SABORDİNASYON İLE TANIMLANAN HARMONİK FONKSİYON SINIFLARI

Serkan ÇAKMAK

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABORDİNASYON İLE TANIMLANAN HARMONİK FONKSİYON SINIFLARI

Serkan ÇAKMAK

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2018

TEZ ONAYI

Serkan ÇAKMAK tarafından hazırlanan "Sabordinasyon ile Tanımlanan Harmonik Fonksiyon Sınıfları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Başkan : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Elif YAŞAR
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Doç. Dr. Seher Melike AYDOĞAN
İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü
9../5/..2018

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

09/05/2018

Serkan ÇAKMAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SABORDİNASYON İLE TANIMLANAN HARMONİK FONKSİYON SINIFLARI

Serkan ÇAKMAK

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; çalışma hakkında özet bilgi verilmiştir. İkinci bölümde; diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde; sabordinasyon ile tanımlanan yeni harmonik fonksiyon sınıfları tanıtıldı. Bu fonksiyon sınıfları için gerekli ve yeterli şartlar, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı, kompaktlık araştırıldı. Ayrıca, bu fonksiyon sınıfları için katsayı tahminleri ve distorsiyon teoremi elde edildi. Dördüncü bölümde; bulunan sonuçların tümü değerlendirildi.

Anahtar Kelimeler: Harmonik fonksiyon, yalınkat fonksiyon, sabordinasyon, analitik fonksiyon

2018, vi + 91 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

CLASSES OF HARMONIC FUNCTION DEFINED BY SUBORDINATION

Serkan ÇAKMAK

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

This thesis consists of four chapters. Brief information about the study is given in the first chapter. In the second chapter; some of definitions and theorems which will be used later are stated. In the third chapter; new classes of harmonic functions defined with subordination are introduced. Necessary and sufficient conditions, radii of starlikeness and convexity and compactness are investigated. Furthermore, coefficients estimates, distortion theorems are obtained for these class of functions. In the fourth chapter; all obtained results are discussed.

Key Words: Harmonic function, univalent function, subordination, analytic function

2018, vi + 91 pages.

TEŞEKKÜR

İlk günden itibaren desteklerini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, her zaman hoşgörülü ve güler yüzlü olan, öğrencileri olmaktan büyük mutluluk duyduğum ve tüm değerleriyle örnek aldığım hocalarım Sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ' e ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Elif YAŞAR' a, her zaman bana destek olan anneme sonsuz teşekkür ederim.

Serkan ÇAKMAK
09 / 05 / 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{U}$	$\{z: \lvert z \rvert < 1\}$, Açık birim disk
A	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
S	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyonların sınıfı
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
$f \prec F$	f fonksiyonunun F foksiyonuna sabordine olması
S^*	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik, yalınkat ve yıldızıl fonksiyonların sınıfı
K	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik, yalınkat ve konveks fonksiyonların sınıfı
C	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik, yalınkat ve konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$J_f(z_0)$	f fonksiyonunun z_0 noktasındaki Jakobiyeni
SH	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde harmonik, yalınkat, yön koruyan ve $f(0) = f_z(0) - 1 = 0$ ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı
SH^0	$g'(z) = b_1 = 0$ ile normalize edilmiş $f \in SH$ fonksiyonlarının sınıfı
$f_1 * f_2$	f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu (Hadamard Çarpımı)
$\mathrm{K} = h + \overline{g}$	Harmonik Koebe Fonksiyonu
PH	Reel kısmı pozitif harmonik fonksiyon sınıfı
SH^*	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı
KH	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde harmonik konveks fonksiyonların sınıfı
CH	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde harmonik konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$Aut(\mathbb{U})$	$\mathbb{U}$ açık birim diskinin analitik otomorfizmlerinin kümesi
$T_\varphi(f(z))$	$f = h + \overline{g}$ yerel yalınkat harmonik fonksiyonunun Koebe dönüşümü
$A_\varepsilon(f(z))$	$f = h + \overline{g}$ yerel yalınkat harmonik fonksiyonunun Koebe dönüşümü
L	$\mathbb{U}$ açık birim diskinde yerel yalınkat, harmonik ve $f(0) = 0, h'(0) = 1$ ile normalize edilmiş $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının sınıfı
$ALIF$	Bir afin ve lineer değişmez ailesi
L^0	$f \in L$ ve $g'(0) = 0$ şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
D^n	Modifiye Salagean Diferansiyel operatörü
$SH^*(A,B)$	$\frac{Df(z)}{f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$ şartını şağlayan $f \in SH$ fonksiyonlarının sınıfı

