(z,\zeta) + \int_{z_0}^{z} \Gamma_1(z,\zeta,\xi)F(\xi,\zeta) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Gamma_2(\zeta,z,\eta)F(z,\eta)d\eta \\
+ \int_{z_0}^{z} d\xi \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Gamma(z,\zeta,\xi,\eta)F(\xi,\eta)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

elde ederiz. Burada

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z,\zeta,\xi,\eta) = \Gamma_0(z,\zeta,\xi,\eta) + \int_{\xi}^{z} \Gamma_1(z,\zeta,\xi_1)\Gamma_0(\xi_1,\zeta,\xi,\eta) \\
+ \int_{\eta}^{\zeta} \Gamma_2(\zeta,z,\eta_1)\Gamma_0(z,\eta_1,\xi,\eta)d\eta_1
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

dır.

Aşikar olarak $w(z,\zeta)$ fonksiyonu (T,T^*) bölgesinde $z,\ \zeta$ değişkenlerinin analitik fonksiyonudur ve (3.1) denklemini sağlar. Geriye elde edilen çözümün tek olduğunu gösterebilmek kaldı. Bunun için

$$
\begin{aligned}
w(z,\zeta) - \int_{z_0}^{z} K_1(z,\zeta,\xi)w(\xi,\zeta)d\xi - \int_{\zeta_0}^{\zeta} K_2(\zeta,z,\eta)w(z,\eta)d\eta \\
- \int_{z_0}^{z} d\xi \int_{\zeta_0}^{\zeta} K(z,\zeta,\xi,\eta)w(\xi,\eta)d\eta = 0
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

homojen denkleminin aşikar çözüme sahip olduğunu göstermeliyiz. Fakat bu, (3.13) çözümünün tüm mertebeden türevlerinin (z_0,ζ_0) noktasında sıfır olduğu gerçeğinden görülür. Bu, kısım başında belirtilen durumun ispatını tamamlar.

Yukarıda tanımlanan teori

$$
\begin{aligned}
w_i(z,\zeta) - \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{z_0}^{z} K^{ik}{}_1(z,\zeta,\xi) w_k(\xi,\zeta) d\xi - \int_{\zeta_0}^{\zeta} K^{ik}{}_2(\zeta,z,\eta) w_k(z,\eta) d\eta \right. \\
\left. - \int_{z_0}^{z} d\xi \int_{\zeta_0}^{\zeta} K^{ik}(z,\zeta,\xi,\eta) w_k(\xi,\eta) d\eta \right\} = F_i(z,\zeta),\ i = 1,2,\cdots,n
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Şeklindeki integral denklem sistemlerine de genişletilebilir. Burada K_1^{ik}, K_2^{ik}, K^{ik},F_i fonksiyonları $z,\xi \in T$ ve $\zeta,\eta \in T^*$ bölgesinde argümanlarına göre verilmiş analitik fonksiyonlar, $w_1(z,\zeta),\ldots,w_n(z,\zeta)$ ise (T,T^*) bölgesinde bilinmeyen analitik fonksiyonlardır.

Matris gösterimi kullanarak (3.14) sistemi

$$
\begin{aligned}
W(z,\zeta)-\int_{z_0}^{z}K_1(z,\zeta,\xi)W(\xi,\zeta)d\xi-\int_{\zeta_0}^{\zeta}K_2(\zeta,z,\eta)W(z,\eta)d\eta \\
-\int_{z_0}^{z}d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta}K(z,\zeta,\xi,\eta)W(\xi,\eta)d\eta=F(z,\zeta)
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

biçiminde yazılabilir. (Bkz. Muskhelishvili 1946, VI. Bölüm). Burada K_1, K_2, K bileşenleri K_1^{ik}, K_2^{ik}, K^{ik} $(i,k=1,2,\ldots,n)$ olan matrisler ve W ve F bileşenleri sırasıyla w_i, F_i $(i=1,\ldots,n)$ olan vektörlerdir.

(3.1) ve (3.15) denklemleri aynı şekle sahip olduğundan (3.1) için geliştirdiğimiz son metodu kullanmamıza imkan sağlar. Bu şekilde, kolay bir şekilde (3.15) nin ya da (3.14) sisteminin

$$
\begin{aligned}
W(z,\zeta)=F(z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}\Gamma_1(z,\zeta,\xi)F(\xi,\zeta)d\xi-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma_2(\zeta,z,\eta)F(z,\eta)d\eta \\
+\int_{z_0}^{z}d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma(z,\zeta,\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\eta
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

ile verilmiş bir çözümünün olduğu gösterilebilir. Burada Γ_1, Γ_2, Γ matrislerdir ve onların bileşenleri sırasıyla $\Gamma_1^{ik}(z,\zeta,\xi)$, $\Gamma_2^{ik}(z,\zeta,\xi)$, $\Gamma^{ik}(z,\zeta,\xi)$ $z,\xi\in T$ ve $\zeta,\eta\in T^*$ bölgesinde argümanlarının analitik fonksiyonlarıdır. Eğer (3.16) vektör denkleminin yerine gelen skaler denklemi yazarsak

$$
\begin{aligned}
w_i(z,\zeta)=F_i(z,\zeta)+\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{z_0}^{z}\Gamma_1^{ik}(z,\zeta,\xi)F_k(\xi,\zeta)d\xi-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma_2^{ik}(\zeta,z,\eta)F_k(z,\eta)d\eta\right. \\
\left.+\int_{z_0}^{z}d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma^{ik}(z,\zeta,\xi,\eta)F_k(\xi,\eta)d\eta\right\},\ i=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

elde edilir.

Not: (3.16) de F yi elemanları (T,T^*) da z, ζ nın analitik fonksiyonu olan herhangi bir matrisle yer değiştirilebilir. Aşikar olarak $W_{,}$ (3.15) matris denklemini sağlayan bir matris olacaktır.

3.2 (E_0) denkleminin Riemann fonksiyonu

Bu kısımda,

$$E(u) = \Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0 \qquad (E_0)$$

homojen denklemi ele alınacaktır- ki bu denklem

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} + C(z,\zeta)u = 0 \qquad (F_0)$$

olarakta yazılabilir. Burada $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$ ve A,B,C (2.7) ile verilmişlerdir.

$\mathfrak{D}$, (F_0) denkleminin bir temel bölgesi olsun. Şimdi $V(z,\zeta)$ fonksiyonunun, $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ bölgesinde analitik,

$$F^*(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} - \frac{\partial AV}{\partial z} - \frac{\partial BV}{\partial \zeta} + CV = 0 \qquad (F_0^*)$$

denkleminin ve

$$V\big|_{z=t} = \exp\int_\tau^\zeta A(t,\eta)\,d\eta, \quad V\big|_{\zeta=\tau} = \exp\int_t^z B(\xi,\tau)\,d\xi \qquad (3.18)$$

koşullarının sağlandığını düşünelim, burada t ve τ sırasıyla $\mathfrak{D}$ ve $\overline{\mathfrak{D}}$ de sabit noktalardır. Aşağıda varlığı ispatlanacak olan V fonksiyonuna (E_0) denkleminin Riemann fonksiyonu denir.

(F_0^*)

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta}\Bigg[V(z,\zeta) - \int_\tau^\zeta A(z,\eta)V(z,\eta)d\eta - \int_t^z B(\xi,\zeta)V(\xi,\zeta)d\xi$$
$$+ \int_t^z d\xi \int_\tau^\zeta C(\xi,\eta)V(\xi,\eta)d\eta\Bigg] = 0$$

şeklinde yazılabilir. Köşeli parantez içindeki ifade $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de z, ζ değişkenlerinin analitik fonksiyonu olduğundan,

$$V(z,\zeta)-\int_{\tau}^{\zeta}A(z,\eta)V(z,\eta)d\eta-\int_{t}^{z}B(\xi,\zeta)V(\xi,\zeta)d\xi$$
$$+\int_{t}^{z}d\xi\int_{\tau}^{\zeta}C(\xi,\eta)V(\xi,\eta)d\eta=\Phi(z)+\Psi(\zeta)$$

dır. Burada Φ(z), Ψ(ζ) fonksiyonları sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorftur. Eğer (3.18) şartlarını göz önüne alırsak Φ(z)+ Ψ(ζ)=1 olduğu sonucuna varılır. Buradan *V* aşağıdaki integral denklemini

$$V(z,\zeta)-\int_{\tau}^{\zeta}A(z,\eta)V(z,\eta)d\eta-\int_{t}^{z}B(\xi,\zeta)V(\xi,\zeta)d\xi$$
$$\int_{t}^{z}d\xi\int_{\tau}^{\zeta}C(\xi,\eta)V(\xi,\eta)d\eta=1 \tag{3.19}$$

sağlar.

Bu, bir önceki kısımda tartışılmış (3.1) integral denkleminin özel bir formudur. Böylece (3.19) tek bir çözüme sahiptir ki, $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de *z, ζ* nin analitik fonksiyonudur. Bu fonksiyonun (F_0^*) denklemini ve (3.18) şartlarını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Böylece Riemann fonksiyonunun varlığı ve tekliği ispatlanmıştır

Riemann fonksiyonu *V(z,ζ)* aşikar olarak *t* ve *τ* ya da bağlıdır. İlk başta (3.19) integral denkleminden *V* nin *z, t*∈$\mathfrak{D}$, ζ, τ∈ $\overline{\mathfrak{D}}$ silindirik bölgesinde *z, ζ, t, τ* değişkenlerinin analitik bir fonksiyonudur. Bundan sonra *V* fonksiyonu *G(z,ζ,t,τ)* ile gösterilecektir.

Riemann fonksiyonu *G(z,ζ,t,τ)* nın bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

Her şeyden önce, (3.18) şartlarından,

$$G(t,\zeta,t,\tau)=\exp\int_{\tau}^{\zeta}A(t,\eta)d\eta,\ t\in\mathfrak{D},\zeta,\tau\in\overline{\mathfrak{D}}$$
$$G(z,\tau,t,\tau)=\exp\int_{t}^{z}B(\xi,\tau)d\xi,\ z,t\in\mathfrak{D},\tau\in\overline{\mathfrak{D}} \tag{3.20}$$

dır. Bu şartlar

$$z=t\in\mathfrak{D},\zeta,\ \tau\in\overline{\mathfrak{D}}\ \text{için}\ \frac{\partial G}{\partial\zeta}-A(t,\zeta)G=0,$$
$$\zeta=\tau\in\overline{\mathfrak{D}},\ z,\ t\in\mathfrak{D}\ \text{için}\ \frac{\partial G}{\partial z}-B(z,\tau)G=0, \tag{3.21}$$
$$t\in\mathfrak{D},\ \tau\in\overline{\mathfrak{D}}\ \text{için}\ G(t,\tau,t,\tau)=1,$$

şartlarına eşdeğerdir. Ayrıca (3.20) den

$$
\begin{aligned}
&z = t \in \mathfrak{D}, \zeta,\ \tau \in \overline{\mathfrak{D}} \ \ i\text{ç}in \ \ \frac{\partial G}{\partial \tau} - A(z,\tau)G = 0, \\
&\zeta = \tau \in \overline{\mathfrak{D}},\ z,\ t \in \mathfrak{D} \ i\text{ç}in \ \ \frac{\partial G}{\partial t} - B(t,\zeta)G = 0, \\
&z \in \mathfrak{D},\ \ \zeta \in \overline{\mathfrak{D}} \ \ i\text{ç}in \ \ G(z,\zeta,z,\zeta) = 1,
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

elde edilir. Aşikar olarak (3.22) şartları (3.20) ile eşdeğerdir.

$U(z,\zeta)$, $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de z,ζ nın bir analitik fonksiyonu olsun.

$$
\frac{\partial^2 UG}{\partial z \partial \zeta} - GF(U) = \frac{\partial}{\partial z}\left[U\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta} - AG\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[U\left(\frac{\partial G}{\partial z} - BG\right)\right] \tag{3.23}
$$

özdeşliği eldedir, burada $G = G(z,\zeta,t,\tau)$, $U = U(z,\zeta)$ dır. Bunu ispatlanması için $G(z,\zeta,t,\tau)$ ın z,ζ argümanlarına göre ($F_0^{\ *}$) denkleminin sağlandığı akılda tutulmalıdır.

(3.23) de sırasıyla $z,\ t$ yi ζ,τ ile değiştirilsin ve t,τ ya göre sırasıyla $z_0,\ z$ ve $\zeta_0,\ \zeta$ sınırları ile integrali alındığında, (3.21) şartının kullanılması ile

$$
\begin{aligned}
U(z,\zeta) = {} & U(z_0,\zeta_0)G(z_0,\zeta_0,z,\zeta) \\
& + \int_{z_0}^{z} G(t,\zeta_0,z,\zeta)\left[\frac{\partial U(t,\zeta_0)}{\partial t} + B(t,\zeta_0)U(t,\zeta_0)\right]dt \\
& + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z_0,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial U(z_0,\tau)}{\partial \tau} + A(z_0,\tau)U(z_0,\tau)\right]d\tau \\
& + \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(t,\tau,z,\zeta)F[U(t,\tau)]d\tau
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

elde edilir. Burada $z_0 \in \mathfrak{D},\ \zeta_o \in \overline{\mathfrak{D}}$ sabit noktalardır. Bu özdeşlik herhangi bir $U(z,\zeta)$ fonksiyonu için geçerlidir ve $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de analitiktir. Burada $\mathfrak{D}$, (E_0) denkleminin bir temel bölgesidir.

Varsayalım ki, özellikle $U(z,\zeta) = G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)$ olsun. (3.22) şartını kullanarak (3.24) den

$$
\int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(t,\tau,z,\zeta)F[G(z_0,\zeta_0,t,\tau)]d\tau = 0
$$

elde edilir. Bu $F[G(z_0,\zeta_0,t,\tau)]=0$ olmasından yani, $G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)$ nın son iki argüman z,ζ ya göre $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ bölgesinde (F_0) denkleminin bir çözümü olmasındandır. (3.22) şartlarını göz önüne alırsak, $G(z,\zeta,t,\tau)$ nın son iki argümanı t,τ ya göre (F_0^*) adjoint denkleminin Riemann fonksiyonu olduğu sonucuna kolay bir şekilde varılır.

$G(t,\tau,z,\zeta)$ fonksiyonunun belirtilen özelliklerini kullanarak

$$U_0(z,\zeta)=\int_{z_0}^{z}dt\int_{\zeta_0}^{\zeta}G(t,\tau,z,\zeta)F(t,\tau)d\tau \tag{3.25}$$

ifadesi kolayca gösterilebilir. Burada F, $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de argümanlarının

$$F(U)=\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)U=F(z,\zeta) \tag{F}$$

denklemini sağlayan herhangi bir analitik fonksiyonudur, yani (3.25) bu denklemin özel bir çözümünü verir.

3.3 Bazı Özel Örnekler

(E_0) denkleminin bazı özel halleri ele alınacaktır bu özel hallerde Riemann fonksiyonu G, basit olarak bazı özel fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir.

Aşikar bir örnek

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y^2}=0$$

Laplace denklemidir ki Riemann fonksiyonu G = 1 dir, bu durumda $A=B=C=0$ ve (3.19) integral denklemi $V=G=1$ e yol açar.

Şimdi de

$$\Delta u+\lambda^2 u=0 \tag{3.26}$$

denklemi ele alınsın. Burada λ genelde bir kompleks sabittir. Bu denkleme matematik fiziğin birçok dalında (elastik teori, elektromanyetik teori vs.) karşılaşılır. Bazen metaharmonik denklem ya da Kirchoff denklemi olarak adlandırılır. λ ya metaharmonik fonksiyonun parametresi denir (Bkz. I.N.Vekua 1937, 1942, 1943, 1945a, 1945b, 1946b).

(3.26) denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} + \frac{1}{4}\lambda^2 u = 0$$

olarak da yazılabilir. Burada $z = x + iy,\ \zeta = x - iy$ dır. $A = B = 0,\ C = \frac{1}{4}\lambda^2$ olduğundan burada Riemann fonksiyonu için (3.19) integral denklemi

$$V(z,\zeta) + \frac{\lambda^2}{4}\int_t^z d\xi \int_\tau^\zeta V(\xi,\eta)d\eta = 1$$

dir. Bu denklem ardışık yaklaşmalar metodu ile çözülürse

$$V = G(z,\zeta,t,\tau) = J_0\left[\lambda\sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)}\right]$$

elde edilir. Burada J_0 sıfırıncı mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonudur. G aşikar olarak $z, \zeta,\ t,\ \tau$ değişkenlerinin bir tam fonksiyonudur.

Şimdi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} + \frac{a_0}{y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

denklemi ele alınsın burada a_0, b_0 sabitlerdir. $z = x + iy,\ \zeta = x - iy$ kompleks değişkenleri ile denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} - \frac{\beta'}{z-\zeta}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\beta}{z-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0 \qquad (3.27)$$

olarak yazılabilir, burada

$$\beta = \frac{b_0 + ia_0}{2},\quad \beta' = \frac{b_0 - ia_0}{2}$$

dır. (3.27), Euler denklemi olarak bilinir ve temel $\mathfrak{D}$ bölgesi üst yarı düzlem ($\operatorname{Im} z > 0$) ya da alt yarı düzlem ($\operatorname{Im} z < 0$) alınabilir. (3.27) denklemi için Riemann fonksiyonu

$$G(z,\zeta,t,\tau) = (\tau - z)^{-\beta'}(\zeta - t)^{-\beta}(\zeta - z)^{\beta'+\beta} F\left(\beta', \beta, 1, \frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z-\tau)(\zeta-t)}\right)$$

dır. Burada $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ hipergeometrik fonksiyondur. Bu formülün (3.19) integral denklemi yardımıyla türevi beklenmedik sonuçlara yol açtığından çok uygun değildir. Daha uygun bir yaklaşım için Gorn1936 kitabının sayfa 138 e bakılabilir.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+n(n+1)u=0$$

denklemini ele alalım. Burada n, sabit; $0\le\theta\le\pi$ $0\le\varphi\le 2\pi$ olacak şekilde φ, θ bir noktanın küresel polar koordinatlarıdır. Bu denklem matematiksel fizikte sık sık kullanılır, birinci ve ikinci tür Legendre fonksiyonları bununla yakından ilgilidir. (Bkz. I.N. Vekua [1945b], [1946a]). Bu denklemde

$$x=\tan\frac{1}{2}\theta\cos\varphi \qquad y=\tan\frac{1}{2}\theta\sin\varphi$$

değişken değiştirmesi yapılacak olursa

$$\Delta u+\frac{4n(n+1)}{(1+x^2+y^2)^2}u=0$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem kompleks formda yazılacak olursa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\zeta}+\frac{n(n+1)}{(1+z\zeta)^2}u=0$$

elde edilir, burada z=x+iy, ζ=x-iy dir.

Bu denklemin Riemann fonksiyonu (3.19) integral denklemi kullanılarak elde edilebilir fakat çok işlem gerektirdiğinden sadece Riemann fonksiyonu

$$G(t,\tau,z,\zeta)=P_n\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right)$$

ile yetinilecektir.

3.4 (E_0) Denkleminin Analitik Çözümleri. Goursat Probleminin Çözümü

$U(z,\zeta),(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ da

$$F(U)=\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)U=0 \qquad (F_0)$$

denklemini sağlayan z,ζ nın bir analitik fonksiyonu olsun. (3.24) özdeşliğinden

$$U(z,\zeta)=\alpha_0 G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}\Phi(t)G(t,\zeta_0,z,\zeta)dt+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(t)G(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau \qquad (3.28)$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = U(z_0, \zeta_0), \\
&\Phi(z) = \frac{\partial U(z, \zeta_0)}{\partial z} + B(z, \zeta_0) U(z, \zeta_0), \\
&\Phi^*(z) = \frac{\partial U(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} + B(z_0, \zeta) U(z_0, \zeta)
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

dır. Aşikar olarak $\Phi(z)$, $\Phi^*(z)$ fonksiyonları sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorfturlar.

(3.28) formülünden $\Phi(z)$, $\Phi^*(z)$ fonksiyonları sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de keyfi holomorf fonksiyonlardır ve $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ de (F_0)'ın tüm analitik çözümlerini verir. Burada α_0 keyfi bir sabittir.

Eğer (3.28) de $z = x + iy,\ \zeta = x - iy$ yazılırsa $\mathfrak{D}$ de

$$
E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0 \tag{E_0}
$$

denklemini sağlayan bir analitik $u(x, y)$ fonksiyonu elde edilir. Burada (x, y) $\mathfrak{D}$ bölgesinin bir noktasıdır.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.4.1. $\mathfrak{D}$, (E_0) denkleminin bir temel bölgesi olsun. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
u(z, \zeta) = {} & \alpha_0 G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt \\
& + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(t) G(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau, \qquad (z = x + iy,\ \zeta = x - iy,\ (x, y) \in D)
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

formülü $\mathfrak{D}$ de (E_0)'ın analitik çözümlerini verir. Burada α_0 keyfi bir sabit ve $\Phi(z)$, $\Phi^*(z)$ fonksiyonları sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de keyfi holomorf fonksiyonlardır.

Dikkat edilirse z_0, ζ_0 sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de keyfi sabit noktalar olduğunda aşikar olarak $\zeta_0 = \bar{z}_0$ dır.

(3.30) formülü o halde $\mathfrak{T}$ de (E_0)'ın sonsuz sayıda analitik çözümünü verir. Aşağıda bu formülün $\mathfrak{D}$ de regüler, denklemin tam sınıftan çözümleri tükettiği gösterilecektir.

Aşağıdaki gösterimleri tanımlayalım

$$
\Pi_{\zeta_0} = \wp(z \in \mathfrak{D},\ \zeta = \zeta_o), \quad \Pi^*{}_{z_0} = \wp(z = z_0,\ \zeta \in \overline{\mathfrak{D}}).
$$

Burada $\wp$ sembolü küme kelimesi ile yer değişecektir. Aşikar olarak Π_{ζ_0}, $\Pi^*{}_{z_0}$ iki boyutlu bölgelerdir ki (F_0) denkleminin karakteristikleri olarak adlandırılacaklardır.

(3.29) ve (3.28) formülleri (F_0) denkleminin $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de analitik tüm $U(z,\zeta)$ çözümlerini gösterir ki Π_{ζ_0}, $\Pi^*{}_{z_0}$ karakteristikleri üzerinde $U(z,\zeta)$ değerinin terimlerinde tek olarak ifade edilebilir. Bilhassa eğer U, Π_{ζ_0} ve $\Pi^*{}_{z_0}$ üzerinde sıfır ise $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de her yerde sıfırdır.

Şimdi aşağıdaki (Goursat) problemini çözebiliriz:

(F_0) denkleminin $U(z,\zeta)$ çözümünü $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de analitik, Π_{ζ_0} ve $\Pi^*{}_{z_0}$ karakteristikleri üzerinde önceden verilen

$$U(z,\zeta_0)=\varphi(z),\; U(z_0,\zeta)=\varphi^*(\zeta)$$

değerlerini alacak şekilde bulunmalıdır. Burada $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ fonksiyonları sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de

$$\varphi(z_0)=\varphi^*(\zeta_0)$$

şartını sağlayan holomorf fonksiyonlardır.

Bu problemin çözümünün

$$U(z,\zeta)=\varphi(z_0)G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}G(t,\zeta_0,z,\zeta)[\varphi'(t)+B(t,\zeta_0)\varphi(t)]dt$$

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta}G(z_0,\tau,z,\zeta)\left[\varphi^{*'}(\tau)+A(z_0,\tau)\varphi^*(\tau)\right]d\tau$$

ile verilebileceği kolayca görülebilir. Çözümün tekliği daha önceden zaten ispatlanmıştı.

(3.28) den (F_0) denkleminin çözümlerini veren yeni bir formül türetilebilir.

Aşağıdaki fonksiyonlar

$$\Phi_0(z)=\frac{\alpha_0}{2}+\int_{z_0}^{z}\Phi(t)dt,\; \Phi_0^*(\zeta)=\frac{\alpha_0}{2}+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)d\tau \qquad (3.31)$$

göz önüne alınsın. Aşikar olarak, $\Phi_0(z)$, $\Phi^*{}_0(\zeta)$ sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de

$$\Phi_0(z_0)=\Phi_0^*(\zeta_0) \qquad (3.32)$$

şartını sağlayan holomorf fonksiyonlardır.

(3.31) kullanılarak ve kısmi integrasyon ile (3.28)

$$U(z,\zeta)=G(z,\zeta_0,z,\zeta)\Phi(z)-\int_{z_0}^{z}\Phi_0(t)\frac{\partial G(t,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial t}dt$$
$$+G(z_0,\zeta,z,\zeta)\Phi_0^{*}(\zeta)-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^{*}{}_0(\tau)\frac{\partial G(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial \tau}d\tau \qquad (3.33)$$

olarak yazılabiliri. $\Phi_0(z)$, $\Phi^{*}{}_0(\zeta)$ burada $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ da herhangi bir holomorf fonksiyonla yer değiştirirse $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ da (F_0)'ın analitik çözümleri elde edilir. Dikkat edilirse $\Phi_0(z)$, $\Phi^{*}{}_0(\zeta)$ eğer (3.32) geçerli ise $U(z,\zeta)$ ile tek olarak belirlenebilirler. Eğer bu şartlar $\Phi_0(z)$, $\Phi^{*}{}_0(\zeta)$ fonksiyonları için geçerli değilse, C_0 ve $-C_0$ ilave sabitlerine kadar belirlenebilir.

Şimdi ,

$$\varphi(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}\Phi_0(t)dt,\ \ \varphi^{*}(\zeta)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{(\zeta-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}\Phi^{*}(\tau)d\tau$$

Fonksiyonları ele alınsın; burada n ve m keyfi pozitif tamsayılardır. Aşikar olarak $\varphi(z)$, $\varphi^{*}(\zeta)$ sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de

$$\begin{aligned}&\varphi(z_0)=\varphi'(z_0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(z_0)=0,\\&\varphi^{*}(z_0)=\varphi^{*'}(z_0)=\cdots=\varphi^{*(m-1)}(z_0)=0,\\&\varphi^{(n)}(z_0)=\varphi^{*(m)}(\zeta_0)\end{aligned} \qquad (3.34)$$

şartını sağlayan holomorf fonksiyonlardır.

Dikkat edilirse,

$$\Phi_0(z)=\varphi^{(n)}(z),\ \ \Phi_0^{*}(\zeta)=\varphi^{(m)}(\zeta)$$

ve (3.34) göz önüne alınırsa, (3.33)'den belirli bir sayıda kısmi integralden sonra

$$U(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\partial^k G(t,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial t^k}\right]_{t=z}\varphi^{(n-k)}(z)$$
$$-(-1)^n\int_{z_0}^{z}\varphi(t)\frac{\partial^{n+1}G(t,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial t^{n+1}}dt$$
$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\left[\frac{\partial^k G(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial \tau^k}\right]_{\tau=\zeta}\varphi^{*(m-k)}(\zeta) \tag{3.35}$$
$$-(-1)^m\int_{\zeta_0}^{\zeta}\varphi^*(\tau)\frac{\partial^{m+1}G(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial \tau^{m+1}}d\tau.$$

elde edilir. Burada m ve n negatif olmayan herhangi bir integral değeri alınabilir. Bu formül sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorfik herhangi bir $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ fonksiyonları için $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de (F_0)ın bir analitik çözümüne yol açar. Eğer (3.34) şartları göz önüne alınırsa, φ, φ^* fonksiyonları $U(z,\zeta)$ ile tek olarak belirlenebileceği hatırlanmalıdır.

(3.33) formülü, verilmiş herhangi bir noktada istenildiği kadar yüksek mertebede singüler kuvvetin tersine sahip, (E_0) denkleminin çözümlerini elde etmeye imkân sağlar.

Şimdi (3.28), (3.33) ve (3.35) formüllerini genelleştirmek için daha iyi bir konumdayız. z_0,ζ_0 ($z_0\in\mathfrak{D}$, $\zeta_0\in\overline{\mathfrak{D}}$) sabit noktalarına ilave olarak z_1, ζ_1 ($z_1\in\mathfrak{D}$, $\zeta_1\in\overline{\mathfrak{D}}$) noktalarını da düşünelim.

$$U(z,\zeta)=\alpha_0 G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}\Phi(t)G(t,\zeta_1,z,\zeta)dt$$
$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)G(z_1,\tau,z,\zeta)d\tau \tag{3.36}$$

formülünü göstermek kolaydır. Burada α_0 keyfi bir sabit, Φ ve Φ^* sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de keyfi holomorf fonksiyonlardır ki $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de (F_0) denkleminin analitik çözümlerini verir. α_0 sabiti ve Φ, Φ^* fonksiyonlarının $U(z,\zeta)$ ile tek olarak belirlenebileceği gösterilecektir.

Gerçekten, (3.36) den

$\alpha_0=U(z_0,\zeta_0)$,

$$\int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_1, z, \zeta) dt = U(z, \zeta_0) - U(z_0, \zeta_0) G(z_0, \zeta_0, z, \zeta_0), \tag{3.37}$$

$$\int_{z_0}^{z} \Phi^*(t) G(z_1, \tau_1, z_0, \zeta) d\tau = U(z_0, \zeta) - U(z_0, \zeta_0) G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta) \tag{3.38}$$

dır. (3.37) ve (3.38) nın her iki tarafının sırasıyla z ve ζ ya göre türevinin alınması ile

$$\begin{aligned} G(z, \zeta_1, z, \zeta_0)\Phi(z) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) \frac{\partial G(t, \zeta_1, z, \zeta_0)}{\partial t} dt \\ = \frac{\partial}{\partial z}\left[U(z, \zeta_0) - U(z_0, \zeta_0) G(z_0, \zeta_0, z, \zeta_0)\right] \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} G(z_1, \zeta, z_0, \zeta)\Phi^*(z) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) \frac{\partial G(z_1, \tau, z_0, \zeta)}{\partial \zeta} d\tau \\ = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[U(z_0, \zeta) - U(z_0, \zeta_0) G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta)\right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

elde edilir. Fakat (3.20) e bakıldığında

$$G(z, \zeta_1, z, \zeta_0) = \exp \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} A(z, \eta) d\eta \neq 0,$$

$$G(z_1, \zeta, z_0, \zeta) = \exp \int_{z_0}^{z_1} B(\xi, \zeta) d\xi \neq 0$$

dır. Böylece (3.39), (3.40) Volterra integral denklemidirler ki çözümleri Kısım (3.1) in sonuçlarına göz atıldığında tek olarak tanımlı ve sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de analitiktirler.

4. TEMEL ÇÖZÜMLER VE (E_0) DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN TEMEL TEMSİLLER

Bu bölümde (E_0) denkleminin temel çözümleri ve çözümlerinin argümanları kompleks değerli bir bölge içine analitik devamı incelenecektir. Basit ve çok bağlantılı bölgelerde temel temsilleri elde edilecektir.

4.1 Temel Çözümler

Bir önceki kısımda türetilen formüller bilhassa (E_0) denkleminin çözümlerini elde etmek için bir çok imkan sağlar. Bilhassa, bu formüllerden temel çözümler elde edilebilir. Bunlar keyfi olarak seçilmiş bir (x_0, y_0) noktası komşuluğunda

$$g(x,y) = \log\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right] + g_0(x,y) \tag{4.1}$$

şekline sahip çözümlerdir. Burada g, g_0 sürekli, birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlardır ve $g(x_0, y_0) \neq 0$ dır. (x_0, y_0) noktasında (4.1) tanımsız olduğundan bu noktaya temel çözümün kutbu denir.

Eğer (4.1) sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılır ve (E_0) denkleminin (x_0, y_0) noktası komşuluğundaki bir regüler çözümü ona eklenirse yeniden (E_0) denkleminin bir temel çözümü elde edilir. O halde temel çözümlerin belirli şartları sağlaması gerektiği konusunda ısrar edilmelidir. Aşağıda çıkarılan gerçek ileride kullanılacaktır.

Şimdi (E_0) denkleminin temel çözümleri elde edilebilir. (3.33) formülü bu maksat için kullanılabilir. Aşağıdaki fonksiyonları

$$\Phi_0(z) = K_0 \log(z - z_0), \ \Phi^*(\zeta) = K_0 \log(\zeta - \zeta_0) \tag{4.2}$$

Bu formülde yerine yazılırsa; burada K_0 sıfırdan farklı bir sabittir, sonra basit ve kolay işlemler ile (F_0) denkleminin aşağıda belirtilen belirli çözümü elde edilir:

$$\Omega_1(z,\zeta,z_0,\zeta_0) = K_0\{G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)\log[(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)] - \Omega_0(z,\zeta,z_0,\zeta_0)\}, \tag{4.3}$$

burada

$$\Omega_0(z,\zeta,z_0,\zeta_0)=\int_0^1 \log\sigma \frac{\partial}{\partial\sigma}[G(z_0+(z-z_0)\sigma,\zeta_0,z,\zeta)$$
$$+G(z_0,\zeta_0+(\zeta-\zeta_0)\sigma,z,\zeta)]d\sigma$$

dır. Aşikar olarak Ω_1 çok değerli bir fonksiyondur. Buna rağmen eğer (4.3) de z,ζ, z_0,ζ_0 değerleri sırasıyla $z=x+iy,\ \zeta=x-iy$, $z_0=x_0+iy_0,\ \zeta_0=x_0-iy_0$, burada (x,y), (x_0,y_0) $\mathfrak{D}$ bölgesinin noktalarıdır, ifadeleri ile yer değiştirilmesi ile tek değerli

$$\omega_1(x,y,x_0,y_0)=K_0\left\{g(x,y,x_0,y_0)\log\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]-g_0(x,y,x_0,y_0)\right\}, \quad (4.4)$$

fonksiyonu elde edilir ki (E_0) ın bir çözümüdür, burada

$$g(x,y,x_0,y_0)=G(x_0+iy_0,x_0-iy_0,x+iy,x-iy), \quad (4.5)$$
$$g_0(x,y,x_0,y_0)=\Omega_0(x+iy,x-iy,x_0+iy_0,x_0-iy_0)$$

dır. Açık olarak $g,\ g_0$ bir (x_0,y_0) noktasının komşuluğunda x ve y değişkenlerinin analitik fonksiyonları ve $g(x_0,y_0,x_0,y_0)=1$ dir. Sonuç olarak $\omega_1(x,y,x_0,y_0)$, (x_0,y_0) noktasında bir kutba sahip olan, (E_0) ın bir temel çözümüdür.

Şimdi de (E_0) a adjoint olan denklemin yani,

$$E^*(v)=\Delta v-\frac{\partial av}{\partial x}-\frac{\partial bv}{\partial y}+cv=0 \quad (E_0^*)$$

denkleminin temel çözümlerini elde edelim. Bu denklem için (3.33) formülü aşikar olarak

$$U(z,\zeta)=G(z,\zeta,z,\zeta_0)\Phi_0(z)-\int_{z_0}^{z}\Phi_0(t)\frac{\partial G(z,\zeta,t,\zeta_0)}{\partial t}dt$$
$$+G(z,\zeta,z_0,\zeta)\Phi_0^*(\zeta)-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*{}_0(\tau)\frac{\partial G(z,\zeta,z_0,\tau)}{\partial\tau}d\tau$$

dır. (4.2) ile tanımlanan fonksiyonları burada yazılırsa

$$\Omega^*{}_1(z,\zeta,z_0,\zeta_0)=K_0\{G(z,\zeta,z_0,\zeta_0)\log[(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)]-\Omega^*{}_0(z,\zeta,z_0,\zeta_0)\} \quad (4.6)$$

elde edilir, burada

$$\Omega^*{}_0(z,\zeta,z_0,\zeta_0)=\int_0^1\log\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}[G(z,\zeta,z_0+(z-z_0)\sigma,\zeta_0)$$
$$+G(z,\zeta,z_0,\zeta_0+(\zeta-\zeta_0)\sigma)]d\sigma$$

dır. Eğer (4.6) da z, ζ, z_0, ζ_0 değerleri sırasıyla $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\zeta_0 = x_0 - iy_0$ ile yer değiştirilirse

$$\omega_1^*(x, y, x_0, y_0) = K_0 \left\{ g(x_0, y_0, x, y) \log\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right] - g^*{}_0(x, y, x_0, y_0) \right\},$$

elde edilir, burada g, (4.5) ile verilmiştir ve

$$g^*{}_0(x, y, x_0, y_0) = \Omega^*{}_0(x + iy, x - iy, x_0 + iy_0, x_0 - iy_0)$$

dır.

Şimdi (4.4) de (x_0, y_0) ve (x, y) noktalarının yer değişimi ile elde edilmiş olan $\omega_1(x_0, y_0, x, y)$ fonksiyonunu düşünelim. $\omega_1(x_0, y_0, x, y)$ ve $\omega_1^*(x, y, x_0, y_0)$ fonksiyonlarının temel kısımları (logaritmayı bulunduran terimler) kesinlikle aynıdır, fakat regüler kısımları genelde farklıdır. Genel olarak konuşursak o halde $\omega_1(x_0, y_0, x, y)$, (E_0^*) denkleminin bir temel çözümü olmayacaktır. O halde aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 4.1.1. (E_0) denkleminin (x_0, y_0) noktasında bir kutba sahip $\omega(x, y, x_0, y_0)$ temel çözümü mevcuttur ki x_0, y_0 değişkenlerine göre (x, y) noktasında bir kutba sahip (E_0^*) adjoint denkleminin temel çözümüdür.

Böyle temel çözümler standart temel çözüm olarak adlandırılacaktır.