$H^n(A,B)$	$\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$ şartını şağlayan $f \in SH$ fonksiyonlarının sınıfı
T^n	SH da $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}\lvert a_k\rvert z^k + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty}\lvert b_k\rvert \overline{z}^k$ şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonların sınıfı
$S\mathrm{T}^*(A,B)$	$\mathrm{T}^0 \cap SH^*(A,B)$
$H\mathrm{T}^n(A,B)$	$\mathrm{T}^n \cap H^n(A,B)$
$SH^0(\delta,n,A,B)$	$\frac{D^{\delta,n+1}f(z)}{D^{\delta,n}f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$ şartını şağlayan $f \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$SH^0(\gamma,\beta,n,A,B)$	$\frac{D_{\gamma,\beta}^{n+1}f(z)}{D_{\gamma,\beta}^{n}f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$ şartını şağlayan $f \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$	$\mathrm{T}^n \cap SH^0(\delta,n,A,B)$
$SH\mathrm{T}^0(\gamma,\beta,n,A,B)$	$\mathrm{T}^n \cap SH^0(\gamma,\beta,n,A,B)$
$D_\lambda^n f(z)$	Modifiye Al-Oboudi türev operatörü
$SH^0(\lambda,n,A,B)$	$\frac{D_\lambda^{n+1}f(z)}{D_\lambda^{n}f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$ şartını şağlayan $f \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$SH\mathrm{T}^0(\lambda,n,A,B)$	$\mathrm{T}^n \cap SH^0(\lambda,n,A,B)$
$SH_\delta^0(n,A,B)$	$\frac{\delta D^{n+2}f(z)+(1-\delta)D^{n+1}f(z)}{\delta D^{n+1}f(z)+(1-\delta)D^{n}f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$ şartını şağlayan $f \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin temelleri, 1851 yılında Riemann Dönüşüm Teoremi'nin ispatlanmasıyla atılmıştır. 1907 yılında Koebe tarafından Riemann Dönüşüm Teoremi'nin basit bağlantılı bölgeler üzerine olan problemleri, açık birim diske indirgeyecek şekilde yeniden düzenlemesiyle teorinin matematik ve mühendislik dallarında birçok uygulaması yapılmıştır.

Analitik, yalınkat ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı için Bieberbach tahmini ispatlandıktan sonra normalize edilmiş, analitik, yalınkat fonksiyonların sınıfı ve alt sınıfları için bulunan sonuçların harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı için doğru olup olmayacağı sorusu ortaya çıkmıştır. Clunie ve Sheil-Small 1984 yılında yayınladığı makalede, analitik, yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı için yapılan tahminlerin harmonik, yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı için farklı olduğunu fakat bazı kısıtlamalarla benzer şekilde yapılabileceğini gösterdi.

Bu çalışmanın amacı, harmonik fonksiyonlar için sabordinasyon tanımı yardımıyla kurulan harmonik fonksiyon sınıflarının katsayı şartları, ekstrem noktaları, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı gibi bazı özelliklerini araştırmaktır. Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş için ayrılmış olup, ikinci bölümde; diğer bölümde kullanılacak olan analitik fonksiyonlar, analitik yalınkat fonksiyonlar, reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlar, harmonik yalınkat fonksiyonlar ve reel kısmı pozitif harmonik fonksiyonların tanımları ve bu fonksiyonların sırasıyla, A, S, P, SH, PH sınıflarına ait teoremler ve A, S, SH sınıflarının bazı alt sınıflarının tanımları verilmiştir. Ayrıca, harmonik fonksiyonlar için sabordinasyon kavramının hangi şartlar altında geçerli olduğu araştırılmış ve harmonik sabordine fonksiyonlar için bazı özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; sabordinasyon ile tanımlanan harmonik fonksiyon sınıfları incelenmiştir. Bu bölüm, dört alt bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; modifiye edilmiş

Salagean operatörü yardımıyla tanımlanan iki harmonik fonksiyon sınıfı tanıtılmış ve bu sınıflara ait fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir. İkinci bölümde; Yaşar ve Yalçın (2013) tarafından tanımlanan $D^{\delta,n}$ diferansiyel operatörü yardımıyla oluşturulan harmonik fonksiyon sınıfı ve Bayram ve Yalçın (2017) tarafından tanımlanan $D^{n}_{\gamma,\beta}$ diferansiyel operatörü yardımıyla oluşturulan harmonik fonksiyon sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfların bazı özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde; Yaşar ve Yalçın (2012) tarafından tanımlanan D^{n}_{λ} diferansiyel operatörü yardımıyla tanımlanan harmonik fonksiyon sınıfı tanıtılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Son bölümde; modifiye Salagean diferansiyel operatörü yardımıyla tanımlanan harmonik fonksiyon sınıfı tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; bulunan sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. ANALİTİK YALINKAT VE HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde sıkça kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu bölüm (Ahlfors 1979, Goodman 1983, Schaubroeck 2000, Duren 2004, Başkan 2005) kaynaklarından derlenmiştir.

2.1. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

2.1.1. Tanım. D kompleks bir bölge olmak üzere $f: D \to \mathbb{C}$ sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan γ_1, γ_2 düzgün eğrilerinin $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşüm denir. Eğer f fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise f fonksiyonuna D bölgesinde konformdur denir.

2.1.2. Tanım. D kompleks düzlemde bir bölge ve $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa, f fonksiyonuna, D bölgesinde yalınkat fonksiyon denir.

2.1.3. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). D, kompleks düzlemde en az iki sınır noktası bulunan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in D$ olsun. Bu durumda D yi $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ açık birim diski üzerine birebir olarak resmeden ve $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ özelliğinde yalnız bir f fonksiyonu vardır (Riemann 1851).