Böyle bir çözümünün

$$\omega(x, y, x_0, y_0) = \omega_1(x, y, x_0, y_0) - \int_{z_1}^{z_0} d\xi \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} G(z_0, \zeta_0, \xi, \eta) F^*{}_{\xi\eta}\left[\Omega_1(z, \zeta, \xi, \eta)\right] d\eta, \tag{4.7}$$

$$(z = z + iy,\ \zeta = x - iy, z_0 = x_0 + iy_0,\ \zeta_0 = x_0 - iy_0)$$

olacağı gösterilecektir, burada

$$F^*{}_{\xi\eta}[\ ] = \frac{\partial^2[\ ]}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial A(\xi, \eta)[\ ]}{\partial\xi} - \frac{\partial B(\xi, \eta)[\ ]}{\partial\eta} + C(\xi, \eta)[\ ]$$

ve z_1, ζ_1 noktaları $z_1 \in \mathfrak{D}$, $\zeta_1 \in \overline{\mathfrak{D}}$ da sabit noktalardır. İlk başta tüm $F^*{}_{\xi\eta}\left[\Omega_1(z, \zeta, \xi, \eta)\right]$ nın $z, \xi \in \mathfrak{D}$, $\zeta, \eta \in \overline{\mathfrak{D}}$ bölgesinde z, ζ, ξ, η değişkenlerinin bir analitik fonksiyonu olduğun ispatlanacaktır.

$$F^{*}{}_{\xi\eta}\left[\Omega^{*}{}_{1}(\xi,\eta,z_0,\zeta_0)\right]=0 \tag{4.8}$$

elimizdedir. Açık olarak Ω_0^{*} $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}},\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de argümanlarının bir analitik fonksiyonudur. (4.6) ile (4.3) karşılaştırıldığında, $\Omega_1(z,\zeta,\xi,\eta)-\Omega^{*}{}_1(\xi,\eta,z,\zeta)$ farkının $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}},\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de z,ζ, ξ,η değişkenlerinin bir analitik fonksiyonu olduğu görülür. Buradan (4.8) e bakıldığında $F^{*}{}_{\xi\eta}[\Omega_1(z,\zeta,\xi,\eta)]$, $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}},\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de z,ζ, ξ,η değişkenlerinin bir analitik fonksiyonu olduğu görülür. Bu bakışla, (4.7) in sağ tarafındaki ikinci terim (x,y), (x_0,y_0) noktalarının bir fonksiyonudur ki $\mathfrak{D}$ bölgesinde x, y ve x_0,y_0 değişken çiftine göre analitiktir. (4.7), (x,y) nin bir fonksiyonu olarak bakıldığında (x_0,y_0) noktasında bir kutba sahip (E_0) denkleminin bir temel çözümü olduğu ve (x_0,y_0) ın fonksiyonu olarak bakıldığında ise (x,y) noktasında bir kutba sahip (E_0^{*}) adjoint denkleminin bir çözümü olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

(4.7) de görülen K_0 sabitinin ileride $-1/4\pi$ olarak seçilecektir. K_0 ın bu seçimine temel çözümü normalleştirilmesi olarak adlandırılacaktır.

4.2 (E_0) Denkleminin Çözümlerinin Analitik Doğası

T, $(m+1)$-bağlantılı bir bölge ve sınırı L ile gösterilsin, L nin sınırının sonlu sayıda parçalı düzgün $L_0,L_1,\cdots,L_m$ eğrilerinden ibaret ve L_0 diğer bütün eğrileri içine aldığı varsayılsın. Bu eğrilerin tamamında saat yönünün tersi doğrultusundaki yöne pozitif olarak bakılacaktır. $u(x,y)$, $v(x,y)$ tek değerli, T de birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve $T+L$ de birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Şimdi kolay bir şekilde

$$\iint_T \left[vE(u)-uE^{*}(v)\right]dxdy=\int_L\left[u\frac{dv}{d\nu}-v\frac{du}{d\nu}-uv\left(a\cos(\nu,x)+b\cos(\nu,y)\right)\right]ds \tag{4.9}$$

formülünün geçerli olduğu gösterilebilir, burada ν dış normal,

$$E(u)=\Delta u+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u,$$

$$E^*(v) = \Delta v - \frac{\partial av}{\partial x} - \frac{\partial bv}{\partial y} + cv$$

ve a, b, c katsayıları $T+L$ de analitik varsayılmıştır.

Aşağıdaki özellikler (4.9) den hemen görülebilirler;

i. Eğer u ve v sırasıyla T de (E_0) ve (E_0^*) denklemlerinin regüler çözümleri ise,

$$\int_L \left[u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - uv\left(a\cos(\nu, x) + b\cos(\nu, y)\right)\right] ds = 0 \tag{4.10}$$

dır.

ii. Eğer $u(x, y)$, T $(T \subset \mathfrak{D})$ bölgesinde (E_0) ın regüler bir çözümü ise

$$u(x, y) = \int_L \left[u\frac{d}{d\nu}\omega(x, y, \xi, \eta) - \omega(x, y, \xi, \eta) Nu \right] ds \tag{4.11}$$

dır. Burada (x, y) T nin herhangi bir noktası, (ξ, η) integrasyon noktası, ν (ξ, η) de dış normal, $\omega(x, y, \xi, \eta)$ (E_0) denkleminin normalleştirilmiş standart temel çözümü ve son olarak

$$Nu = \frac{du}{d\nu} + \left(a\cos(\nu, x) + b\cos(\nu, y)\right)u$$

dır.

iii. Aşağıda belirtilen iyi bilinen teorem (Picard) teorem (4.11) in bir neticesidir:

Teorem 4.2.1. Eğer a, b, c katsayıları T bölgesinde analitik iseler (E_0) denkleminin her çözümü T de regüler, T de x, y değişkenlerinin bir analitik fonksiyonudur.

Ayrıca (4.11),

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y) + \cdots + u_m(x, y) \tag{4.12}$$

şeklinde de yazılabilir, burada

$$u_k(x, y) = \int_{L_k} \left[u\frac{d}{d\nu}\omega(x, y, \xi, \eta) - \omega(x, y, \xi, \eta) Nu \right] ds, \quad k = 0, 1, \cdots, m \tag{4.13}$$

dır. $T_0, T_1, \cdots, T_m$ sırasıyla $L_0, L_1, \cdots, L_m$ ile sınırlı basit bağlantılı bölgeler olsun. $T_0 \subset$ D varsayılacaktır. $T_k' = \mathfrak{D} - T_k$, $(k = 1, ..., m)$ olsun. Aşikar olarak $T_1', \cdots, T_m'$ (sonlu ya da sonsuz) bağlantılı bölgelerdir. $\omega(x, y, \xi, \eta)$ fonksiyonunun özelliklerini kullanarak $u_k(x,y)$ lar T_k ve T_k', $(k=1,2,\cdots,m)$ de (E_0) denkleminin regüler çözümleri iken $u_0(x,y)$, T_0 da bir regüler çözümdür.

Şimdi $u(x,y)$'nin bir D bölgesinde (E_0)ın regüler bir çözümü olduğu varsayılsın. Burada D bölgesi tümleyeni m+1 kontinum $C_0, C_1, \cdots, C_m$dan ibarettir ve burada C_0, T_0ın dışında ve $C_1,\cdots,C_m$ sırasıyla $T_1,\cdots,T_m$in içindedirler. $D_0 = D + C_1 + \cdots + C_m$ $(D_0 \subset \mathfrak{D})$, $D_k = \mathfrak{D} - C_k$ $(k=1,\cdots,m)$ olsun. (4.10) yi kullanarak (4.12) in D de (E_0) ın herhangi bir regüler çözümü için hala geçerli olduğu kolayca gösterilebilir, burada $u_0(x,y)$, D_0 da bir regüler çözüm ve u_k lar ise D_k da regüler çözümlerdir $(k=1,\cdots,m)$. Dikkat edilirse bu fonksiyonlar tamamen L_k eğrilerinden bağımsızdırlar; (4.10) nin yardımıyla (4.13) da ki L_k, D de bulunan ve $(x,\ y)$ noktası ve C_j $(j \neq k)$ kontinumlarını diğer C_k kontinumlarından ayıran herhangi bir basit bağlantılı düzgün eğri ile gösterilebilir.

4.3 (E_0) Denkleminin Çözümlerinin Argümanları Kompleks Değerli Bölge İçine Analitik Devamı

$\mathfrak{D}$, (E_0) denkleminin bir temel bölgesi olsun. T, $\mathfrak{D}$ de basit kapalı bir bölge ve basit kapalı parçalı düzgün bir L eğrisi ile sınırlanmış olsun. Varsayalım ki, $T + L \subset \mathfrak{D}$ olsun.

Şimdi (E_0) ın $\mathfrak{D}$ de regüler herhangi bir çözümü T de (4.11) formülüne benzer temsil edilebilir. (4.11) ün sağ tarafındaki x ve y yi $x = (z+\zeta)/2$ ve $y = (z-\zeta)/2i$ kompleks ifadeleri ile yer değiştirilsin, burada $z \in T$, $\zeta \in \overline{T}$ dir.

$$U(z,\zeta) = \int_L \left[u \frac{d}{d\nu} \Omega(z,\zeta,t,\bar{t}) - \Omega(z,\zeta,t,\bar{t}) Nu \right] ds \tag{4.14}$$

fonksiyonunu elde edilir. Burada

$$\Omega(z,\zeta,t,\bar{t}) = \omega\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}, \frac{t+\bar{t}}{2}, \frac{t-\bar{t}}{2i} \right),$$

ve $t=\xi+i\eta\in L$ dir. (4.7), (4.4) ve (4.3) ile

$$\Omega(z,\zeta,t,\bar{t})=\frac{-1}{4\pi}G(t,\bar{t},z,\zeta)\log[(t-z)(\bar{t}-\zeta)]+\Omega_0{}'(z,\zeta,t,\bar{t}), \tag{4.15}$$

elde edilmiştir, burada $\Omega_0{}'$, $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}},\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$de argümanlarının analitik fonksiyonudur. (4.15) den $U(z,\zeta)$, $(T,\overline{T})$ de z,ζ değişkenlerinde analitik olduğu kolayca gösterilebilir. Fakat T nin sınırını $\mathfrak{D}$ nin sınırına istenildiği kadar yakın alınabilir. İlave olarak $u(x,y)$ aşikar olarak tamamen T nin seçiminden bağımsızdır. Böylece $U(z,\zeta)$, $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ da z,ζ nın bir analitik fonksiyonudur ki $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$ ile $u(x,y)$ nin aynısıdır, burada $(x,y)\in\mathfrak{D}$ dir. Böylece $U(z,\zeta)$ x ve y nin kompleks değerli bölgesine $u(x,y)$ nin bir analitik devamını temsil eder. O halde aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.3.1. (E_0) denkleminin $\mathfrak{D}$ temel bölgesinde regüler olan $u(x,y)$çözümümün argümanlarını kompleks değerli olan bölgeye analitik devamı bölgesi $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de z,ζ değişkenlerinin bir analitik fonksiyonudur ki (4.14) ile verilmiştir. Burada L, $\mathfrak{D}$ de (eğer $\mathfrak{D}$ z-düzlemi ise L yarıçapı istenildiği kadar büyük bir çember alınabilir) herhangi bir basit kapalı parçalı düzgün bir eğri alınabilir.

Buradan $u(x,y)$, $\mathfrak{D}$ de (E_0) denkleminin bir regüler çözümü ise

$$U(z,\zeta)=u\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right) \tag{4.16}$$

ifadesi $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de z,ζ değişkenlerinin bir analitik fonksiyonunu temsil eder ki x, y argümanlarının kompleks bölgesi içine analitik olarak $u(x,y)$ fonksiyonunun devamıdır.

Bilhassa, eğer orijin $\mathfrak{D}$ de ise (4.16) den $u(z/2,z/2i)$ ve $u(\zeta/2,i\zeta/2)$ sırasıyla $\mathfrak{D}$ ve $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorf fonksiyonlardır.

(E_0) denklemin çözümleri argümanları kompleks değerli bölge içine analitik devamı çok bağlantılı bölge durumunda da mümkündür. Bununla beraber çok değerli fonksiyonlar aşağıda gösterileceği gibi genelde elde edilmiştir.

Basitlik için ilk önce iki bağlantılı bölge durumu ele alınsın. D çift bağlantılı bir bölge ki tümleyeni C_0, C_1 kontinumlarından ibaret olsun. Burada C_0 sonsuzdaki noktayı bulundurur ve C_1 sınırlı bir kümedir. $D+C_1$ in (E_0) denkleminin temel bölgesi $\mathfrak{D}$ ye ait olduğu varsayılacaktır. $D_0 = D + C_1$, $D_1 = \mathfrak{D} - C_1$ olsun.

$u(x,y)$, (E_0)'ın D de regüler bir çözümü olsun. Bu çözüm

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y)$$

olarak yazılabilir (Bkz. (4.12) ve (4.13)).

$$u_0(x,y) = \int_{L_0} \left[u \frac{d}{d\nu} \omega(x,y,\xi,\eta) - \omega(x,y,\xi,\eta) Nu \right] ds,$$

$$u_1(x,y) = \int_{L_1} \left[u \frac{d}{d\nu} \omega(x,y,\xi,\eta) - \omega(x,y,\xi,\eta) Nu \right] ds \tag{4.17}$$

dır. Burada L_0 ve L_1, D bölgesinde bulunan keyfi basit kapalı parçalı düzgün eğrilerdir ve sırasıyla C_0, C_1 yi (x,y) noktasından ayırır. Aşikar olarak, u_0 ve u_1 bu eğrilerin seçiminden bağımsızdır ve sırasıyla D_0, D_1 de (E_0) denkleminin regüler çözümleridir.

Şimdi $\mathfrak{D}$ de C_0 ve C_1 bağlantısı ortadan kaldırılsın ve böylece basit bağlantılı bir D' bölgesi elde edilir. $u(x,y)$ fonksiyonunun D' den x ve y kompleks değişkenlerinin bölgesine analitik devamı Teorem 4.3.1. ile bağlantılı olarak

$$U(z,\zeta) = u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i} \right) = U_0(z,\zeta) + U_1(z,\zeta) \tag{4.18}$$

fonksiyonu elde edilir burada

$$U_0(z,\zeta) = u_0\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i} \right),\ U_1(z,\zeta) = u_1\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i} \right) \tag{4.19}$$

dır. Aşikar olarak, $U_0(z,\zeta)$ $(D_0, \overline{D}_0)$ de $u_0(x,y)$ nin analitik devamı olan bir analitik fonksiyondur. $U_1(z,\zeta)$ $(D_1', \overline{D_1'})$ de analitiktir fakat genelde $(D_1', \overline{D_1'})$ de çok değerlidir. $U_1(z,\zeta)$ nin çok değerliliği daha detaylı olarak tartışılacaktır.

z_1 ve z_2 sırasıyla C_1, $\overline{C_1}$ üzerinde sabit noktalar olsun. (4.17) ve (4.19) den şimdi

$$U_1(z,\zeta)=P_1(z,\zeta)\log[(z-z_1)(\zeta-\zeta_1)]+U_1{}'(z,\zeta) \tag{4.20}$$

yazılabilir. Burada

$$P_1(z,\zeta)=\frac{-1}{4\pi}\int_{L_1}\left[u\frac{d}{d\nu}G(t,\bar{t},z,\zeta)-G(t,\bar{t},z,\zeta)Nu\right]ds \tag{4.21}$$

$$U_1'(z,\zeta)=\frac{-1}{4\pi}\int_{L_1}\left[u\frac{d}{d\nu}\Omega'(z,\zeta,t,\bar{t})-\Omega'(z,\zeta,t,\bar{t})Nu\right]ds$$

ve Ω',

$$\Omega'(z,\zeta,t,\bar{t})=\frac{-1}{4\pi}G(t,\bar{t},z,\zeta)\log\frac{(z-t)(\zeta-\bar{t})}{(z-z_1)(\zeta-\zeta_1)}+\Omega'(z,\zeta,t,\bar{t})$$

şekline sahiptir. Burada $\Omega_0{}'$, $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}},\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de argümanlarının bir analitik fonksiyonudur.

Eğer çok değerli Ω' fonksiyonunun tanımlı bir dalı seçilirse, kolay bir şekilde $U_1'(z,\zeta)$ nın $(D_1',\overline{D_1'})$ de z,ζ argümanlarına göre analitik olduğu gösterilebilir. Buradan doğal olarak $U_1(z,\zeta)$ nın tek değerliliği (4.20) nin sağ tarafındaki ilk terim ile tamamen belirlenebilir. (4.21) dan bu terimde $P_1(z,\zeta)$ faktörü $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de z,ζ nın bir analitik fonksiyonudur ve

$$F(U)=\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)U=0 \tag{F_0}$$

denklemini sağlar. (4.20) un (4.18) de yazılması ile

$$U(z,\zeta)=P_1(z,\zeta)\log[(z-z_1)(\zeta-\zeta_1)]+U^*(z,\zeta) \tag{4.22}$$

elde edilir. Burada

$$U^*(z,\zeta)=U_0(z,\zeta)+U_1{}'(z,\zeta)$$

dır. Aşikar olarak, $U^*(z,\zeta)$ $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de z,ζ nın bir analitik fonksiyonudur.

Böylece (E_0)'ın bir çözümünün analitik devamı, iki bağlantılı bir D bölgesinde regülerdir ki genelde (4.22) tipinde bir çok değerli fonksiyona yol açar.

Eğer D çok bağlantılı bir bölge yani, tümleyeni m+1 tane $C_0, C_1, \cdots, C_m$ kontinumdan ibaret olduğu genel durum ele alınırsa, burada C_0 sonsuzdaki noktayı bulundurur ve $C_1, \cdots, C_m$ sınırlı kümelerdir, bu takdirde (E_0) denkleminin herhangi bir $u(x, y)$ çözümünün analitik devamı D de regülerdir ki,

$$U(z, \zeta) = \sum_{k=1}^{m} P_k(z, \zeta) \log[(z - z_k)(\zeta - \zeta_k)] + U^*(z, \zeta)$$

şeklinde z, ζ değişkenlerinin bir fonksiyonuna yol açar, burada z_k ve ζ_k sırasıyla C_k ve $\overline{C}_k$ $(k = 1, \cdots, m)$ da sabit noktalar, $U^*(z, \zeta)$ $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ de z, ζ nın bir analitik fonksiyonudur ve

$$P_k(z, \zeta) = \frac{-1}{4\pi} \int_{L_k} \left[u \frac{d}{d\nu} G(t, \bar{t}, z, \zeta) - G(t, \bar{t}, z, \zeta) N u \right] ds, \; k = 1, \cdots, m$$

dır. Burada L_k, $\mathfrak{D}$ de bulunan ve C_k yı diğer geri kalan C_j $(j = 1, \cdots, m; \; j \neq k)$ kontinumlardan ayıran keyfi basit kapalı parçalı düzgün bir eğridir. Aşikar olarak $P_k(z, \zeta)$ $(k = 1, \cdots, m)$ fonksiyonları (F_0) denklemini sağlayan $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ de z, ζ nın bir analitik fonksiyonlarıdır. Kolay bir şekilde P_k ların L_k eğrilerinin seçiminden bağımsız olduğu gösterilebilir.

4.4 Basit Bağlantılı Bölgelerde (E_0) Denkleminin Çözümleri İçin Genel Temsiller

$\mathfrak{D}$,

$$E(u) = \Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = 0 \qquad (E_0)$$

denkleminin bir temel bölgesi olsun. $u(x, y)$, $\mathfrak{D}$ de bu denklemin bir regüler çözümü olsun. Eğer x ve y argümanlarının kompleks değerli bölgesine analitik olarak devam ettirilirse bir önceki kısımda belirtilen Teorem 4.3.1 gereğince

$$U(z, \zeta) = u\left(\frac{z + \zeta}{2}, \frac{z - \zeta}{2i} \right),$$

$(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ de z, ζ nın bir analitik fonksiyonudur ve

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)u=0 \qquad (F_0)$$

denklemini sağlar.

Kısım 3.4. ün sonuçlarına göre (Formül (3.28) e bakınız) , $U(z,\zeta)$ fonksiyonu

$$U(z,\zeta)=\alpha_0 G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}\Phi(t)G(t,\zeta_0,z,\zeta)dt+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)G(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau \qquad (4.23)$$

olarak yazılabilir. Burada z_0, ζ_0 sabit noktalar $z_0\in\mathfrak{D}$, $\zeta_o\in\overline{\mathfrak{D}}$ ve

$$\alpha_0=U(z_0,\zeta_0),$$
$$\Phi(z)=\frac{\partial U(z,\zeta_0)}{\partial z}+B(z,\zeta_0)U(z,\zeta_0),$$
$$\Phi^*(\zeta)=\frac{\partial U(z_0,\zeta)}{\partial\zeta}+A(z_0,\zeta)U(z_0,\zeta)$$

dır. (4.23) de $z=x+iy,\ \zeta=x-iy$ yazılması ile

$$u(x,y)=\alpha_0 G(z_0,\zeta_0,z,\bar z)+\int_{z_0}^{z}\Phi(t)G(t,\zeta_0,z,\bar z)dt+\int_{\zeta_0}^{\bar z}\Phi^*(\tau)G(z_0,\tau,z,\bar z)d\tau \qquad (4.24)$$

elde edilir, burada (x,y), $\mathfrak{D}$ nin bir noktasıdır.

O halde (E_0) ın herhangi bir regüler çözümünün (4.24) şeklinde yazılabileceği ispatlandı, burada α_0 bir sabit ve $\Phi(z)$, $\Phi^*(z)$ sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorf fonksiyonlardır ki $u(x,y)$ nin terimlerinde (4.24) ile tek olarak tanımlıdır. Diğer taraftan, zaten kısım 3.4 de gözlemlendiği gibi (4.24) ün sağ tarafı her zaman (E_0) ın $\mathfrak{D}$ de regüler bir çözümüdür. Burada α_0 bir sabit ve $\Phi(z)$, $\Phi^*(z)$ sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorf fonksiyonlardır. Böylece aşağıda belirtilen teorem ispatlanmış olur:

Teorem 4.4.1. $\mathfrak{D}$, (E_0) ın bir temel bölgesi olsun. Bu taktirde (4.24) formülü, α_0 bir sabit ve $\Phi(z)$, $\Phi^*(z)$ sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorf fonksiyonlar olduğunda, (E_0)'ın $\mathfrak{D}$ de tüm regüler çözümlerini verir. Burada α_0, $\Phi(z)$ ve $\Phi^*(z)$ (4.24) ile $u(x,y)$ nin terimlerinde tek olarak tanımlıdır.

(4.24) farklı bir şekilde de yazılabilir. (4.23) deki Φ, Φ^* (4.24) deki değerleri ile yer değiştirilsin bu takdirde kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned} U(z,\zeta) &= -U(z_0,\zeta_0)G(z_0,\zeta_0,z,\zeta) \\ &+ G(z,\zeta_0,z,\zeta)U(z,\zeta_0) - \int_{z_0}^{z} U(t,\zeta_0)H(t,\zeta_0,z,\zeta)dt \\ &+ G(z_0,\zeta,z,\zeta)U(z_0,\zeta) - \int_{\zeta_0}^{\zeta} U(z_0,\tau)H^*(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau \end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir, burada

$$\begin{aligned} H(t,\zeta_0,z,\zeta) &= \frac{\partial}{\partial t}G(t,\zeta_0,z,\zeta) - B(t,\zeta_0)G(t,\zeta_0,z,\zeta), \\ H^*(z_0,\tau,z,\zeta) &= \frac{\partial}{\partial \tau}G(z_0,\tau,z,\zeta) - A(z_0,\tau)G(z_0,\tau,z,\zeta) \end{aligned} \tag{4.26}$$

dır. Şimdi (4.25) deki $U(z,\zeta)$, $G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)$ ile yer değiştirilirse

$$\begin{aligned} 2G(z_0,\zeta_0,z,\zeta) &= G(z,\zeta_0,z,\zeta)G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0) + G(z_0,\zeta,z,\zeta)G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta) \\ &- \int_{z_0}^{z} G(z_0,\zeta_0,t,\zeta_0)H(t,\zeta_0,z,\zeta)dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z_0,\zeta_0,z_0,\tau)H^*(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer bu son ifadeyi (4.25) de yazarsak

$$\begin{aligned} U(z,\zeta) &= G(z,\zeta_0,z,\zeta)\varphi(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t)H(t,\zeta_0,z,\zeta)dt \\ &+ G(z_0,\zeta,z,\zeta)\varphi^*(\zeta) - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau \end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= U(z,\zeta_0) - \frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0), \\ \varphi^*(\zeta) &= U^*(z_0,\zeta) - \frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta) \end{aligned} \tag{4.28}$$

dır. (4.27) de $z = x+iy$, $\zeta = x-iy$ yazılması ile

$$\begin{aligned} u(x,y) &= G(z,\zeta_0,z,\bar{z})\varphi(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t)H(t,\zeta_0,z,\bar{z})dt \\ &+ G(z_0,\bar{z},z,\bar{z})\varphi^*(\bar{z}) - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\bar{z})d\tau \end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir. Burada $(x,y)\in\mathfrak{D}$ dır. Bu formül (E_0) ın $\mathfrak{D}$ de tüm regüler çözümlerini verir. Burada $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de keyfi holomorf fonksiyonlardır.

Şimdi $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ nın tanımlanmış derecelerini düşüneceğiz.

(3.21) ile, (4.26) den

$$H(t,\zeta_0,z,\zeta_0)=H^*(z_0,\tau,z_0,\zeta)=0 \tag{4.30}$$

dır. Son denklem ve (3.20) den (4.27) ile

$$\begin{aligned} U(z,\zeta_0)&=\varphi(z)+G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)\varphi^*(\zeta_0),\\ U(z_0,\zeta)&=\varphi^*(\zeta)+G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)\varphi(z_0)\end{aligned} \tag{4.31}$$

dır. Böylece

$$U(z_0,\zeta_0)=\varphi(z_0)+\varphi^*(\zeta_0)$$

elde edilir, yani $\varphi(z_0)$ ve $\varphi^*(\zeta_0)$

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)+K_0,\quad \varphi^*(\zeta_0)=\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)-K_0 \tag{4.32}$$

şekline sahiptir. Burada K_0 keyfi bir sabittir. (4.32) (4.31) de yazılırsa

$$\varphi(z)=U(z,\zeta_0)-\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)+K_0G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0),$$

$$\varphi^*(\zeta)=U^*(z_0,\zeta)-\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)-K_0G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)$$

elde edilir. Şimdi $\varphi(z)=K_0G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)$ ve $\varphi^*(\zeta)=-K_0G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)$ (burada K_0 keyfi bir sabit) fonksiyonları (4.27) nin sağ tarafında yazılsın ve elde edilen ifade $U_0(z,\zeta)$ ile gösterilsin. $U_0(z,\zeta)$ = 0 olduğu gösterilecektir. Gerçekte U_0, $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de (F_0) denkleminin bir analitik çözümüdür ki (4.30) ve (3.20) ile $U_0(z,\zeta_0)=0,\ U_0(z_0,\zeta)=0$ şartlarını sağlar yani, U_0, (F_0) denklemi için homojen Goursat probleminin çözümüdür. Böylece $\mathfrak{D}$ de her yerde $U_0(z,\zeta)$=0 dır ki bu ispatlanması istenendir.

(4.27) ve (4.29) da ortaya çıkan $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ fonksiyonları o halde $u(x,y)$ nin terimlerinde sırasıyla $K_0 G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)$ ve $-K_0 G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)$ ilave terimleriyle tanımlıdır, burada K_0 keyfi bir sabittir. Bilhassa, K_0 = 0 alınırsa aşikar olarak

$$\varphi(z_0)=\varphi^*(\zeta_0)$$

dır ki bu da olması istenilendir.

Bu şart sağlandığında $\varphi(z_0)$ ve $\varphi^*(\zeta_0)$ (4.28) den $u(x,y)$ nin terimlerinde tek olarak tanımlıdır.

Eğer şimdi,

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2}\alpha_0+\int_{z_0}^{z}\Phi(t)dt,\quad \Phi^*{}_0(\zeta)=\frac{1}{2}\alpha_0+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)d\tau \tag{4.33}$$

gösterimleri tanımlanırsa, (4.24)

$$\begin{aligned} u(z,\zeta)=G(z_0,\zeta_0,z,\bar{z})\Phi_0(z)-\int_{z_0}^{z}\Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,\zeta_0,z,\bar{z})dt \\ G(z_0,\zeta_0,z,\bar{z})\Phi^*{}_0(\bar{z})+\int_{\zeta_0}^{\bar{z}}\Phi^*(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}G(z_0,\tau,z,\bar{z})d\tau. \end{aligned} \tag{4.34}$$

şeklinde yazılabilir. Bu formül, $\Phi(z_0)$ ve $\Phi^*(\zeta_0)$ sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de keyfi holomorf fonksiyonlar olduğunda (4.24) ve (4.29) formülleri gibi $\mathfrak{D}$ de (E_0) ın tüm regüler çözümlerini verir.

(4.33) dan Φ_0 ve $\Phi^*{}_0$ fonksiyonları eğer

$$\Phi_0(z_0)=\Phi^*{}_0(\zeta_0)$$

şartını sağlarsa tek olarak belirlenebileceği açıktır.

Eğer bu şart sağlanmazsa Φ_0 ve $\Phi^*{}_0$ sırasıyla ilave keyfi K_0 ve -K_0 sabitleri ile $u(x,y)$ ile tanımlanmıştır; bu zaten (4.34) den görülür.

Genel formül (3.35), D de (E_0) ın tüm regüler çözümlerinin temsili için de kullanılabilir:

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}G(t,\zeta_0,z,\bar z)\right]_{t=z}\varphi^{(n-k)}(z)$$
$$-(-1)^n\int_{z_0}^{z}\varphi(t)\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}G(t,\zeta_0,z,\bar z)dt$$
$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\left[\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}G(t,\tau,z,\bar z)\right]_{\tau=\zeta}\varphi^{*(m-k)}(\bar z) \tag{4.36}$$
$$-(-1)^n\int_{z_0}^{z}\varphi^*(\tau)\frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}}G(z_0,\tau,z,\bar z)d\tau,$$

burada m, n keyfi negatif olmayan tam sayılar ve $\varphi(z)$ ve $\varphi^*(\zeta)$ sırasıyla $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ da keyfi holomorf fonksiyonlardır. Eğer bu fonksiyonlar

$$\varphi(z_0)=\varphi'(z_0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(z_0)=0,$$
$$\varphi^*(\zeta_0)=\varphi^{*'}(\zeta_0)=\cdots=\varphi^{*(m-1)}(\zeta_0),$$
$$\varphi^{(n)}(z_0)=\varphi^{*(m)}(\zeta_0),$$

şartlarını sağlarsa $u(x,y)$ ile tek olarak tanımlanmışlardır (Kısım 3.4 e bakınız).

(4.24), (4.29), (4.34) ve (4.36) un yerine şimdi (E_0) denkleminin tüm regüler çözümlerinin temsili veren daha genel formülü yazılabilir.

D, $\mathfrak{D}$ de basit bağlantılı bir bölge olsun. z_0, ζ_0 $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de sabit nokta varsayımını tutarken ilave olarak sırasıyla D, $\overline{D}$ $(D\subset\mathfrak{D})$ ye ait z_1, ζ_1 alınacaktır; z_0, ζ_0 noktalarının genelde D, $\overline{D}$ ye ait olması gerekmez.

(3.20) ile

$$G(z_0,\tau,z_1,\zeta)=1,\quad G(t,\zeta_1,z,\zeta_1)=1, \tag{4.37}$$

elde edilen sonucun neticesi olarak $A(z_1,\zeta)=0$, $B(z,\zeta_1)=0$ varsayılabilir. (Kısım 2.2 ve 3.2 ye bakınız).

(E_0) ın tüm çözümlerinin, D de regüler ve

$$u(x,y)=\alpha_0G(z_1,\zeta_1,z,\bar z)+\int_{z_1}^{z}\Phi(t)G(t,\zeta_0,z,\bar z)dt+\int_{\zeta_1}^{\bar z}\Phi^*(\tau)G(z_0,\tau,z,\bar z)d\tau,$$

şeklinde yazılabileceği kolayca gösterilebilir, burada α_0 bir sabit ve $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ fonksiyonları D, $\overline{D}$ de holomorf ve $u(x,y)$ nin terimlerinde tek olarak tanımlıdır. Bu sonuç (3.36) ün ve Teorem 4.3.1 in bir sonucudur.

(4.29) ve (4.34) nin yerine daha genel olan

$$\begin{aligned} u(x,y) &= G(z,\zeta_0,z,\bar{z})\varphi(z) - \int_{z_1}^{z} \varphi(t) H(t,\zeta_0,z,\bar{z})dt \\ &\quad + G(z_0,\bar{z},z,\bar{z})\varphi^*(\bar{z}) - \int_{\zeta_1}^{\bar{z}} \varphi^*(\tau) H^*(z_0,\tau,z,\bar{z})d\tau \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= G(z,\zeta_0,z,\bar{z})\Phi(z) - \int_{z_1}^{z} \Phi(t) \frac{\partial}{\partial t} G(t,\zeta_0,z,\bar{z})dt \\ &\quad + G(z_1,\bar{z},z,\bar{z})\Phi^*(\bar{z}) - \int_{\zeta_1}^{\bar{z}} \Phi^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} G(z_0,\tau,z,\bar{z})d\tau \end{aligned} \tag{4.39}$$

formülleri alınabilir. Burada $\varphi(z)$, $\Phi(z)$ ve $\Phi^*(\zeta)$, $\varphi^*(\zeta)$ sırasıyla D, $\overline{D}$ de keyfi holomorf fonksiyonlardır. Bu formüllerin herhangi biri (E_0)ın tüm çözümlerinin D de regüler bir genel temsilini verir. Bu özellik ispatlanacaktır ve tanımlanmış olan $\varphi(z)$, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$, $\varphi^*(\zeta)$ fonksiyonlarının derecesi düşünülecektir. (4.38) ve (4.39) benzer argümanlara sahip olduğundan (4.38) nin ispatı yapılacaktır.

$\varphi(z)$ ve $\varphi^*(\zeta)$ fonksiyonlarının sırasıyla D, $\overline{D}$ de holomorf verilmiş herhangi bir seçiminde (4.38) formülünün (E_0) ın D de regüler bir çözümünü verdiği aşikardır. Şimdi $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ ve karşı gelen $u(x,y)$çözümü arasındaki ilişkiyi araştıralım.
$U(z,\zeta)$, $u(x,y)$ fonksiyonunun x, y nin kompleks bölgesine analitik devamı olsun. (4.38) ile

$$\begin{aligned} U(z,\zeta) &= G(z,\zeta_0,z,\zeta)\phi(z) - \int_{z_1}^{z} \phi(t) H(t,\zeta_0,z,\zeta)dt \\ &\quad + G(z_0,\bar{z},z,\zeta)\phi^*(\zeta) - \int_{\zeta_1}^{\bar{z}} \phi^*(\tau) H^*(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau \end{aligned} \tag{4.40}$$

eldedir. Aşikar olarak $U(z,\zeta)$, z,ζ nın $(D,\overline{D})$ de bir analitik fonksiyonudur ve (F_0) denklemini sağlar. (4.40) den (4.37) yi göz önüne alarak

$$U(z,\zeta_1)=G(z,\zeta_0,z,\zeta_1)\varphi(z)-\int_{z_1}^{z}\varphi(t)H(t,\zeta_0,z,\zeta_1)dt+\varphi^*(\zeta_1), \tag{4.41}$$

$$U(z_1,\zeta)=G(z_0,\zeta,z_1,\zeta)\varphi^*(\zeta)-\int_{\zeta_1}^{\zeta}\varphi^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z_1,\zeta)d\tau+\varphi(z_1). \tag{4.42}$$

elde edilir. Bilhassa,

$$U(z_1,\zeta_1)=\varphi(z_1)+\varphi^*(\zeta_1)$$

yani, $\varphi(z_1)$ ve $\varphi^*(\zeta_1)$

$$\varphi(z_1)=\frac{1}{2}U(z_1,\zeta_1)+K_0,\quad \varphi^*(\zeta_1)=\frac{1}{2}U(z_1,\zeta_1)-K_0 \tag{4.43}$$

dır. Burada K_0 keyfi bir sabittir. (4.43) i (4.41) ve (4.42) da yazmak suretiyle $\varphi(z_1)$, $\varphi^*(\zeta_1)$in sırasıyla aşağıdaki integral denklemleri sağladığı görülebilir:

$$\varphi(z)-\int_{z_1}^{z}K(z,t)\varphi(t)dt=f(z),\quad \varphi^*(z)-\int_{z_1}^{z}K^*(z,t)\varphi^*(t)dt=f^*(z) \tag{4.44}$$

burada,

$$K(z,t)=\frac{H(t,\zeta_0,z,\zeta_1)}{G(z,\zeta_0,z,\zeta_1)},\quad K^*(\zeta,\tau)=\frac{H(z_0,\tau,z_1,\zeta)}{G(z_0,\zeta,z_1,\zeta)}$$

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{U(z,\zeta_1)}{G(z,\zeta_0,z,\zeta_1)}-\frac{\frac{1}{2}U(z_1,\zeta_1)-K_0}{G(z,\zeta_0,z,\zeta_1)}\\ f^*(z)&=\frac{U(z_1,\zeta)}{G(z_0,\zeta,z_1,\zeta)}-\frac{\frac{1}{2}U(z_1,\zeta_1)+K_0}{G(z_0,\zeta,z_1,\zeta)}\end{aligned} \tag{4.45}$$

dır. Aşikâr olarak, $K(z,t)$ ve $K^*(\zeta,\tau)$ fonksiyonları $f(z)$, $f^*(\zeta)$ sırasıyla D, $\overline{D}$ de holomorf iken $(\mathfrak{D},\mathfrak{D})$ ve $(\overline{\mathfrak{D}},\overline{\mathfrak{D}})$ de analitiktirler. (4.44) denklemlerini (4.45) akılda tutarak çözmek suretiyle

$$\varphi(z)=\Psi(z)+K_0\Psi_0(z),\quad \varphi^*(\zeta)=\Psi^*(\zeta)+K_0\Psi_0{}^*(\zeta)$$

elde edilir. Burada $\Psi(z)$ ve $\Psi^*(\zeta)$, (4.44) integral denkleminin sağ tarafındaki ifadeler

$$f(z)=\frac{U(z,\zeta_1)}{G(z,\zeta_0,z,\zeta_1)}-\frac{U(z_1,\zeta_1)}{2G(z,\zeta_0,z,\zeta_1)}$$
$$f^*(z)=\frac{U(z_1,\zeta)}{G(z_0,\zeta,z_1,\zeta)}-\frac{U(z_1,\zeta_1)}{2G(z_0,\zeta,z_1,\zeta)} \tag{4.46}$$

olduğunda çözümleridir. $\Psi_0(z)$, $\Psi_0^*(\zeta)$ fonksiyonları da aynı integral denklemin sağ tarafındaki ifadeler

$$f(z)=\frac{1}{G(z,\zeta_0,z,\zeta_1)},\quad f^*(\zeta)=-\frac{1}{G(z_0,\zeta,z_1,\zeta)}$$

olduğunda çözümleridir. Sonuç olarak $\Psi(z)$, $\Psi^*(\zeta)$ fonksiyonları, $\Psi_0(z)$, $\Psi_0^*(\zeta)$ (sadece Riemann fonksiyonu G ye bağlıdır) tamamen $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de tanımlanmış iken, $u(x,y)$ nin terimlerinde tek olarak tanımlanmış D, $\overline{D}$ de holomorftur.