2.1.4. Tanım. A , $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olacak şekilde normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı olsun. Bu durumda A sınıfına ait her f fonksiyonu,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \qquad (2.1)$$

şeklinde bir Taylor serisi açılımına sahiptir.

2.1.5. Tanım. A sınıfındaki yalınkat fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

2.1.6. Teorem (Bieberbach Teoremi). (2.1) ile verilen seri açılımına sahip f fonksiyonu S sınıfında ise $|a_2| \leq 2$ dir. Üstelik bu eşitsizlik kesin olup eşitlik yalnızca $f(z)$, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu, yani

$$f(z) = e^{-i\alpha} k\left(e^{i\alpha} z\right) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2}$$

olduğunda sağlanır (Bieberbach 1916).

2.1.7. Teorem (Koebe Dörtte Bir Teoremi). $f \in S$ ve $f(z)$ fonksiyonu, γ değerini almıyorsa $|\gamma| \geq \frac{1}{4}$ dür. Eşitlik, Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için sağlanır (Koebe 1907).

2.1.8. Teorem (Distorsiyon Teoremi). $f(z) \in S$ ise $0 \leq r < 1$ olmak üzere her bir $z = re^{i\theta} \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{1 - r}{(1 + r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + r}{(1 - r)^3}$$

dir ve bu eşitsizliğin her iki yanı da kesindir. Eşitlik, Koebe fonksiyonu için sağlanır.

2.1.9. Teorem (Büyüme Teoremi). $f(z) \in S$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{r}{(1 + r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1 - r)^2} \quad (|z| = r < 1)$$

dir.

2.1.10. Teorem. $f(z) \in S$ ve her bir $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{1 - r}{1 + r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r} \quad (|z| = r < 1)$$

dir ve bu eşitsizliğin her iki yanı da kesindir. Eşitlik, Koebe fonksiyonu için sağlanır.

2.1.11. Bieberbach Tahmini. S sınıfındaki her f fonksiyonu $k \geq 2$ olmak üzere $|a_k| \leq k$ eşitsizliğini sağlar. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için sağlanır (Bieberbach 1916).

2.1.12. Tanım. $z \in \mathbb{U}$ için $Re\{f(z)\} > 0$ olacak şekilde, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik, tek değerli ve

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_k z^k + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \tag{2.2}$$

şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir. P sınıfındaki herhangi bir fonksiyona reel kısmı pozitif fonksiyon denir.

P sınıfına ait bir fonksiyon yalınkat olmak zorunda değildir. Örneğin, herhangi bir $k \geq 0$ tamsayısı için $f(z) = 1 + z^k$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen $k \geq 2$ için bu fonksiyon yalınkat değildir.

P sınıfı için,

$$l(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \cdots = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^n$$

Möbius fonksiyonunun önemi, Koebe fonksiyonunun S sınıfı için önemine benzemektedir. Üstelik bu fonksiyon P sınıfına ait olup, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik, tek değerli ve yalınkattır. Ayrıca, $l(z)$ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ açık birim diskini sağ yarı düzleme resmeder.

2.1.13. Teorem. $f(z), f_1(z), f_2(z)$ fonksiyonları P sınıfına ait olsun. Bu durumda

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g(z) = f(e^{i\alpha}z)$,

(ii) $-1 \leq t \leq 1$ olmak üzere $g(z) = [f(z)]^t$ ya da $g(z) = f(tz)$,

(iii) $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$,

(iv) $0 \leq t_1, t_2, t_1 + t_2 \leq 1$ olmak üzere $g(z) = [f_1(z)]^{t_1}[f_2(z)]^{t_2}$,

(v) $\lambda \in \mathbb{U}, f(\lambda) = a + bi$ olmak üzere $g(z) = \dfrac{1}{a}\left[f\left(\dfrac{z+\lambda}{1+\bar{\lambda}z}\right) - bi\right]$,

(vi) $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g(z) = \dfrac{f(z) + ib}{1 + ibf(z)}$

şeklinde tanımlı $g(z)$ fonksiyonları P sınıfına aittir.

2.1.14. Teorem. $k \geq 1$ belli bir tamsayı olsun. Bu durumda, (2.2) ile verilen seri açılımına sahip $f(z)$ fonksiyonu P sınıfına ait ise

$$|p_k| \leq 2$$

dir. Bu eşitsizlik kesindir (Carathéodory 1907).

2.1.15. Teorem (Schwarz Lemma). $\omega: \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ analitik ve $z \in \mathbb{U}$ için $|\omega(z)| \leq 1$ ve $\omega(0) = 0$ olsun. Bu durumda $z \in \mathbb{U}$ noktaları için $|\omega(z)| \leq |z|$ ve $|\omega'(0)| \leq 1$ dir. Üstelik $z_0 \in \mathbb{U}$ $(z_0 \neq 0)$ için $|\omega(z_0)| \leq |z_0|$ ise c, $|c| = 1$ özelliğinde bir sabit olmak üzere $\omega(z) = cz$ şeklindedir.

2.1.16. Tanım (Sabordinasyon Prensibi). $F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik, tek değerli, yalınkat ve $F(\mathbb{U}) = D$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik, tek değerli, $f(0) = F(0)$ özelliğinde ve $f(\mathbb{U}) \subset D$ ise $\mathbb{U}$ açık birim diskinde $f(z)$ fonksiyonu, $F(z)$ fonksiyonuna sabordinedir denir ve $f(z) \prec F(z)$ ile gösterilir.

2.1.17. Teorem. $f(z)$ ve $F(z)$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik ve tek değerli olsun. Ayrıca, $F(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yalınkat olsun. Bu durumda $\mathbb{U}$ açık birim diskinde $f(z) \prec F(z)$ olması için gerek ve yeter şart $f(z) = F\big(\omega(z)\big)$ olacak şekilde Schwarz Lemmanın şartlarını sağlayan bir $\omega(z)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

2.1.18. Tanım. Düzlemde bir D kümesinin w_0 noktasından çıkan her bir ışın ile D kümesinin içinin arakesiti ya bir doğru parçası ya da bir ışın ise D kümesine, w_0 iç noktasına göre yıldızıl küme denir.

2.1.19. Tanım. Bir $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ açık birim diskini w_0 noktasına göre yıldızıl bir bölgeye resmediyorsa $f(z)$ fonksiyonuna, w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak $w_0 = 0$ alınırsa $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. S sınıfına ait yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.

Koebe fonksiyonu, $w_0 > -\frac{1}{4}$ noktasına göre yıldızıl bir fonksiyondur.

2.1.20. Teorem. $f(z)$, $\mathbb{U}_R: |z| \leq R$ kapalı diskinde analitik, tek değerli ve yalınkat bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ özelliğinde olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun, $\mathbb{U}_R$ kapalı diskini yıldızıl bir bölgeye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart $C_R: |z| = R$ üzerindeki her z için

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \tag{2.3}$$

olmasıdır (Nevanlinna 1921).

2.1.21. Tanım. Düzlemde bir D kümesinin içindeki her bir w_1, w_2 nokta çifti için w_1 ve w_2 yi birleştiren doğru parçası da D kümesinin içinde kalıyorsa, D ye konveks küme denir.

2.1.22. Tanım. Bir $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ açık birim diskini konveks bir bölgeye resmediyorsa $f(z)$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. S sınıfına ait konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.

$l(z) = \frac{1+z}{1-z}$ konveks bir fonksiyondur. Çünkü, $l(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ açık birim diskini sağ yarı düzleme resmeder.

2.1.23. Teorem. $f(z)$ fonksiyonu, $\mathbb{U}_R: |z| \leq R$ kapalı diskinde analitik, tek değerli ve yalınkat olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}_R$ kapalı diskini konveks bir bölgeye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart $C_R: |z| = R$ üzerindeki her z için

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \tag{2.4}$$

olmasıdır (Study 1913).

2.1.24. Teorem (Alexander Teoremi). $\mathbb{U}_R$ kapalı diskinde $f'(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}_R$ kapalı diskinde konveks olması için gerek ve yeter şart $F(z) = zf'(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}_R$ kapalı diskinde yıldızıl olmasıdır (Alexander 1915).

$f(z) \in S$ olsun. Bu durumda $r \leq 2 - \sqrt{3}$ için $|z| = r$ eğrisinin görüntüsü basit kapalı konveks bir eğridir. $2 - \sqrt{3}$ sayısı kesin olup bu sayıya S sınıfının konvekslik yarıçapı denir. Diğer yandan, S sınıfında, $r > 2 - \sqrt{3}$ için $|z| = r$ eğrisinin görüntüsü konveks bir eğri olmayacak şekilde bir fonksiyon vardır (Goodman 1983).

2.1.25. Tanım. f fonksiyonu $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik olsun. Bu durumda

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \tag{2.5}$$

eşitsizliğini sağlayan konveks bir g fonksiyonu ya da

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan yıldızıl bir g fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna konvekse yakın fonksiyon denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir (Kaplan 1952).

S sınıfının alt sınıfları olan S^*, K ve C sınıfları için $K \subset S^* \subset C \subset S$ bağıntısı sağlanır.

2.1.26. Tanım. $f \in S$ fonksiyonu, her $z \in \mathbb{U}$ için

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \tag{2.6}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna α-mertebeli yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir (Robertson 1936).

2.1.27. Tanım. $f \in S$ fonksiyonu, her $z \in \mathbb{U}$ için

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \tag{2.7}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna α-mertebeli konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $K(\alpha)$ ile gösterilir (Robertson 1936).

2.2. Harmonik Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

2.2.1. Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $u: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun D bölgesinde ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve bu kısmi türevler sürekli olsun. Bu durumda, her $z \in D$ için

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa u fonksiyonuna, D bölgesinde reel harmonik fonksiyon denir. f, $f: D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ olarak tanımlı fonksiyon olmak üzere u ve v fonksiyonları D bölgesinde reel harmonik fonksiyonlar ise f fonksiyonuna D bölgesinde harmoniktir denir.