Şimdi $\varphi(z)=K_0\Psi_0(z)$, $\varphi^*(\zeta)=K_0\Psi^*(\zeta)$ fonksiyonlarını (4.40) yazalım ve elde edilen ifadeyi $U_0(z,\zeta)$ ile gösterelim. Aşikar olarak $U_0(z,\zeta)$ fonksiyonu $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de analitiktir ki (F_0) denklemini sağlar. Şimdi çözümleri Ψ_0, Ψ_0^* fonksiyonları olan integral denklemi göz önüne alınırsa kolay bir şekilde $U_0(z_1,\zeta)=U(z,\zeta_1)=0$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ de her yerde $U_0(z,\zeta)=0$ dır. Buradan $\varphi(z)$ ve $\varphi^*(\zeta)$ ifadeleri sırasıyla ilave $K_0\Psi_0(z)$ ve $K_0\Psi^*(\zeta)$ terimleri ile $u(x,y)$ nin terimlerinde tanımlanmıştır. Bilhassa eğer $K_0=0$ seçilirse $\varphi(z)$ ve $\varphi^*(\zeta)$ fonksiyonları $u(x,y)$ ile tek olarak tanımlanırlar ve (4.44) integral denkleminin sağ tarafındaki ifade (4.46) şekline sahip olduğunda çözümleri olacaktır. Fakat (4.43) den $K_0=0$ varsayımı

$$\varphi(z_1)=\varphi^*(\zeta_1) \tag{4.47}$$

şartına eşdeğerdir.

(E_0)ın D de regüler herhangi bir çözümünün (4.38) şeklinde yazılabileceği ispatlanmalıdır. Bunu yapmak için, $u(x,y)$ yi x ve y nin kompleks bölgesine devam ettirilecektir. Bu taktirde $(D,\overline{D})$ de analitik bir $U(z,\zeta)$ fonksiyonu elde edilir. $\Psi(z)$,

$\Psi^*(\zeta)$ fonksiyonları (4.44) integral denkleminin ikincisinin sağ tarafındaki ifade (4.46) şekline sahip olduğunda bir çözümü olsunlar; bu çözümler aşikar olarak D ve $\overline{D}$ de holomorf fonksiyonlardır ve (4.47) şartını sağlarlar. Şimdi $\Psi(z)$, $\Psi^*(\zeta)$ fonksiyonların (4.38) de yazılması ile D de regüler bir $u^*(x,y)$ çözümü elde edilir. Şimdi D de her yerde $u(x,y)=u^*(x,y)$ olduğu gösterilecektir.

$U^*(z,\zeta)$ fonksiyonu x, y değişkenlerinin kompleks bölgesine $u^*(x,y)$ nin analitik devamı olsun; $U^*(z,\zeta)$ aşikar olarak $(D,\overline{D})$ de analitiktir ve (F_0) denklemini sağlar. Kolay bir şekilde

$U^*(z_1,\zeta)=U(z_1,\zeta),\ U^*(z,\zeta_1)=U(z,\zeta_1),$

olduğu yani, (F_0) ın $U(z,\zeta)$ ve $U^*(z,\zeta)$ çözümleri karakteristikleri ile uyuşur ki $(D,\overline{D})$ de analitiktir; bu, $(D,\overline{D})$ de her yerde $U(z,\zeta)=U^*(z,\zeta)$ olmasıdır. Bu gösterir ki, bilhassa D de her yerde $u(x,y)=u^*(x,y)$ dır.

Böylece (E_0) ın D de regüler tüm çözümlerinin (4.38) ile verilmiş olduğu gösterildi. Burada $\varphi(z)$ ve $\varphi^*(\zeta)$ D ve $\overline{D}$ de keyfi holomorf fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar (4.47) şartının sağlanması şartıyla karşı gelen $u(x,y)$ çözümü ile tek olarak tanımlıdırlar. Bu şart sağlanmazsa $u(x,y)$ ile tanımlanmış φ ve $\varphi *$ ilave $K_0\Psi_0(z)$ ve $K_0\Psi_0^*(\zeta)$ terimleri ile tanımlıdırlar. Burada K_0 keyfi bir sabittir.

Benzer şekilde tam olarak (4.39) ünde geçerli olduğu gösterilebilir. Dikkat edilirse, bu durumda da (4.47) şartının sağlanması durumunda $u(x,y)$ ile tek olarak tanımlanmıştır.

Yukarıda elde edilen formül, (E_0) denkleminin basit bağlantılı D $(D\subset\mathfrak{D})$ bölgesinde tüm regüler çözümlerinin temsili

$u(x,y)=\mathrm{L}[\varphi(z)]+\mathrm{L}^*[\varphi^*(\zeta)]$

operatörlerdir. Örneğin, (4.38) de bu operatörler

$$\mathrm{L}[\varphi(z)]=G(z,\zeta_0,z,\zeta)\varphi(z)-\int_{z_1}^{z}\varphi(t)H(t,\zeta_0,z,\zeta)dt$$

$$\mathsf{L}^*\left[\varphi^*(\zeta)\right] = G(z_0, \bar{z}, z, \zeta)\varphi^*(\zeta) - \int_{\zeta_1}^{\zeta} \varphi^*(\tau) H^*(z_0, \tau, z, \zeta) d\tau$$

iken (4.39) de

$$\mathsf{L}[\varphi(z)] = G(z, \zeta_0, z, \zeta)\varphi(z) - \int_{z_1}^{z} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} G(t, \zeta_0, z, \zeta) dt$$

$$\mathsf{L}^*(x, y) = G(z_0, \zeta, z, \zeta)\varphi^*(\zeta) - \int_{\zeta_1}^{\zeta} \varphi^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} G(z_0, \tau, z, \zeta) d\tau$$

dır. Bu operatörlerin *D* kümesinin herhangi kapalı bir alt kümesinde sınırlı olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer bir deyişle eğer *T, D* de kapalı bir küme ise $z \in T$, $\zeta \in \overline{T}$ olacak şekilde

$$\left|L\left[\varphi(z)\right]\right| \le M_T \max_{z \in T} |\varphi(z)|, \quad \left|L*\left[\varphi*(\zeta)\right]\right| \le M_T \max_{\zeta \in \overline{T}} |\varphi*(\zeta)|,$$

Burada M_T genellikle *T* ye bağlı bir pozitif katsayıdır ve φ ile φ^* dan bağımsızdır.
Yukarıda elde edilen (E_0) denkleminin genel çözümlerini veren tüm temsiller Riemann fonksiyonu cinsinden yazılabilir. Diğer tarafta (E_0) nin çözümlerinin farklı temsilleri vardır-ki bu gösterimlerin Riemann fonksiyonundan daha az sınırlayıcı koşulları olan ifadelerdir.

$\mathfrak{D}$, (E_0) nin temel kümesi olsun. $\mathfrak{D}_z$ basit bağlantılı bir bölge olsun. Bu bölge $\mathfrak{D}$ den

($z \in \mathfrak{D}$) noktasının *D*'nin sınırına basit bir yay ile bağlanmasıyla elde edilsin.

Aşağıdaki şartları sağlayan $\gamma(z, \zeta, t)$ fonksiyonunu gözönüne alalım:

i. Verilen herhangi bir $t \in \mathfrak{D}$ sabiti için $\gamma(z,\varsigma,t)$ fonksiyonu $(\mathfrak{D}_t, \overline{\mathfrak{D}}_t)$ de *z* ve ς kompleks değişkenli bir analitik fonksiyondur ve herhangi bir $\mathfrak{D}_t$ bölgesi için (F_0) denklemini sağlar.
ii. (z,ζ) $(z \in \mathfrak{D}, \zeta \in \overline{\mathfrak{D}})$ sabit noktaları ne olursa olsun, herhangi bir $\mathfrak{D}_z$ bölgesindesinde $\gamma(z, \zeta, t)$ fonksiyonu *t* ye göre holomorfiktir.
iii. Verilen herhangi bir z, ζ $(Z \in \mathfrak{D}, \zeta \in \overline{\mathfrak{D}})$ değişkenleri için

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\gamma(z, \zeta, z) + A(z, \zeta)\gamma(z, \zeta, z) = 0$$

dır.

Bu tür fonksiyonlar mevcuttur. Buna basit bir örnek $G(t, \zeta_o, z, \zeta)$ Riemann fonksiyonudur. Burada ζ_0, $\bar{D}$ de herhangi bir sabit noktadır. Diğer bir örnekte aşağıdaki çok değişkenli fonksiyondur:

$$(z-t)^{\alpha} \int_0^1 G\left[t+(z-t)\sigma, \zeta_0, z, \zeta\right] \sigma^{\alpha-1} d\sigma$$

Burada α , Re α > *0* olcak şekilde bir sabittir. Aşikar olarak, yukarıdaki şartları sağlayan sonsuz çoklukta fonksiyonlar kümesi vardır. Bu yüzden bu formdan bir fonksiyon elde etmek, Rieman fonksiyonu elde etmekten daha kolaydır.

Kolayca

$$u(x, y) = \int_{z_0}^{z} \gamma(z, \bar{z}, t) \varphi(t)\, dt, \tag{4.48}$$

nin (E_0) denkleminin bir çözümü olduğu gösterilebilir. Burada φ(z) $\mathfrak{D}$ de herhangi bir analitik fonksiyondur. Özellikle, eğer φ(z) $\mathfrak{D}$ de holomorf ve z_0 $\mathfrak{D}$ nin sınırında ise bu integral $\mathfrak{D}$ de regüler bir çözüm olacaktır.

Eğer (E_0) denkleminin katsayıları reel fonksiyonlar ise aşikar olarak (4.48) in reel ve imajiner kısımlarının ayrı ayrı denklemin çözümleridir.

Örneğin,

$$y\Delta u + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} + b_0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (a_0, b_0 = sabit). \tag{4.49}$$

denklemi ele alınsın. (Bkz. Kısım 3.3). Kompleks formda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial \zeta} - \frac{\beta'}{z-\zeta} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\beta}{z-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \tag{4.50}$$

dır. Burada

$$\beta = \frac{1}{2}(b_0 + ia_0), \quad \beta' = \frac{1}{2}(b_0 - ia_0)$$

dir.

Kolayca ispatlanabilir ki

$$(z-t)^{-\beta} (\zeta - t)^{-\beta'} \tag{4.51}$$

fonksiyonu (4.50) denklemini sağlar. T; Imz>0 yarı düzleminde basit bağlantılı bir bölge olsun, burada Reβ<0 koyarak, (4.51) fonksiyonu $\gamma(z,\zeta,t)$ olarak alınabilir. Sonuç olarak

$$\int_{z_0}^{z} (z-t)^{-\beta}(\overline{z}-t)^{-\beta'}\varphi(t)\, dt, \qquad (4.52)$$

integrali (4.49) denkleminin bir çözümüdür, burada φ(z) herhangi bir analitik fonksiyondur.

Eğer z_0 T nin sınırındaysa, *φ(z) T* de holomorfikse ve (4.52) integrali düzgün yakınsak ise bu integral (4.50) nin *T* de regüler bir çözümüdür.

Benzer şekilde, eğer $\mathrm{Re}\,\beta' < 0$ ise

$$\int_{\zeta_0}^{\overline{z}} (z-\tau)^{-\beta}(\overline{z}-\tau)^{-\beta'}\psi(\tau)\, d\tau \qquad (4.53)$$

integrali $\psi(\zeta)$, $\overline{T}$ de herhangi bir holomorfik fonksiyon olmak üzere, (4.50) nin bir çözümüdür.

İspatın detayları üzerinde durmadan (4.52) ve (4.53) integrallerinin, (4.49) nın T de regüler olan tüm çözümleri ifade etmek için kullanılabilir. Reβ<0 ve Reβ'<0 kısıtlamaları gerekli değildir. (Bkz. Darboux [1915], Bölüm III).

(E_0) denkleminin çözümlerinin diğer temsilleri Bergman tarafından verilmiştir [1937, 1943, 1945, 1947]. Örneğin Bergman'a göre reel katsayılı denklemde orjin komşuluğunda regüler olan tüm çözümler

$$u(x,y) = Re \int_{-1}^{+1} E(z,\overline{z},t) f\left[\frac{1}{2} z(1-t^2)\right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

formülü ile ifade edilebilir, burada f(z) herhangi bir holomorf bir fonksiyon ve $E(z, \overline{z}, t)$ ise üç bağımsız değişkenli sürekli olmayan katsayılara sahip ikinci mertebeden diferensiyel denklemin çözümünden elde edilen bir fonksiyondur.

4.5 Çoklu Bağlantılı Bölgelerde (E_0) Denkleminin Tüm Çözümlerinin Genel Temsilleri

Bu bölümde

$$E(u) = \Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{ax} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0 \qquad (E_0)$$

denkleminin tüm çözümlerinin genel temsilleri çok-bağlantılı bölgelerde türetilecektir. Kısım 4.4. te türetilen formüller genelde çok-bağlantılı bölgelerde çok değerli çözümler verdiği için bu durumun biraz daha dikkatli incelenmesi gerektiği aşikardır. (Bkz. I. N. Vekua [1940b]).

D, çok-bağlantılı bir bölge, tümleyeni $m+1$ tane $C_0, C_1, \ldots, C_m$ kapalı bağlantılı bölgeye sahip olsun. Burada C_0 sonsuzdaki noktayı kapsar, geri kalan bölgeler ise sınırlıdır. $D_0 = D+C_1+\ldots+C_m$, $D_k = \mathfrak{D} - C_k$ $(k=1\ldots m)$ olsun. Burada $\mathfrak{D}$, (E_0) denkleminin temel bölgesidir. Aşikar olarak, $D_1, \ldots, D_m$ çift bağlantılı iken D_0 basit bağlantılı bir bölgedir. Burada
$D_0 \subset \mathfrak{D}$ olduğu varsayılacaktır.

(4.11) e göre denklemin herhangi bir u(x,y) çözümü, *D* de regüler ve

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y) + \ldots + u_m(x,y), \qquad (4.54)$$

olarak yazılabilir. Burada u_0, D_0 da regüler bir çözüm ve $u_1, \ldots, u_m$, sırasıyla $D_1, \ldots D_m$ de regüler çözümlerdir. D_0 basit bağlantılı bir bölge olduğundan u_0, bir önceki kısımın formüllerinden, D_0 da holomorf fonksiyonlar türünden yazılabilir. Bu yüzden $u_1, \ldots, u_m$ fonksiyonlarını tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar türünden temsil ihtimali göz önünde bulundurulmalıdır. Fakat bu fonksiyonların herhangi biri $\mathfrak{D}$ -*C* şeklinde çift bağlantılı bir bölgede (E_0) nin regüler bir çözümü olabilir. Burada *C* sınırlı bir kontinum ve $\mathfrak{D}$ denkleminin bir temel bölgesidir. Bu yüzden öncelikle denklemin belirtilen tipteki çift bağlantılı bölgelerde tüm çözümlerinin genel temsilini verecek bir formül türetilmelidir. Eğer böyle bir formül türetilebilirse, (4.54) den genel durumlar için kolaylıkla formüller türetilebilir.

1. İlk olarak *D*, $\mathfrak{D}-C$ formunda çift bağlantılı bir bölge olsun. Burada C sınırlı bir kontinum ve *D, (E_0)* denkleminin temel bölgesi olsun. u(x,y) *D* de (E_0) denkleminin regüler bir çözümü olsun. *C* ve *D* nin sınırlarını keyfi bir eğri ile birleştirirsek basit bağlantılı D' bölgesini elde ederiz ki bu bölgede u(x,y) fonksiyonu hala (E_0) nin regüler bir çözümüdür. Bu yüzden *u(x,y)* yi D' de önceki maddede elde edilen herhangi bir formül yardımıyla ifade edilebilir. En uygun formül (4.38) dir.

Şu andan itibaren orijinin *D* de bulunduğu $A(0,\zeta)=B(\zeta,0)=0$ olduğu farz edilecektir. Böylece $G(0,\tau,0,\zeta)=1$ $G(t,0,z,0)=1$ elde edilir. Ayrıca, z_0,ζ_0 sırasıyla $C\ ve\ \bar{C}$ de sabit noktalar olsun (4.38) ile

$$\begin{aligned} u(x,y) &= G(z,\zeta_0,z,\bar{z})\varphi(z) - \int_0^z \varphi(t)H(t,\zeta_0,z,\bar{z})\,dt \\ &\quad + G(z_0,\bar{z},z,\bar{z})\varphi^*(\bar{z}) - \int_0^{\bar{z}} \varphi^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\bar{z})\,d\tau, \end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir.

Burada $\varphi(z),\varphi^*(\zeta)$ sırasıyla D' ve $\bar{D}'$ de holomorfik fonksiyonlardır.

Bir önceki kısımda $\varphi\ ve\ \varphi^*$ nin (4.47) şartı

$\varphi(0)=\varphi^*(0)$

sağlanması şartı ile *u(x,y)* tarafından tek olarak belirlendiği görülmüştü.

Ayrıca önceki kısımda $\varphi(z),\varphi^*(\zeta)$ (4.44) integral denklemlerinin çözümleri sağ tarafındaki eşitliklerinin (4.46) ile verildiğinde çözümleri olduğu ispatlanmıştı. Mevcut durumda bu formüller

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{u(\frac{1}{2}z, z/2i)}{G(z,\zeta_0,z,0)} - \frac{1}{2}\frac{u(0,0)}{G(z,\zeta_0,z,0)}, \\ f^*(\zeta) &= \frac{u(\frac{1}{2}\zeta,\frac{1}{2}i\zeta)}{G(z_0,\zeta,0,\zeta)} - \frac{1}{2}\frac{u(0,0)}{G(z_0,\zeta,0,\zeta)}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

dır. Aşikar olarak, $f(z)\ ve\ f^*(\zeta)$ sırasıyla D' ve $\bar{D}'$ de holomorf fonksiyonlardır.

(4.44) Volterra integral denklemlerinin çözümünden,

$$\varphi(z)=f(z)+\int_0^z \Gamma(z,t)\,f(t)\,dt,\qquad \varphi^*(\zeta)=f^*(\zeta)+\int_0^\zeta \Gamma^*(\zeta,\tau)f^*(\tau)\,d\tau, \tag{4.56}$$

elde edilir. Burada $\Gamma\ ve\ \Gamma^*$ sırasıyla $K\ ve\ K^*$ çekirdeklerinin çözücü çekirdekleridir. Aşikar olarak $\Gamma(z,t)\ ve\ \Gamma^*(\zeta,\tau)$ sırasıyla $(\mathfrak{D},\mathfrak{D})$, $(\overline{\mathfrak{D}},\overline{\mathfrak{D}})$ de argümanlarının analitik fonksiyonlarıdır.

(4.22) formülünü (E_o) denkleminin çift bağlantılı bölgede regüler olan çözümlerinin x,y değişkenlerinin kompleks değerli bölgesine analitik devamı için kullanılırsa

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{2}z, z/2i\right) &= p_1(z)\log(z-z_0)+p_0(z),\\ \mathrm{u}\left(\frac{1}{2}\zeta,\frac{1}{2}i\zeta\right) &= p_1^*(\zeta)\log(\zeta-\zeta_0)+p_0^*(\zeta), \end{aligned} \tag{4.57}$$

elde ederiz. Burada $p_1(z)$, $p_1^*(\zeta)$, $\mathfrak{D}$ ve $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorf fonksiyonlardı ki, *u(x,y)* ile tek olarak belirlenirler (bakınız (4.21)), $p_0(z)\,ve\ p_0^*(\zeta)$ sırasıyla *D*, $\bar{D}$ de holomorf fonksiyonlardır. (4.57), (4.55) te yerine yazılırsa

$$f(z)=f_1(z)\log(z-z_0)+f_0(z),\quad f^*(\zeta)=f_1^*(\zeta)\log(\zeta-\zeta_0)+f^*(\zeta), \tag{4.58}$$

elde edilir. Burada $f_1(z)$ ve $f_1^*(\zeta)$ $\mathfrak{D}$ ve $\overline{\mathfrak{D}}$ de, $f_0(z)$, $f_0^*(\zeta)$ *D*, $\bar{D}$ de holomorf fonksiyonlardır. (4.58) yi (4.56) da yerine yazarsak

$$\varphi(z)=\varphi_1(z)\log(z-z_0)+\varphi_0(z),\quad \varphi^*(\zeta)=\varphi_1^*(\zeta)\log(\zeta-\zeta_0)+\varphi_0^*(\zeta), \tag{4.59}$$

elde ederiz. Burada $\varphi_1(z), \varphi_1^*(\zeta)$ $\mathfrak{D}$ ve $\overline{\mathfrak{D}}$ de $\varphi_0(z), \varphi_0^*(\zeta)$ ise *D*, $\bar{D}$ de holomorfik fonksiyonlardır. Sonuç olarak şu elde edildi:

(4.55) formülünün çift bağlantılı bir *D* bölgesinde (E_0) denkleminin regüler çözümlerini vermesi için burada (4.59) formülündeki çok değişkenli analitik fonksiyonları yazılması gerekmektedir.

Fakat tüm (4.59) formundaki fonksiyonlar için *D* de regüler çözüm veremeyeceği açıktır. Eğer $\varphi_1, \varphi_0, \varphi_1^*, \varphi_0^*$ fonksiyonları keyfi seçilirse, (4.55) formülü, bu fonksiyonları *D* de çok değerli olan (E_0) nin çözümleriyle ilişkilendirecektir. Diğer bir deyişle $\varphi_1, \varphi_0, \varphi_1^*, \varphi_0^*$ fonksiyonları arasında öyle bir ilişki olmalıdır ki bu ilişki sağlandığında (4.55) D de (E_0) denkleminin regüler çözümlerini vermelidir. Şimdi bu ilişki bulunmaya çalışılacaktır.

(4.59) deki fonksiyonları (4.55) de yerine yazılırsa, basit değişken değiştirmeler ile

$$\begin{aligned}u(x,y) = u_0(x,y) &+ \left[G(z,\zeta_0,z,\bar{z})\varphi_1(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi_1(t)H(t,\zeta_0,z,\bar{z})\,dt \right.\\ &\left. - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_0(t)H(t,\zeta_0,z,\bar{z})\,dt \right]\log(z-z_0)\\ &+ \left[G(z_0,\bar{z},z,\bar{z})\varphi_1^*(\bar{z}) - \int_{\zeta_0}^{\bar{z}} \varphi_1^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\bar{z})\,d\tau \right.\\ &\left. - \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}} \varphi_0^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\bar{z})\,d\tau \right]\log(\bar{z}-\zeta_0),\end{aligned} \tag{4.60}$$

elde edilir. Burada L, C yi içine alan D de basit kapalı parçalı düzgün herhangi bir eğri ve $\bar{L}$, L nin reel eksende görüntüsüdür; L ve $\bar{L}$ üzerindeki yönlerdirmeler C *ve* $\bar{C}$ kontinumlar solundadır. $u_0(x,y)$, D de tek değerli analitik bir fonksiyondur. Açık gösterimin gerekli olmadığında yazmaya gerek yoktur.

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_0^*, \varphi_1^*$ fonksiyonları öyle bir şekilde seçilmelidir ki (4.60) D de tek değerli bir fonksiyon olsun. Fonksiyonlar keyfi seçildiğinde (4.60) genel olarak (E_0) deklemininin çok değerli bir çözümüdür. Tek değerli çözüm gerekli ve yeterli koşul; z noktasının $\mathfrak{D}$ de herhangi kapalı bir eğri boyunca C kontinyumunun etrafında bir kez döndüğünde (4.60) un denkleminin sağ tarafının ilk değerine dönmesidir. Diğer bir deyişle z li herhangi bir yolda (4.60) denkleminin sağ tarafının artımı sıfır olmalıdır. Bunun anlamı D de her yerde

$$\begin{aligned}&G(z,\zeta_0,z,\bar{z})\varphi_1(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi_1(t)H(t,\zeta_0,z,\bar{z})\,dt - G(z_0,\bar{z},z,\bar{z})\varphi_1^*(\bar{z})\\ &+ \int_{\zeta_0}^{\bar{z}} \varphi_1^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\bar{z})\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_0(t)H(t,\zeta_0,z,\bar{z})\,dt\\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}}^{\zeta_0} \varphi_0^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\bar{z})\,d\tau = 0\end{aligned} \tag{4.61}$$

olmasıdır. Burada $\varphi_1(z)$ *ve* $\varphi_1^*(\zeta)$ fonksiyonlarının $\mathfrak{D}$ ve $\overline{\mathfrak{D}}$ de, $\varphi_0(z)$ ve $\varphi_0^*(\zeta)$ fonksiyonları D *ve* $\bar{D}$'de holomorf olduğu unutulmamalıdır. Aşikar olarak (4.54) un sol tarafı bu fonksiyonların seçiminden bağımsız olarak (E_0) nin D de regüler bir çözümüdür. Sonuç olarak x, y değişkenlerinin kompleks değerli bölgesine analitik olarak devam edilecek olursa Teorem 4.3.1 uyarınca

$$G(z,\zeta_0,z,\zeta)\varphi_1(z)-\int_{z_0}^{z}\varphi_1(t)H(t,\zeta_0,z,\zeta)\,\mathrm{dt}-\mathrm{G}(\mathrm{z}_0,\zeta,z,\zeta)\varphi^*(\zeta)$$

$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\varphi_1^*(\tau)H^*(\mathrm{z}_0,\tau,z,\zeta)\,\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi_0(t)H(t,\zeta_0,z,\zeta)\,dt \tag{4.62}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}}\varphi^*{}_0(\tau)H^*(\mathrm{z}_0,\tau,z,\zeta)\,d\tau=0$$

elde edilir. Burada z ve ζ , $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de keyfi noktalardır. (4.61) ve (4.62) açık olarak birbirine denktir.

Eğer (4.62) de $z=z_0,\zeta=\zeta_0$ yazıp,

$$H(t,\zeta_0,z,\zeta_0)=0,\quad H(\mathrm{z}_0,\tau,z_0,\zeta)=0, \tag{4.63}$$

denklemleri de göz önünde bulundurulursa

$$\varphi_1(z_0)=\varphi_1^*(\zeta_0). \tag{4.64}$$

elde edilir. (4.62) de $z=z_0,\zeta=\zeta_0$ yazılması ve (4.63), (4.64) kullanılması ile

$$\begin{aligned}\varphi_1(z)&=\alpha G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}}\varphi_0^*(\tau)\,\mathrm{H}^*(z_0,\tau,z,\zeta_0)\,d\tau,\\ \varphi_1^*(\zeta)&=aG(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi_0(t)\,H(t,\zeta_0,z_0,\zeta)\,\mathrm{dt},\end{aligned} \tag{4.65}$$

elde edilir. Burada α, $\alpha=\varphi_1(z_0)=\varphi_1^*(\zeta_0)$ olacak şekilde bir sabittir.

Şimdi (4.65), (4.62) de yerine yazılırsa son denklemin her α ve D ve $\bar{D}$ de holomorf $\varphi_0(z),\varphi_0^*(\zeta)$ fonksiyonları için sağlandığı kolayca görülür.

Yukarıdaki sonuçlardan (4.65) formülü $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_0^*,\varphi_1^*,$ fonksiyonları arasında bir ilişki kurduğu açıktır. (4.59) tipindeki fonksiyonların bu ilişkiyi sağlaması için yeterli ve gerekli koşul (4.55) ile alakalı olarak $\mathfrak{D}$ de çift bağlantılı bölgede (E_0) denkleminin regüler çözümleri olmasıdır.

(4.59) de (4.65) yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi_0(z) + [\alpha G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_0^*(\tau)\, H^*(z_0,\tau,z,\zeta_0)d\tau]\log(z-z_0),\\ \varphi(\zeta) &= \varphi_0^*(\zeta) + [\alpha G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_0(t) H(t,\zeta_0,z_0,\zeta)dt]\log(\zeta-\zeta_0),\end{aligned} \tag{4.66}$$

elde edilir. Burada α keyfi bir sabit, $\varphi_0(z)\, ve\, \varphi_0^*(\zeta)$ sırasyla $D\, ve\, \bar{D}$'de holomorfik olan keyfi fonksiyonlardır. Bu formüller $\varphi(z), \varphi^*(\zeta)$ analitik fonksiyonları için (4.55) formülüyle birlikte (E_0) denkleminin $\mathfrak{D}$ de regüler çözümlerini veren en genel temsili sağlar.

Şimdi de φ_0, φ_0^* fonksiyonları ve tanımlanmış α sabiti için dereceyi düşünelim. Öncelikle D den bir kesit alalım ve basit bağlantılı D' bölgesinde oluşan (4.66) teki logritmaların herhangi bir dalını ele alalım. D de regüler verilmiş bir $u(x,y)$ çözümü için (4.66) tipinde $\varphi(z), \varphi^*(\zeta)\, ve\, \psi(z), \psi^*(\zeta)$ fonksiyonları için (4.55) formunda ifade edilebilen iki sistemi olsun. Buradan $X(z) = \varphi(z) - \psi(z)$, $X^*(\zeta) = \varphi^*(\zeta) - \psi^*(\zeta)$ fonksiyonları D' de

$$\begin{aligned}0 &= G(z,\zeta_0,z,\bar{z})\chi(z) - \int_0^z \chi(t)\; H(t,\zeta_0,z,\bar{z})\,dt\\ &\quad + G(z_0,\bar{z},z,\bar{z})\chi^*(\bar{z}) - \int_0^{\bar{z}} \chi^*(\tau)\, H^*(z_0,\tau,z,\bar{z})\,d\tau\end{aligned}$$

bağıntısını sağladığı aşikardır. Bir önceki kısımda elde edilen sonuçlar uyarınca

$$\chi(z) = K_0\psi_0(z), \quad \chi^*(\zeta) = K_0\psi_0^*(\zeta),$$

elde edilir. Burada K_0 keyfi bir sabit ve $\psi_0(z), \psi_0^*(\zeta)$ ise $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ de tamammen holomorf fonksiyonlardır. Sonuç olarak

$$\psi(z) = \varphi(z) + K_0\psi_0(z), \quad \psi^*(\zeta) = \varphi^*(\zeta) + K_0\psi_0^*(\zeta)$$

dır.

Böylece α sabiti, $\varphi(z), \varphi^*(\zeta)$ sırasıyla $K_0\psi_0(z)$ *ve* $K_0\psi_0^*(\zeta)$ ilave terimiyle tanımlanmış iken, *u*(*x,y*) ile tek olarak tanımlıdır. Kolayca görülebilir ki bu ilave terimlerin φ *ve* φ^* eklenmesi (4.66) deki temsilinin logaritmik terimlerini değiştirmez.

$\varphi_0(z)$ *ve* $\varphi_0^*(\zeta)$ fonksiyonlarını

$$\varphi_0(z) = q_0(z) + q(z), \;\; \varphi_0^*(\zeta) = q_0^*(\zeta) + q^*(\zeta) \tag{4.67}$$

biçiminde yazalım. Burada $q_0(z), q_0^*(\zeta)$ fonksiyonları $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorf ve $q(z), q^*(\zeta)$ fonksiyonları ise sırasıyla $S, \overline{S}$ de holomorftur. Burada *S*, C nin dışındaki tüm düzlemi görtermektedir. Eğer $q(z)$ *ve* $q^*(\zeta)$ nin sonsuzda sıfıra eşit olması ($q(\infty)=0, q^*(\infty)=0$) istenirse, (4.67) daki terimlerin tek olarak tanımlandığı kolayca görülür. Dikkat edilirse $\varphi(z)$ *ve* $\varphi^*(\zeta)$ ifadelerinde bulunan $K_0\psi_0(z), K_0\psi_0^*(\zeta)$ terimleri $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ holomorf olduklarından dolayı $q(z)$ *ve* $q*(z)$ fonksiyonlarının değerlerini değiştirmediğinden $q(z)$ *ve* $q_0^*(\zeta)$ fonksiyonlarına eklenebilirler. Tüm bunlardan; $q(z)$ *ve* $q*(\zeta)$ nin *u*(*x,y*) tarafından tek olarak tanımlandığı çıkarılabilir.
(4.67), (4.66) da yerine yazılırsa ve

$$\int_L q_0(t)\, H(t, \zeta_0, z_0, \overline{z})\,\mathrm{dt} = \int_{\overline{L}} q_0^*(\tau)\, H^*(z_0, \tau, z, \zeta_0)\,\mathrm{d}\,\tau = 0,$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= q_0(z) + q(z) \\ &\quad + [\alpha G(z_0, \zeta_0, z, \zeta_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{L}} q*(\tau)\,\mathrm{H}^*(z_0, \tau, z, \zeta_0)\,\mathrm{d}\,\tau]\log(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0), \\ \varphi*(\zeta) &= q_0^*(\zeta) + q*(\zeta) \\ &\quad + [\alpha G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_L q(t)\, H(t, \zeta_0, z_0, \zeta)\,\mathrm{dt}]\log(\zeta - \zeta_0). \end{aligned} \tag{4.68}$$

elde edilir. Burada α keyfi bir sabit, $q_0(z), q_0^*(\zeta)$ 'nin $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ de keyfi holomorf fonksiyonlar, $q(z), q*(\zeta)$ $S, \overline{S}$ de holomorf ve sonsuzda sıfır olan keyfi fonksiyonlardır. Bu formüller bize $\varphi(z)$ *ile* $\varphi*(\zeta)$ analitik fonksiyonları için (4.55) formülü ile birlikte (E_o) denkleminin *D* de regüler u(x,y) çözümünün en genel temsillini verir. Yeniden α sabit ve; $q(z), q*(\zeta)$ nin ilave $K_0\psi_0(z),\ K_0\psi_0^*(\zeta)$ terimleri ile tanımlanmış iken $q(z),\ q*(\zeta)$ fonksiyonlarının $u(x,y)$ ile tek olarak tanımlandığını hatırlamak gerekir.

Böylece, (E_0) denkleminin çift bağlantılı D (=$\mathfrak{D}$-C) bölgesinde regüler olan kümesinde regüler olan tüm çözümleri (4.55) tarafından verilmiştir. Burada $\varphi(z)$ *ve* $\varphi*(\zeta)$ fonksiyonları (4.67) şeklindedir.

Şimdi

$$\wp[\zeta_0,\varphi(\mathrm{z})] = \mathrm{G}(\mathrm{z},\zeta_0,z,\zeta)\,\varphi(z) - \int_0^z \varphi(t)\,H(t,\zeta_0,z,\zeta)\,dt$$

$$\wp*[\zeta_0,\varphi*(\mathrm{z})] = \mathrm{G}(\mathrm{z},\zeta_0,z,\zeta)\,\varphi*(\mathrm{z}) - \int_0^\zeta \varphi*(\tau)\,H(z_0,\tau,z,\zeta)\,d\tau$$

gösterimleri kullanılarak (4.55) formülü şimdi

$$u(x,y) = \wp[\zeta_0,\varphi(z)] + \wp*[z_0,\varphi*(\zeta)] \qquad (z = x+iy,\ \zeta = x-iy) \tag{4.69}$$

olarak yazılabilir. Burada $\varphi(z)$ *ve* $\varphi*(\zeta)$ (4.67) formunda fonksiyonlardır. Bundan dolayı (4.69)

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \wp[\zeta_0,q_0(\mathrm{z})] + \wp*[\mathrm{z}_0,q_0^*(\zeta)] \\ &\quad + \alpha\,\wp\big[\zeta_0,G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)\log(z-z_0)\big] + \alpha\,\wp^*\big[z_0,G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)\log(\zeta-\zeta_0)\big] \\ &\quad + \wp\left[\zeta_0,q(z) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_L q^*(\tau)\,\mathrm{H}^*(z_0,\tau,z,\zeta_0)\,d\tau\right)\log(z-z_0)\right] \\ &\quad + \wp^*\left[z_0,q^*(\zeta) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_L q(t)\,H(\mathrm{t},\zeta_0,z_0,\zeta)\,d\tau\right)\log(\zeta-\zeta_0)\right] \end{aligned} \tag{4.70}$$

olarak yazılabilir, burada $\zeta = \overline{z}$ dir. $\zeta_0 = \overline{z}_0$ yazılırsa

$$\begin{aligned} &\wp\big[\overline{z}_0,G(z_0,\overline{z}_0,z,\overline{z}_0)\log(z-z_0)\big] + \wp^*\big[z_0,G(z_0,\overline{z}_0,z_0,\overline{z})\log(\overline{z}-\overline{z}_0)\big] \\ &\qquad = -2\pi\omega(x,\mathrm{y},\mathrm{x}_0,y_0) + u^*(\mathrm{x},\mathrm{y}) \end{aligned} \tag{4.71}$$

elde edilir. Burada $\omega(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{x}_0,y_0),\ z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında bir kutuplu, (E_0) nin normalize edilmiş standart temel çözümüdür (Bkz. §4.1) ve u^* D de bir regüler çözümdür. $u^*(x,y) + \wp[\overline{z}_0,q_0(z)] + \wp^*[z_0,q_0^*[z_0,\zeta)]$ fonksiyonu (E_0) denkleminin D de regüler bir çözümüdür. Dolayısıyla (4.29) yardımıyla

$$u*(x,y) + \wp[\overline{z}_0,q_0(z)] + \wp*[z_0,q_0^*(\zeta)] = \wp[0,p_0(z)] + \wp*[0,p_0^*(\zeta)] \tag{4.72}$$

elde edilir. Burada $p_0(z),\ p_0^*(\zeta)$ sırasıyla $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ ’de holomorf fonksiyonlardır. Şimdi (4.71) i (4.70) da yazılıp (4.72) kullanılırsa

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \wp[0, p_0(z)] + \wp*[0, p_0^*(\zeta)] + \beta\omega(x,y,x_0,y_0) \\ &+ \wp\left[\bar{z}_0, q(z) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_L q^*(\tau) H^*(z_0,\tau,z,\bar{z}_0)\,d\tau\right)\log(z-z_0)\right] \\ &+ \wp*\left[\bar{z}_0, q^*(\zeta) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_L q(t) H(t,\bar{z}_0,z_0,\zeta)\,dt\right)\log(\zeta-\bar{z}_0)\right] \end{aligned} \qquad (4.73)$$

$(z = x+iy,\ \zeta = x-iy)$

elde edilir. Burada β keyfi bir sabit (β=-2πα), z_0 C kontinumunda herhangi sabit bir nokta, $\omega(x,y,x_0,y_0)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ da kutuplu (E_0) denkleminin standart (normalize edilmiş) temel çözümüdür. $p_0(z),\ p_0^*(\zeta)$, $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ ’de holomorf fonksiyonlar; $q(z), q^*(\zeta)$ $S, \bar{S}$ de keyfi holomorfik fonksiyonlardır ve sonsuzda sıfırdırlar. *S*, tüm düzleme göre *C* nin tümleyenidir.