Harmonik fonksiyonlar analitik olmak zorunda olmadığından analitik yalınkat fonksiyonlar için geçerli olan bazı özellikler harmonik yalınkat fonksiyonlar için geçerli değildir. Örneğin analitik fonksiyonlar bileşke işlemi altında korunmasına rağmen, harmonik fonksiyonlar korunmaz. Yani, f harmonik ve ϑ analitik fonksiyonları için $f \circ \vartheta$ harmonik olmasına rağmen, $\vartheta \circ f$ fonksiyonunun harmonik olması gerekmez. Analitik fonksiyonların sınıfı bir cebir oluşturmasına rağmen, harmonik fonksiyonların sınıfı oluşturmaz. Ayrıca bir harmonik yalınkat fonksiyonun tersi de harmonik olmak zorunda değildir. Üstelik harmonik fonksiyonların sınır davranışı, konform dönüşümlerin sınır davranışından çok daha karmaşıktır. Bununla birlikte, konform dönüşümlerin bilinen teorisi bir şekilde harmonik yalınkat fonksiyonlara taşınabilir (Duren 2004).

Harmonik yalınkat fonksiyonların konform olmak zorunda olmayan en temel örnekleri $|\alpha| \neq |\beta|$ olmak üzere $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \overline{z}$ şeklinde tanımlı afin dönüşümlerdir.

Başka bir örnek ise $k \geq 2$ için $f(z) = z + \frac{1}{k}\overline{z}^k$ şeklinde tanımlı harmonik yalınkat fonksiyonlardır. Bu fonksiyon, $\mathbb{U}$ açık birim diskini $|w| = \frac{k+1}{k}$ çemberi içinde kalan $k + 1$ köşeli bir çokgene dönüştürür (Duren 2004).

2.2.2. Yardımcı Teorem (Kanonik Gösterim). Basit bağlantılı bir D bölgesinde h ve g iki analitik fonksiyon olmak üzere f harmonik fonksiyonu

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu gösterim sabit farkıyla tektir.

İspat. u ve v basit bağlantılı bir D bölgesinde harmonik fonksiyonlar olmak üzere $f = u + iv$ harmonik fonksiyonu için

$$u = ReF = \frac{F + \overline{F}}{2}, v = ImG = \frac{G - \overline{G}}{2i}$$

olacak şekilde D bölgesinde analitik F ve G fonksiyonları vardır. Böylece

$$f = \frac{F + \overline{F}}{2} + i\frac{G - \overline{G}}{2i} = \left(\frac{F + G}{2}\right) + \left(\frac{\overline{F} - \overline{G}}{2}\right) = h + \overline{g}$$

şeklinde kanonik gösterimi elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.2. de verilen h fonksiyonuna f fonksiyonunun analitik kısmı, g fonksiyonuna f fonksiyonunun ko-analitik kısmı denir.

2.2.3. Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f = u + iv$ fonksiyonu D bölgesinde diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda $z_0 \in D$ için

$$J_f(z_0) = \begin{vmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} = u_x(z_0)v_y(z_0) - u_y(z_0)v_x(z_0)$$

şeklinde tanımlı $J_f(z_0)$ değerine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki Jakobiyeni denir. f fonksiyonu analitik ise $J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2$ dir.

Basit bağlantılı D bölgesinde harmonik olan $f = h + \overline{g}$ fonksiyonun bir $z_0 \in D$ noktasındaki Jakobiyeni

$$J_f(z_0) = |f_z(z_0)|^2 - |f_{\overline{z}}(z_0)|^2 = |h'(z_0)|^2 - |g'(z_0)|^2$$

dir.

2.2.4. Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve bu kısmi türevler sürekli olsun. Eğer her $z \in D$ için $J_f(z) > 0$ ise f fonksiyonuna D bölgesinde yön koruyan, $J_f(z) < 0$ ise f fonksiyonuna D bölgesinde yönü ters çeviren denir. Eğer f fonksiyonu yön koruyan ise $\overline{f}$ fonksiyonu yönü ters çevirendir.

2.2.5. Sonuç. $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonunun yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart $J_f(z) \neq 0$ olmasıdır. Ayrıca f fonksiyonu yön koruyan ise $J_f(z) > 0$ yani $|g'(z_0)| < |h'(z_0)|$ dir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

2.2.6. Tanım. $\mathbb{U}$ açık birim diskinde harmonik, yalınkat, yön koruyan ve $f(0) = f_z(0) - 1 = 0$ ile normalize edilmiş tüm fonksiyonların sınıfı SH ile gösterilir.

2.2.7. Tanım. $f \in SH$ fonksiyonlarından $g'(0) = b_1 = 0$ şartını sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı SH^0 ile gösterilir. h ve g fonksiyonları $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik ve

$$h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \,, g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k \tag{2.8}$$

şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonlar olmak üzere SH^0 sınıfına ait bir f fonksiyonu, $f = h + \overline{g}$ şeklinde gösterilir.

SH sınıfına ait fonksiyonlar yön koruyan olduğundan $|b_1| < |a_1| = 1$ dir. SH ve SH^0 sınıflarından birinden diğerine geçilebilir. Gerçekten, SH sınıfına ait her f fonksiyonu için

$$f_0 = \frac{f - \overline{b_1 f}}{1 - |b_1|^2}$$

fonksiyonu SH^0 sınıfına aittir. Tersine SH^0 sınıfına ait her f fonksiyonu için

$$f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$$

fonksiyonu SH sınıfına aittir. O halde SH^0 alt sınıfı için bulunan bazı sonuçlar SH sınıfına genelleştirilebilir. Ayrıca, S, SH ve SH^0 fonksiyon sınıfları için $S \subset SH^0 \subset SH$ kapsaması gerçeklenir.