Sonuç olarak aşağıdaki teorem ispatlanmış olur;

Teorem 4.5.1. (E_0) denkleminin çift bağlantılı *D (=𝔇-C)* bölgesinde (4.73) ile verilmiş tüm çözümleri regülerdir. Burada $p_0(z),\ p_0^*(\zeta)$, $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ de keyfi holomorf fonksiyonlar, β keyfi bir sabittir, $q(z), q^*(\zeta)$, $S, \bar{S}$ de keyfi holomorf fonksiyonlar ve sonsuzda sıfırdır, $\beta,\ q(z),\ q^*(\zeta)$ ise $u(x,y)$ ile tek olarak tanımlanır, $p_0(z)$ *ve* $p_0^*(\zeta)$ ise sırasıyla $K_0\psi_0(z)$ *ve* $K_0\psi_0^*(\zeta)$ ilave terimleriyle tanımlanmıştır, burada K_0 keyfi bir sabittir.

Şimdi genel duruma yani, *D*’nin herhangi bir (m+1) bağlantılı bölge olması durumuna dönelim. Bu kısmın başında kullanılan gösterimleri hatırlayarak, (E_0) nin herhangi bir u(x,y) çözümünün (4.54) formunda yazılabileceği söylenebilir. Diğer bir deyişle

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y) + \ldots + u_m(x,y) \qquad (4.74)$$

dır. Burada u_0, (E_0) denkleminin D_0 de regüler çözümü ve $u_1 \ldots u_m$ ise sırasıyla $D_1 \ldots D_m$ de regüler çözümleridir. $D_1, \ldots, D_m$ çift bağlantılı bölge iken (4.73) yardımıyla

$$u_k(x,y)=\wp[0,p_k(z)]+\wp^*[0,p_k^*(\zeta)\}+\beta_k\omega(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{x}_k,y_k)$$
$$+\wp\left[\bar{z}_k,q_k(z)-\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}q_k^*(\tau)H^*(z_k,\tau,z,\bar{z}_k)\,d\tau\right)\log(z-z_k)\right]$$
$$+\wp^*\left[z_k,q_k^*(\zeta)-\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}q_k^*(t)H(\mathrm{t},\bar{\mathrm{z}}_k,\mathrm{z}_k,\zeta)\,\mathrm{dt}\right)\log(\zeta-\bar{z}_k)\right] \qquad (4.75)$$
$$(\mathrm{z}=\mathrm{x}+\mathrm{iy},\ \zeta=\mathrm{x}-\mathrm{iy}),$$

yazılabilir. Burada $p_k(z)$, $p_k^*(\zeta)$ $\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}}$ de holomorf fonksiyonlar, β_k lar sabittir, $q_k(z)\ ve\ q_k^*(\zeta)$ sonsuzda sıfır $S_k,\bar{S}_k$ da holomorf fonksiyonlardır. S_k, C_k dışındaki düzlemin bir parçası ve $z_k=x_k+iy_k$ ise $C_k(k=1\ldots,m)$ de sabit bir noktadır.

(4.75) , (4.74) de yazılırsa

$$u(\mathrm{x},\mathrm{y})=\sum_{k=1}^{m}\beta_k\omega(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{x}_k,y_k)+\wp[0,\ p(z)]+\wp^*[0,\ p^*(\zeta)]$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\wp\left[\bar{z}_k,\ q_k(z)-\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}q_k^*(\tau)\ \mathrm{H}^*(\mathrm{z}_{k,}\ \tau,\ z,\ \bar{z}_k)d\tau\right)\log(z-z_k)\right] \qquad (4.76)$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\wp^*\left[z_k,\ q_k^*(\zeta)-\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}q_k(t)\ H(t,\ \bar{z}_k,\ \zeta)\ dt\right)\log(\zeta-\bar{z}_k)\right]$$
$$(z=x+iy,\ \zeta=x-iy)$$

elde edilir. Burada $p(z)$, $p^*(\zeta)$ $\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}}$ ’de holomorf fonksiyonlardır ve ayrıca

$$\wp[0,\ p(\mathrm{z})]+\wp^*[0,\ p^*(\zeta)]=u_0(x,y)+\sum_{k=1}^{m}\{\wp[0,\ p_k(\mathrm{z})]+\wp^*[0,p_k^*(\zeta)]\};$$

koşulunu da sağlamaktadırlar. Denklemin sağ tarafının (E_0) denkleminin bir çözümü olmasından dolayı bu tür fonksiyonların varlığı şikardır.

$\beta_1\ldots\beta_m$ sabitlerinin ve $q_1,\ldots,q_m$; $q_1^*,\ldots,q_m^*$ fonksiyonları $p,\ p*$ fonksiyonları sırasıyla ilave $K_0\psi_0(z),\ K_0\psi_0^*(z)$ terimleriyle tanımlanmış olduğundan $u(x,y)$ nin terimlerinde tek olarak ifade edilebileceği kolayca gösterilebilir. Burada K_0 keyfi bir sabittir.

Sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.5.2. *D*, tümleyeni m+1 kontinumdan *(C_0, C_1... C_m)* oluşan çok-bağlantılı bir bölge olsun. Burada C_0 sonsuzdaki noktayı bulunduran, geri kalanları ise sınırlı kümeler olsun. $z_k = x_k + iy_k$, $C_k(k = 1, 2, \ldots, \mathrm{m})$ de sabit bir nokta olsun. $D_0 = D + C_1 + \ldots + C_m$, D_k=$\mathfrak{D}$-C_k (k=1,...,*m*) olsun burada $\mathfrak{D}$,

$$E(u) = \Delta u + \alpha(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial_y} + c(x, y)u = 0, \qquad (E_0)$$

denkleminin D_0 bölgesinini bulunduran bir temel bölgesidir. S_k ise C_k $(k = 1, \ldots, m)$ kontinumlarınının dışında olan sonsuz bölgelerdir. Orjin $\mathfrak{D}$ de olsun. Bu takdirde (E_0) denkleminin $\mathfrak{D}$ de regüler olan tüm çözümleri (4.76) formülü ile verilmiştir. Burada, *p*, p^* keyfi fonksiyonları $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ de holomorftur, β_1 … β_m keyfi sabitler; $q_1(z) \ldots q_m(z)$ ve $q_1(\zeta) \ldots q^*{}_m(\zeta)$ ise sırasıyla S_1 … S_m ve $\bar{S}_1 \ldots$, $\bar{S}_m$ de sonsuzda sıfır olan keyfi fonksiyonlardır. β_1 … β_m sabitleri ve $q_1, \ldots, q_m, q^*{}_1 \ldots, q^*_m$ fonksiyonları, p, p^* ilave $K_0\psi_0(z)$, $K_0\psi_0^*(z)$ şekline sahip ilave terimleri ile tanımlı olduklarından, u(x,y) nin terimlerinde tek olarak ifade edilebilir. Eğer *p*, p^* sabitleri $p(0)=p^*(0)$ koşuluna bağlı ise $K_0 = 0$ olur ki *p*, p^* tek olarak tanımlıdır.

5. REEL KATSAYILI DENKLEMLER VE BAZI ÖZEL ÖRNEKLER

Şimdiye kadar hep genel durumu yani (E_0) denkleminin katsayılarının ve çözümlerinin kompleks değerli olma durumları incelendi. Bu bölümde katsayıların ve fonksiyonların reel olma durumu ele alınacaktır ve $\Delta u+\lambda^2 u=0$ ile $\left(1+x^2+y^2\right)\Delta u+4n\left(n+1\right)u=0$ denklemleri için tüm reel regüler çözümleri veren formül türetilecektir.

5.1. Reel Katsayılı Denklemler

a(x,y), b(x,y), c(x,y) katsayıları reel x, y değişkenlerinin reel analitik fonksiyonları olması durumunda

$$E(u)=\Delta u+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=0 \qquad (E_0)$$

denklemini ele alalım. Bu denklem

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)u=0 \qquad (F_0),$$

kompleks formunda yazılabilir. Burada $z=x+iy,\zeta=x-iy$, $A=\frac{1}{4}(a+ib),$

$B=\frac{1}{4}(a-ib),\ C=\frac{1}{4}c$ dır.

Buradan açıktır ki, $\zeta=\bar{z}$ olduğunda C reel değerler alırken A ve B konjuge kompleks eşleniktirler.

Aşağıdaki iki lemma ispatsız verilmiştir. İspatları I. N. Vekua [1939] sayfa 191-193'te bulunabilir.

Lemma 5.1. x ve y reel değişkenleri için f(x,y) ve g(x,y) analitik fonksiyonları kompleks eşlenik ise,

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^m\,\partial\zeta^n},\frac{\partial^{m+n} g}{\partial z^n\partial\zeta^m}\quad (m,\mathrm{n}=0,1,2,\dots)$$

türevleri de x ve y reel değişkenleri için kompleks eşleniktir.

Lemma 5.2. x ve y reel değişkenleri için f(x,y) fonksiyonunun bir *T* bölgesinde reel reel değerler alması için gerek ve yeter koşul herhangi m, n değerleri için

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^m\,\partial\zeta^n},\frac{\partial^{m+n} g}{\partial z^n\partial\zeta^m}$$

türevlerinin T nin bir (x_0,y_0) noktasında kompleks kompleks eşlenik olmasıdır.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayalım:

Teorem 5.3. Reel katsıyılı (E_0) denkleminin Riemann fonksiyonu $G(t,\tau,z,\zeta)$, $\tau=\bar{t}$, $\zeta=\bar{z}$ $(t,z\in\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ olduğunda reel değerler alır.

İspat: $G(t,\tau,z,\zeta)$ aşağıdaki koşulları sağlar. (Bkz. Kısım 3.2)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial G}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial G}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)G=0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial\zeta}+A(t,\zeta)\mathrm{G}=0,\quad z=t\ \ için$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}+B(z,\tau)\,G=0,\quad \zeta=\tau\ \ için \tag{5.2}$$

$$G=1\quad z=t,\zeta=\tau$$

$t=\xi+i\eta$ *ve* $\tau=\xi-i\eta$ olsun. Burada (ξ,η) $\mathfrak{D}$ bölgesinde bir sabit noktadır. (5.1) ve (5.2) den $\partial G/\partial z$ *ve* $\partial G/\partial\zeta$ nin komplex eşlenik değer ve ΔG'nin (ξ,η) noktasında reel değer aldığı görülür. Kolayca gösterilebilir ki, (5.1) ve (5.2) nin türevlenmesiyle (ξ,η) noktasında Lemma 5.2. nin tüm koşullarının sağlandığı görülür. Böylece teorem ispatlanır.

D, $\mathfrak{D}$ 'de basit bağlantılı bir bölge olsun. u(x,y) (E_0) denkleminin *D* de regüler reel bir çözümü olsun. Şimdi (4.24) yardımıyla

$$u(x,y)=\alpha_0 G(z_0,\bar{z}_0,z,\bar{z})$$
$$+\int_{z_0}^{z}\Phi(t)\,G(t,\bar{z}_0,z,\bar{z})dt+\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}\Phi^*(\tau)\,G(z_0,\tau,z,\bar{z})\,d\tau \tag{5.3}$$

yazılabilir. Burada z_0, *D* nin sabit bir noktasıdır.

$$\alpha_0 = U(z_0, \bar{z}_0), \quad \Phi(z) = \frac{\partial U(z, \bar{z}_0)}{\partial z} + B(z, \bar{z}_0) U(z, \bar{z}_0),$$
$$\Phi^*(\zeta) = \frac{\partial U(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z_0, \zeta) U(z_0, \zeta), \tag{5.4}$$

$$U(z, \zeta) = u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i} \right) \tag{5.5}$$

dır.

Eğer $U(z, z_0)\, ve\, U(z_0, \zeta)$ sırasıyla z_0 ve $\bar{z}_0$ noktalarında Taylor serilerine göre açılırsa; (5.4) ve (5.5)'dan, Lemma 5.1 ile $\Phi(z)$ ile $\Phi^*(\zeta)$ nin $\zeta = \bar{z}$ için kompleks eşlenik değerler aldığı görülebilir. Ayrıca, α_0 bir reel sabittir. Buradan Teorem 5.3. uygulanırsa (5.3),

$$u(x, y) = \alpha_0 G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt$$

olarak yazılabilir.

Bu formül, α_0 nın keyfi reel bir sabit ve $\Phi(z)$ D de keyfi bir holomorfik fonksiyon olduğunda D de (E_0) denkleminin tüm reel çözümlerini verir, α_0 ve $\Phi(z)$ $u(x, y)$ ile tek olarak tanımlıdır.

(4.29) ile başlayarak

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left[G(z, \bar{z}_0, z, \bar{z}) \Phi_0(z) - \int_{z_0}^{z} \Phi_0(t) H(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}) dt \right] \tag{5.6}$$

formülünü elde etmenin zor olmadığı görülür. (5.6) formülü, $\mathfrak{D}$ de regüler (E_0) denkleminin tüm reel çözümlerini verir. Burada $\Phi_0(z)$ fonksiyonu

$$\Phi_0(z_0) = \overline{\Phi_0(z_0)} \quad (z_0 \in D)$$

şartıyla $u(x, y)$ anlamında tek olarak tanımlıdır ve gerçekte (4.28) yardımıyla

$$\Phi_0(z) = 2U(z, \bar{z}_0) - U(z_0, \bar{z}_0) G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}_0)$$

dır.

Özellikle $z_0 = 0$ olduğunda:

$$\Phi_0(z) = 2u(\frac{1}{2} z, z/2i) - u(0,0)\, G(0, 0, z, 0)$$

elde edilir.

(E_0) nin reel çözümlerinin bir kısım genel temsilleri elde edilmiş olsa da, bunlarla kendimizi sınırlamamamız gerekir.

Şimdi çok bağlantılı bölge durumunu gözönünde bulunduralım. *D* çok bağlantılı bir bölge, tümleyeni $m+1$ kontinum $C_0, C_1, \ldots, C_m$ ibaret olsun. $z_k = x_k + iy_k$ C_k $(k=1,\ldots,\mathrm{m})$ da sabit bir nokta olsun. $D_0 = C + C_1 + \ldots + C_m$ (E_0) denkleminin temel bölgesi *D* ye ait olsunlar. Şimdi kolay bir şekilde (4.75) yardımıyla *D* de regüler (E_0) denkleminin tüm reel çözümlerinin

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \omega(x, \mathrm{y}, \mathrm{x}_k, y_k) + \mathrm{Re}\Big\{\wp[0,\ p(z)]$$
$$+\sum_{k=1}^{m} \wp\left[\bar{z}_k, q_k(z) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}_k} q_k^*(\tau) H^*(z_k, \tau, z, \bar{z}_k)\,d\tau\right)\log(z - z_k)\right]\Big\}$$

$$(q_k^*(\tau) = \overline{q_k(\bar{\tau})},\ \tau \in \bar{\mathrm{L}}_k,\ k = 1, 2, \ldots, m)$$

ile verilebileceği gösterilebilir. Burada *p(z)* D_0 da keyfi holomorfik fonksiyon; $\beta_1, \ldots, \beta_m$ keyfi reel sabitlerdir, $q_1(z), \ldots, q_m(z)$ sonsuzda sıfır $S_1, \ldots, S_m$ de holomorfik fonksiyonlardır. Burada S_k, C_k $(k = 1,2,\cdots,m)$ dışında sonsuz bölgelerdir, β_k, q_k $(k = 1,2,\cdots,m)$ $u(x,y)$ ile tek olarak tanımlanmışlardır, $p(z)$ fonksiyonu ilave olarak $p(0) = \overline{p(0)}$ şartıyla tek olarak tanımlıdır.

5.2. $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ Denkleminin Çözümlerinin Genel Temsilleri

Bu kısımda yukarıda elde edilen sonuçları Kısım 3.3 te karşılaşılan

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \quad (\lambda = \text{sabit}) \tag{5.7}$$

denklemini incelemek için kullanılacaktır. Bu denklemin Riemann fonksiyonu

$$G(t, \tau, z, \zeta) = J_0(\lambda\sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)})$$

dır. Buradan (4.24) yardımıyla, (5.7) denkleminin basit bağlantılı T bölgesinde regüler tüm çözümleri

$$u=\alpha_0\,J_0(\lambda r)+\int_0^z \Phi(t)\,J_0(\lambda\sqrt{\zeta(z-t)})\,\mathrm{dt}+\int_0^\zeta \Phi^*(\tau)\,J_0(\lambda\sqrt{z(\zeta-\tau)})\,\mathrm{d}\tau \tag{5.8}$$
$$(z=x+iy,\zeta=x-iy;\, r=|z|)$$

olarak yazılabilir, burada α_0 keyfi bir sabit, $\Phi(z),\Phi^*(\zeta)$ sırasıyla $T\ ve\ \overline{T}$ de keyfi holomorf fonksiyonlardır ki, $u(x,y)$ ile

$$a_0=u(0,0),\quad \Phi(z)=\frac{d}{dz}u(\frac{1}{2}z,z/2i),\quad \Phi^*(\zeta)=\frac{6}{d\zeta}u(\frac{1}{2}\zeta)$$

formüllerince tanımlanabilir. Burada, genelliği kaybetmeksizin orijinin T de olduğu kabul edilmelidir.

Eğer λ reel bir sabitse, basit bağlantılı T bölgesinde regüler olan (5.7) denkleminin tüm reel çözümleri

$$u(x,y)=\alpha_0 J_0(\lambda r)+\mathrm{Re}\int_0^z \Phi(t)J_0(\lambda\sqrt{\overline{z}(z-t)})dt$$

biçiminde yazılabilir. Burada α_0 keyfi bir reel sabit, $\Phi(z)$ T de regüler keyfi bir fonksiyondur.

Şimdi

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2}\alpha_0+\int_0^z \Phi(t)\,dt \quad ve \quad \Phi_0^*(\zeta)=\frac{1}{2}\alpha_0+\int_0^\zeta \Phi^*(\tau)\,d\tau$$

fonksiyonlarını ele alalım. Aşikar olarak sırasıyla $T\ ve\ \overline{T}$ de holomorf ve

$$\Phi_0(0)=\Phi^*(0)$$

koşulunu sağlarlar.

Şimdi (5.8)

$$u(x,y)=\Phi_0(z)-\int_0^z \Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0(\lambda\sqrt{\zeta(z-t)})\,dt$$

$$+\Phi_0^*(\zeta)-\int_0^\zeta \Phi_0^*(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}J_0(\lambda\sqrt{z(\zeta-\tau)})\,d\tau \tag{5.9}$$

$(z=x+iy,\ \zeta=x-iy)$

formuna indirgenebilir. Eğer λ reel bir sabit ise, (5.9) dan T de regüler olan tüm reel çözümleri elde etmek için $\Phi_0^*(\zeta)=\overline{\Phi_0(\zeta)}$ yazılmalıdır.