2.2.8. Tanım. $t = 1,2$ için

$$f_t(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,t} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_{k,t} z^k} \tag{2.9}$$

ile seri açılımına sahip iki harmonik fonksiyonun konvolüsyonu (Hadamard çarpımı)

$$f_1(z) * f_2(z) = (f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,1} a_{k,2} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_{k,1} b_{k,2} z^k}$$

ile tanımlıdır. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonlarının ko-analitik kısımları sıfır ise bu tanım analitik fonksiyonlar için tanımlanan Hadamard çarpımını verir.

2.2.9. Tanım (Harmonik Koebe Fonksiyonu).

$h(z) = \dfrac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$ ve $g(z) = \dfrac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$ olmak üzere $\mathrm{K} = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonuna Harmonik Koebe Fonksiyonu denir.

2.2.10. Teorem. $h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ ve $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonlar olmak üzere $f = h + \overline{g} \in SH$ olsun. Bu durumda $\alpha = \sup\{|a_2| : f \in SH\}$ ve $|z| \leq r < 1$ için

$$|\arg h'(z)| \leq 2\alpha \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right),$$

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \leq |h'(z)| \leq \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}$$

ve

$$|f(z)| \leq 2\int_0^r \frac{(1+t)^{\alpha-1}}{(1-t)^{\alpha+1}}\,dt$$

dir (Sheil-Small 1990).

2.2.11. Sonuç. $f \in SH^0$ ise $z \in \mathbb{U}$ için

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4}\frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

dir. Böylece $\left\{w: |w| < \frac{1}{16}\right\} \subseteq f(\mathbb{U})$ dir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

2.2.12. Sonuç. SH^0 sınıfında bulunan her f fonksiyonu için $\left\{w: |w| < \frac{1}{6}\right\} \subset f(\mathbb{U})$ dir.

2.2.13. Sonuç. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ olsun. Bu durumda

$$\big||a_k| - |b_k|\big| \leq k$$

$$|a_k| \leq \frac{(2k+1)(k+1)}{6} \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{2.10}$$

$$|b_k| \leq \frac{(2k-1)(k-1)}{6} \quad (k = 2,3, \dots)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik hali Harmonik Koebe fonksiyonu için elde edilir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

2.2.14. Tanım. h ve g fonksiyonları $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik ve

$$h(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \,, g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \tag{2.11}$$

şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonlar olmak üzere $z \in \mathbb{U}$ için $Ref(z) > 0$ eşitsizliğini sağlayan bütün $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının sınıfı PH ile gösterilir. PH sınıfına ait fonksiyonlara $\mathbb{U}$ açık birim diskinde reel kısmı pozitif harmonik fonksiyon denir.

2.2.15. Teorem. PH sınıfı kompakt ve konvekstir.

2.2.16. Teorem. $f \in PH$ olsun. Bu durumda $|z| = r < 1$ için

$$\frac{1-r}{1+r} \le Ref(z) \le \frac{1+r}{1-r}$$

dir.

2.2.17. Teorem. h ve g, (2.11) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyonlar olmak üzere $f = h + \overline{g} \in PH$ ise $k = 1, 2, \ldots$ için

$$\big||a_k| - |b_k|\big| \le 2$$

dir. Eşitlik

$$f(z) = Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \mathrm{i}Im\left(\frac{1+3z}{1-z}\right)$$

fonksiyonu için sağlanır.

2.2.18. Tanım. $\mathbb{U}$ açık birim diskinin, SH (ya da SH^0) sınıfına ait f fonksiyonu altındaki görüntüsü yıldızıl bir bölge ise f fonksiyonuna harmonik yıldızıl fonksiyon denir ve harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı SH^* (ya da $SH^{*,0}$) ile gösterilir.

2.2.19. Tanım. $\mathbb{U}$ açık birim diskinin, SH (ya da SH^0) sınıfına ait f fonksiyonu altındaki görüntüsü konveks bir bölge ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir ve harmonik konveks fonksiyonların sınıfı KH (ya da KH^0) ile gösterilir.

2.2.20. Tanım. $\mathbb{U}$ açık birim diskinin, SH (ya da SH^0) sınıfına ait f fonksiyonu altındaki görüntüsü konvekse yakın bir bölge ise f fonksiyonuna harmonik konvekse yakın fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı CH (ya da CH^0) ile gösterilir.

2.2.21. Teorem. h ve g, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik iki fonksiyon ve $|g'(0)| < |h'(0)|$ olsun. Bu durumda, $|\varepsilon| = 1$ olacak şekildeki her ε için $h + \varepsilon g$, konvekse yakın bir fonksiyon ise $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu harmonik konvekse yakın bir fonksiyondur (Clunie ve Sheil-Small 1984).

2.2.22. Teorem. $f = h + \overline{g}$, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yerel yalınkat ve en az bir ε ($|\varepsilon| \leq 1$) için $h + \varepsilon g$ konveks bir fonksiyon ise f fonksiyonu harmonik yalınkat konvekse yakın bir fonksiyondur (Clunie ve Sheil-Small 1984).

2.3. Harmonik Sabordinasyon

Sabordinasyon analitik fonksiyonlar teorisinde önemli bir kavramdır. Bu bölümde, sabordinasyon kavramının harmonik fonksiyonlar için hangi şartlar altında geçerli olduğu incelenmiştir. Ayrıca katsayı bağıntıları ve jakobiyen majorizasyonu için bazı sonuçlar verilmiştir.

2.3.1. Tanım. Belli bir bölgede $|f(z)| \leq |F(z)|$ ise f fonksiyonu, F fonksiyonuna majorizedir denir.

f ve F fonksiyonları analitik olduğunda f fonksiyonunun F fonksiyonuna majorize olması için gerek ve yeter şart $\phi(z)$ Schwarz fonksiyonu olmak üzere $f(z) = \phi(z).F(z)$ olmasıdır.

Harmonik fonksiyonların majorizasyonu için bu doğru değildir. Çünkü, ϕ analitik fonksiyonu ile F harmonik fonksiyonunun çarpımı harmonik olamayabilir.

2.3.2. Tanım. f, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde harmonik yalınkat fonksiyon olmak üzere $f(z) = g\big(\omega(z)\big)$ olacak şekilde $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ özelliğinde $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik ve yalınkat bir ω fonksiyonu varsa f fonksiyonu g fonksiyonuna sabordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir.

g, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde harmonik yalınkat bir fonksiyon ve D, $f(0) \in D \subset f(\mathbb{U})$ özelliğinde basit bağlantılı bir bölge ise $f(\mathbb{U}) = D$ özelliğinde ve $g(z)$ fonksiyonuna sabordine olan yalnız bir f fonksiyonu vardır. Gerçekten ω, $\omega(0) = 0$ ve $\omega'(0) > 0$ özelliğinde ve $\mathbb{U}$ açık birim diskini $g^{-1}(D)$ bölgesine konform olarak dönüştüren bir dönüşüm olarak seçilirse Riemann dönüşüm teoremi gereği f fonksiyonu bir tektir. Üstelik $f = g \circ \omega$ sabordine fonksiyonu, $\mathbb{U}$ açık birim diskini D bölgesine dönüştüren harmonik bir dönüşüm ve $\omega'(0) > 0$ ile normalize edilmiş olarak bir tektir. Bu şartlar altında, $D \subset f(\mathbb{U})$ bölgesinde f harmonik dönüşümü g ye sabordinedir denir (Duren 2004).

Harmonik fonksiyonlar bileşke işlemi altında korunmadığından, bu tanım, $\omega(z)$ fonksiyonu analitik olduğunda tanımlıdır. Çünkü, ω fonksiyonu harmonik olursa f fonksiyonu harmonik olmak zorunda değildir. Diğer yandan, $\omega(0) = 0$ olduğundan f harmonik fonksiyonu $f(0) = 0$ özelliğinde olmalıdır. Ayrıca, analitik fonksiyonlar için doğru olan "$f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$ ise $f(z) \prec g(z)$ dir" önermesi harmonik fonksiyonlar için doğru değildir.

$f(z) = F\big(\psi(z)\big)$ olmak üzere $f = h + \overline{g} \prec F = H + \overline{G}$ ise $h(z) = H\big(\psi(z)\big)$, $g(z) = G\big(\psi(z)\big)$ ve $\omega(z) = \Omega\big(\psi(z)\big)$ olduğu açıktır. Burada ω ve Ω, sırasıyla f ve F

fonksiyonlarının analitik genişlemesidir. Buradan analitik sabordinasyon için ilk sonuçlar elde edilir.

2.3.3. Teorem. f ve F fonksiyonları

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k} \text{ ve } F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k} \tag{2.12}$$

şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonlar olmak üzere $f \prec F$ olsun. Bu durumda, $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |A_k|^2 \text{ ve } \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |B_k|^2$$

eşitsizlikleri sağlanır.

2.3.4. Teorem. f ve F, (2.12) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyonlar olmak üzere $f \prec F$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \cdots \ge 0$ ve $\beta_1 \ge \beta_2 \ge \cdots \ge 0$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |a_k|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |A_k|^2 \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k |b_k|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k |B_k|^2$$

dir.

Harmonik fonksiyonlar için de geçerli olan Littlewood'un (1944) bir sonucu aşağıdaki gibidir.

2.3.5. Teorem. f ve F, (2.12) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyonlar olmak üzere $f \prec F$ ise

(i) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ negatif olmayan, artmayan ve konveks ise $|a_n| \le A_1$

(ii) $B_1, B_2, \dots, B_n$ negatif olmayan, artmayan ve konveks ise $|b_n| \leq B_1$
(iii) $A_1, A_2, \dots, A_n$ negatif olmayan, azalmayan ve konveks ise $|a_n| \leq A_n$
(iv) $B_1, B_2, \dots, B_n$ negatif olmayan, azalmayan ve konveks ise $|b_n| \leq B_n$

dir.