Orijin merkezli yıldızıl bölgelerde (5.9)

$$u(x,y)=u_0(x,y)-\int_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0(\lambda r\sqrt{1-t})\,dt \tag{5.10}$$

biçiminde yazılabilir, burada $u_0(x,y)=\Phi_0(z)+\Phi_0^*(\bar{z})$ dir. Aşikar olarak $u_0(x,y)$ genelde T de kompleks harmonik bir fonksiyondur ve herhangi bir bu tür fonksiyon T de regüler olan, (5.7) denklemini çözümü ile (5.10) yoluyla bağlantılıdır. Kolayca görülebilir ki u_0, $u(x,y)$ anlamında tek olarak tanımlıdır. $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ polar koordinatları (5.10) da yazılırsa

$$u(r,\theta)=\int_0^r u_0(\rho,\theta)\frac{\partial}{\partial \rho}J_0(\lambda\sqrt{r(r-\rho)})\,d\rho \tag{5.11}$$

elde edilir ki bu bir Volterra integral denklemidir. Sonuç olarak u_0 , u(x,y) cinsinden tek olarak ifade edilebilir. (5.11) denklemi açıkça çözülebilir ve

$$u_0(r,\theta)=u(r,\theta)+\int_0^r u(\rho,\theta)\frac{r}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}J_0(\lambda\sqrt{\rho(\rho-r)})\,d\rho \tag{5.12}$$

dönüşüm formülü geçerlidir. İspatı I. N. Vekua [1945a] da bulunabilir.

(5.12)

$$u_0(r,\theta)=u(r,\theta)+\frac{1}{2}\lambda r\int_0^1 \frac{u(rt,\theta)}{\sqrt{t(1-t)}}I_1(\lambda r\sqrt{t(1-t)})\,dt.$$

olarak yeniden yazılabilir. Burada I_1 imajiner argumanlı birinci çeşit Bessel fonksiyonudur. Bu kartezyen koordinatlarına dönüştürülürse bu formül

$$u_0(x,y)=u(x,y)+\frac{1}{2}\lambda r\int_0^1 \frac{u(xt,yt)}{\sqrt{t(1-t)}}\, I_1(\lambda r\sqrt{t(1-t)})\, dt \tag{5.13}$$

olarak yazılabilir.

(5.7) denkleminin herhangi bir *u(x,y)* regüler çözümü $u_0(x,y)$ hormonik fonksiyonu ile (5.13) aracılığı ile ilişkilendirir.

(5.10) formülünün herhangi bir boyuttaki uzaya genelleştirilebileceğine dikkat edelim. Aslında,

$$u(x_1,...,x_n)=u_0(x_1,...,x_n)-\int_0^1 u_0(x_1t,...,x_nt)t^{\frac{1}{2}(n-2)}\frac{\partial}{\partial t}J_0(\lambda r\sqrt{1-t})dt \tag{5.14}$$

ifadesi

$$\Delta u_0=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_k^2}=0$$

Laplace denklemini sağlayan herhangi bir $u_0(x_1,...,x_n)$ fonksiyonunu

$$\Delta_u+\lambda^2 u=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}+\lambda^2 u=0$$

denkleminin çözümüyle ilişkilendirir. Burada $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...\,x_n^2}$ dır.

(5.14) formülü ayrıca

$$u_0(x_1,\ldots,x_n)=u(x_1,\ldots,x_n)+\frac{1}{2}\lambda r\int_0^1 u(x_1t,\ldots x_nt)t^{\frac{1}{2}(n-2)}I_1(\lambda r\sqrt{t(1-t)})\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

formuna dönüştürebilir. Bu formüller I.N. Veuka [1942c], [1945a] da türetilmiştir.

Farzedelim ki (5.10) da $u_0=1/2\pi\log 1/r, r=\sqrt{x^2+y^2}$ yazdık. Eğer x, y $x-x_0,\ y-y_0$ ile değiştirilirse

$$\omega(x,y,x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}J_0(\lambda r)\log\frac{1}{r}+\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \log t\frac{\partial}{\partial t}J_0(\lambda r\sqrt{1-t})\,dt$$

elde edilir. Burada $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ dır.

Bu (5.7) denklemininin (x_0, y_0) noktasında kutuplu bir temel çözümüdür. $\lambda \to 0$ olduğu zaman $1/2\pi \log 1/\nu$ elde edilir, yani, Laplace denkleminin temel çözümü elde edilir.

Kolayca gösterilebilir ki

$$\omega = -\frac{1}{4} Y_0(\lambda r) + \frac{1}{2\pi} J_0(\lambda r) \log \frac{1}{2} \lambda e^{\gamma} \tag{5.15}$$

olur. Burada Y_o ikinci tip sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonudur ve γ $-\Gamma'(1) = 0,5772157...$ Euler sabitine eşittir. Burada açıktır ki, (5.15)'nın sağ tarafındaki ikinci ifade regüler çözüm olduğu sürece $Y_0(\lambda r)$ (5.7) denkleminin temel çözümüdür.

Şimdi de çok bağlantılı bölgelerde durumu ele alalım. *D*, tümleyeni m+1 kontinum $(C_0, C_1, ..., C_m)$ içeren çok bağlantılı bir bölge olsun, burada C_0 sonsuzda bir noktayı bulundurur geri kalanı ise kapalı kümelerdir. Şimdi, (4.75) genel formülüyle, *D* de regüler olan (5.7) denkleminin tüm çözümleri

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^{m} \beta_k \omega(x, y, x_k, y_k) \\ &+ \sum_{k=0}^{m} \left\{ \varphi_k(z) - \int_0^z \varphi_k(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\lambda \sqrt{(\bar{z} - \bar{z}_k)(z - t)}\right) dt \right. \\ &\left. + \varphi_k^*(\bar{z}) - \int_0^{\bar{z}} \varphi_k^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} J_0\left(\lambda \sqrt{(z - z_k)(\bar{z} - \tau)}\right) d\tau \right\} \end{aligned} \tag{5.16}$$

formundadır. Burada z_0, *D* de sabit bir nokta, z_k, $(z_k = x_k + iy_k,\ k = 1, ..., \mathrm{m})$ C_k da sabit noktalar, $\beta_1, ..., \beta_m$ keyfi sabitler, $\omega(x, y, x_k, y_k)$, (x_k, y_k) noktasında bir kutuplu temel çözüm, φ_0, φ_0^* sırasıyla $D_0 = D + C_1 + ... + C_m$ ve $\bar{D}_0$ da keyfi holomorf fonksiyonlar, $\varphi_k(z)$, $\varphi_k^*(\zeta)$ fonksiyonları ise

$$\varphi_k(z) = q_k(z) - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{L}_k} q_k^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} J_0(\lambda \sqrt{(z - z_k)(\bar{z}_k - \tau)})\, d\tau \right) \log(z - z_k)$$

$$\varphi_k^*(\zeta) = q_k^*(\zeta) - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} q_k(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0(\lambda \sqrt{(\zeta - \bar{z}_k)(z_k - t)})\, dt \right) \log(\zeta - \bar{z}_k) \qquad (5.17)$$

$(k = 1, \ldots m)$

şeklindedir. Burada $\varphi_k(z)$, $\varphi_k^*(\zeta)$ sırasıyla S_k, $\bar{S}_k$ da keyfi, holomorf, sonsuzda sıfır olan fonksiyonlardır. S_k , C_k nin dışında sonsuz bir küme, L_k D'de herhangi bir kapalı parçalı düzgün bir eğridir. D'nin C_k kontinumu diğer kontinumlardan $C_j (j \neq k)$ ayrı olsun.

(5.17) formülü

$$\varphi_k(z) = qk(z) + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{L}_k} q_k^*(\tau)\, J_0(\lambda \sqrt{(z - z_k)(z_k - \tau)})\, d\tau \right) \log(z - z_k)$$

$$\varphi_k^*(\zeta) = q_k^*(\zeta) + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} q_k'(t)\, J_0(\lambda \sqrt{(\zeta - \bar{z}_k)(z_k - t)})\, dt \right) \log(\zeta - \bar{z}_k);$$

formunda yeniden yazılabilir. Burada L_k *ve* $\bar{L}_k$'daki integraller pozitif yönde alınmıştır.

Eğer λ reel bir sayı ise; (5.7) denkleminin D de regüler tüm reel çözümlerini elde etmek için (5.16) da β_k reel sayılar olmalı ve $\varphi_k^*(\bar{z}) = \overline{\varphi_k(z)}$ $(k = 0, \ldots, m)$ olmalıdır, bu verilen son koşullar $q_k^*(\bar{z}) = \overline{q_k(z)}$ $(k = 1, \ldots, m)$, $\varphi_0^*(\bar{z}) = \overline{\varphi_0(z)}$ ile eşdeğerdir.

5.3. $(1+x^2+y^2)^2\Delta u+4n(n+1)u=0$ Çözümlerinin Genel Temsilleri

Bu kısımda,

$$\Delta u+\frac{4n(n+1)}{(1+x^2+y^2)^2}u=0 \qquad \text{(n sabit)} \tag{5.18}$$

denklemini alalım. Bu denklem

$$x=\tan\frac{1}{2}\theta\cos\varphi, \quad \mathrm{y}=\tan\frac{1}{2}\theta\sin\varphi$$

değişken değişimi dönüşümünün bir sonucu olarak

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+n(n+1)u=0$$

denkleminden elde edilmiştir. (5.18) denklemi kompleks formda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\zeta}+\frac{n(n+1)}{(1+z\zeta)^2}u=0 \tag{5.19}$$

olarak yazılabilir. Burada $z=x+iy,\ \zeta=x-iy$ dir.

(5.18) denkleminin Riemann fonksiyonu (Kısım 3.2 ye bakınız)

$$G(t,\tau,z,\zeta)=P_n\left(\frac{(1-\mathrm{z}\zeta)(1-\mathrm{t}\,\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+\mathrm{z}\zeta)\,(1+\mathrm{t}\,\tau)}\right)$$

dır. Burada P_n birinci çeşit Legendre fonksiyonudur.

(5.18) denklemi için temel bölge, $z\in\mathfrak{D},\zeta\in\overline{\mathfrak{D}}$ için $1+z\zeta\neq 0$ özelliğinde düzlemde herhangi bir basit bağlantılı $\mathfrak{D}$ bölgesi alınabilir. Örneğin küme $|z|<1$ dairesi veya $\mathrm{Im}(z)\gtrless 0$ yarı düzlemleri olabilir.

D, $\mathfrak{D}$ de basit bağlantılı bir bölge olsun. (5.18) denklemnin *D* de regüler olan tüm çözümleri

$$u(\mathrm{x},\mathrm{y})=\alpha_0 P_n\left(\frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}\right)+\int_0^z \Phi(t)\,\mathrm{P}_n\left(\frac{1-z\zeta+2\zeta t}{1+z\zeta}\right)dt$$
$$+\int_0^{\zeta}\Phi^*(\tau)\,\mathrm{P}_n\left(\frac{1-z\zeta+2z\tau}{1+z\zeta}\right)d\tau \tag{5.20}$$

olarak yazılabilir. (Bkz.(4.24)), burada $z=x+iy,\zeta=x-iy,\ \alpha_0$ keyfi bir sabit, $\Phi(z),\Phi^*(\zeta)\ \ D,\bar{D}$ de $u(x,y)$ cinsinden

$$\alpha_0=u(0,0),$$
$$\Phi(z)=\frac{d}{dz}u(\frac{1}{2}z,\ z/2i),\ \ \Phi^*(\zeta)=\frac{d}{d\zeta}u(\frac{1}{2}\zeta,\ \frac{1}{2}i\zeta)$$

olarak tanımlanmış keyfi holomorfik fonksiyonlardır

Genelliği kaybetmeksizin orijinin *D* de olduğu açıkça kabul edilir.

Şimdi,

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2}\alpha_0+\int_0^z \Phi(t)\,dt,$$
$$\Phi_0^*(\zeta)=\frac{1}{2}(\zeta)=\frac{1}{2}\alpha_0+\int_0^{\zeta}\Phi^*(\tau)\,d\tau,$$

fonksiyonlarını sunarak (5.20)

$$u(x,y)=\Phi_0(z)-\int_0^z \Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial t}P_n\left(\frac{1-z\zeta+2\zeta t}{1+z\zeta}\right)dt$$
$$+\Phi_0^*(\zeta)-\int_0^{\zeta}\Phi_0^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}P_n\left(\frac{1-z\zeta+2z\tau}{1+z\zeta}\right)d\tau \tag{5.21}$$

olarak yazılabilir. Burada $\Phi_0,\ \Phi_0^*$

$$\Phi_0(0)=\Phi_0^*(0)$$

koşulunu sağlarlar.

Eğer *u* reel bir çözüm ise $\Phi_0^*(\zeta)=\overline{\Phi_0(\zeta)}$ yer değiştirmesi yapılmalıdır.

(5.21) çözümü ayrıca

$$u(x,y)=u_0(x,y)-\int_0^1 u_0(xt,\,yt)\frac{\partial}{\partial t}P_n\left[X+(1-X)t\right]dt \qquad (5.22)$$

olarakta yazılabilir. Burada $u_0(x,y)$ keyfi bir harmonik fonksiyon ve

$$X=\frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}=\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}=\cos\theta$$

dır.

Kolayca görülebilir ki bu formül tüm orijin merkezli yıldız şekilli bölgeler için sağlanır. Diğer bir deyişle bu bölgede regüler olan (5.18) in tüm çözümleri (5.22) formunda yazılabilir ve tersine, verilmiş herhangi bir harmonik fonksiyon (5.18) denkleminin regüler bir çözümü ile ilişkilendirilebilir. Yıldızıl şekilli kümeler, (5.18) in temel bölgelerinden de geniş olabilir.

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ olmak üzere, x,y yerine $x-x_0,\,y-y_0$ yazdıktan sonra $u_0=1/2\pi\log 1/r$ yi (5.22) de yerine yazılırsa

$$\omega(x,y,x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}P_n(\mathrm{X})\log\frac{1}{r}+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\log t\,\frac{\partial}{\partial t}P_n\left[X+(1-X)t\right]dt \qquad (5.23)$$

elde edilir. Burada $X=(1-r^2)(1+r^2)^{-1}$, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ dir. Bu (5.18) denkleminin (x_0,y_0) noktasında bir kutuplu bir temel çözümüdür. Bu çözüme herhangi bir regüler çözüm eklenirse yine bir temel çözüm elde edilir.

$r^2=(1-\mathrm{X})\,(1+\mathrm{X})^{-1}$ gerçeği kullanılırsa, (5.23),

$$\omega(x,\,\mathrm{y},\,\mathrm{x}_0,\,y_0)=\frac{1}{2\pi}Q_n^*(\mathrm{X})$$

olarak yazılabilir. Burada

$$Q_n^*(X)=\frac{1}{2}P_n(X)\log\frac{1+X}{1-X}+(1-X)\int_0^1\log t\,P_n'\left[X+(1-X)t\right]dt$$

dir.

Kolayca $Q_n^*(X)$ in

$$(1-X^2)\frac{d^2y}{dX^2}-2X\frac{dY}{dX}+n(n+1)Y=0$$

Legendere denkleminin $P_n(X)$ den lineer bağımsız bir çözümü olduğu gösterilebilir. Böylece aşikar olarak,

$$Q_n^*(X)=Q_n(X)+\gamma_0 P_n(X)$$

dır. Burada $Q_n(X)$ ikinci çeşit Legendre fonksiyonudur. (Bkz. Whittaker and Watson [1950], syf. 109) Burada açıktır ki

$$\gamma_0=\left[\tfrac{1}{2}P_n(X)\log\frac{1+X}{1-X}-Q_n(X)\right]_{X=1}$$

dir.

$Q_n^*\left(\dfrac{1-z\zeta}{1+z\zeta}\right)=Q_n^*(\cos\theta)$, (5.19) denklemini sağladığından

$$Q_n^*\left(\frac{(1-z\zeta)\,(1-t\tau)+2z\tau+2\tau\zeta}{(1+z\zeta)\,(1+t\tau)}\right)$$

fonksiyonu yine bir çözümdür. (Bkz. Kısım 3.3.).

Çok-bağlantılı bölgelerde (5.18) denkleminin çözümleri için formülleri alıntılamaya gerek yoktur, çünkü bunları elde etmek kolaydır.

KAYNAKLAR

BERGMAN, S. 1937. Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichungen befriedigen, Matem. Sbornik 2, 1170-1197.

BERGMAN, S. 1943. Linear operators in the theory of partial differential equations, Trans. Am. Math. Soc. 53, 131-153

BERGMAN, S. 1945. Certain classes of analytic functions of two real variables and their properties, Trans. Am. Math. Soc. 57, 299-331.

BERGMAN, S. 1947. Functions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation, Duke Math. J. 14, 349-366.

DARBOUX, G., 1915. Lecos sur la Theorie generale des surfaces, vol. II, Paris

GORN, M. V. 1936. Introduction to the theory of partial differantial equations

MUSKHELISHVILI, N. I., 1946. Singular integral equations, Gostekhizda. English translation, Groningen (1951)

MYUNTS, G., 1934. Integral equations, GTTI.

VEKUA, I. N., 1937. Complex representation of the general solution of the equations of the problem of the stationary vibration of the theory of elaccity, Dokl. Acad. Nauk SSSR 16, No. 3, 155-160.

VEKUA, I. N. 1939. Complex representation of solutions of elliptic differential equations and application to boundary value problems, Trudy Tbilisskogo matematicheskogo instituta 7, 161-253.

VEKUA, I. N. 1940b. Allgemeine Darstellung der Lösungen elliptischer Differentialalgleichungen in einem mehrfach zusammenhangenden Gebiet, Soobshcheniya Gruz. Filiala AN SSSR 1, No. 5, 329-335.

VEKUA, I. N. 1942. Solution of the equation $\Delta u + \lambda^2 u = 0$, Soobshcheniya Academii Nauk Gruz. SSR 3, No. 3, 213-220.

VEKUA, I. N. 1943. Metaharmonic Functions, Trudy Tbilisskogo Matematichekogo instituta 12, 105-174.

VEKUA, I. N. 1945a. Inversions of the integral transformation and some applications, Soobshchenia Academii Nauk Gruz. SSR 6, No.3 177-183.

VEKUA, I. N. 1945b. An expansions of metaharmonic functions, Dokl. Acad. Nauk SSSR 48, No. 1, 3-6.

VEKUA, I. N. 1946a. Theory of Legendre functions, Soobshcheniya Academii Nauk Gruz. SSR 7, No. 1-2, 3-10.

VEKUA, I. N. 1946b. Theory of cylindrical functions, Soobshcheniya Academii Nauk Gruz. SSR 7 No.3, 91-97.

VEKUA, I. N. 1967. New method for solving elliptic equations,

WHITTAKER, E. T., WATSON, G. N. 1950. Course of modern analysis (Cambridge Univ. Press).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:Sinem GÜZEL
Doğum Yeri ve Tarihi	:Hatay, 29/01/1980
Yabancı Dili	:İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Hatay Harbiye Lisesi, 1993-1996
Lisans	:Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 1998-2002
Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	: Antakya Uğur Dershaneleri, 2002-2003
	:Hatay Hassa Aktepe Lisesi, 2003-2006
	:Bursa İnegöl Dörtçelik E.M.L., 2006-2007
	:Bursa Yıldız Tekstil Lisesi, 2007
	:Bursa İMKB Gürsu Anadolu Lisesi, 2007-2012
	:BTSO A.O.S. Sosyal Bilimler Lisesi, 2012- …
İletişim	:sinemguzelb@gmail.com