Özel olarak, $\mathrm{K}(z)$, Harmonik Koebe Fonksiyonu olmak üzere $f(z) \prec \mathrm{K}(z)$ ise $|a_n| \leq (1/6)(2n+1)(n+1)$ ve $|b_n| \leq (1/6)(2n-1)(n-1)$ dir. Bu sonuç oldukça ilginçtir, çünkü bu sınırlar, SH^0 sınıfı için tahmin edilen kesin katsayı sınırlarıdır.

Şimdi, yerel yalınkat harmonik fonksiyonlar için bir afin ve lineer değişmez ailesi tanımı verilecek. Bu tanım, Sheill-Small'un (1990) $\mathbb{U}$ açık birim diskinde harmonik yalınkat fonksiyonlar için verdiği tanıma benzemektedir.

2.3.6. Tanım. $Aut(\mathbb{U})$, $\mathbb{U}$ açık birim diskinin analitik otomorfizmlerinin kümesi olmak üzere $f = h + \overline{g}$ yerel yalınkat harmonik fonksiyonunun Koebe dönüşümü,

$$T_\varphi\big(f(z)\big) = \frac{f\big(\varphi(z)\big) - f\big(\varphi(0)\big)}{\varphi'(0)h'\big(\varphi(0)\big)} \quad \big(\varphi \in Aut(\mathbb{U})\big)$$

ve afin dönüşümü,

$$A_\varepsilon\big(f(z)\big) = \frac{f(z) + \varepsilon\overline{f(z)}}{1 + \varepsilon g'(0)} \quad (|\varepsilon| < 1)$$

dir.

2.3.7. Tanım. L, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yerel yalınkat, harmonik ve $f(0) = 0$, $h'(0) = 1$ ile normalize edilmiş $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının ailesi olsun. Her $\psi \in Aut(\mathbb{U})$ ve $|\varepsilon| < 1$ için $f \in L$ olmak üzere $T_\varphi(f)$ ve $A_\varepsilon(f)$ fonksiyonları L ailesine ait ise L ailesine bir afin ve lineer değişmez $(ALIF)$ denir. Bu ailenin mertebesi $sup_{f\in L}|a_2(f)|$ olarak tanımlanır (Schaubroeck 2000).

2.3.8. Tanım. $ALIF\ L$ nin bir alt sınıfı olan L^0, $f \in L$ ve $g'(0) = 0$ şartlarını sağlayan fonksiyonların sınıfı olarak tanımlıdır.

CH ve KH sınıfları bir afin ve lineer değişmezdir. SH sınıfının bir afin ve lineer değişmez ailenin kapanışı olup olmadığı bilinmemektedir.

2.3.9. Teorem. L, α mertebeli bir $ALIF$ olmak üzere $f \in L^0$ ise $|z| = r$ için

$$J_f(z) \leq \frac{(1+r)^{2\alpha-2}}{(1-r)^{2\alpha+2}} = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2\alpha} \frac{1}{(1-r^2)^2} \tag{2.13}$$

dir. Eşitlik yalnızca, f analitik ve

$$f(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right] \tag{2.14}$$

fonksiyonunun bir rotasyonu olduğunda sağlanır.

İspat. Önce $f = h + \bar{g} \in L$ fonksiyonunu inceleyelim. $|z_0| < 1$ için

$$T_\varphi\big(f(z)\big) = \frac{f((z_0 + z)/(1 + \overline{z_0}z)) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)h'(z_0)} = H + \overline{G} \in L$$

dir. Bu durumda $T_\varphi\big(f(z)\big)$ için,

$$a_2(T) = \frac{1}{2}H''(0) = \frac{(1 - |z_0|^2)h''(z_0)}{2h'(z_0)} - \overline{z_0}$$

bulunur. Ayrıca hipotezden dolayı $|a_2(T)| \leq \alpha$ dır. Böylece $|z_0| = r$ için

$$\frac{-2\alpha + 2r}{1 - r^2} \leq \frac{1}{r} Re\left\{\frac{z_0 h''(z_0)}{h'(z_0)}\right\} \leq \frac{2\alpha + 2r}{1 - r^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte, $Re\{z_0 h''(z_0)/h'(z_0)\} = \rho(\partial/\partial\rho)\log|h'(\zeta)|$ olduğu kullanılır ve $0 \leq \rho \leq r$ olmak üzere $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ışını boyunca ρ ya göre integral alınırsa

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \leq |h'(z_0)| \leq \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}} \tag{2.15}$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi $f = h + \overline{g} \in L^0$ olduğunu kabul edelim. $|\varepsilon| < 1$ özelliğindeki her ε için, $f + \varepsilon\overline{f} = h + \varepsilon g + \overline{(g + \overline{\varepsilon} h)}$ fonksiyonu L ailesine aittir. O halde $|z| = r$ için

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \leq |h'(z) + \varepsilon g'(z)| \leq \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}$$

eşitsizliği elde edilir. ε uygun olarak seçilir ve $|\varepsilon| \to 1$ alırsa

$$|h'(z)| - |g'(z)| \leq \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}} \tag{2.16}$$

ve

$$|h'(z)| + |g'(z)| \leq \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}} \tag{2.17}$$

eşitsizlikleri bulunur.

(2.16) ile (2.17) eşitsizlikleri çarpıldığında (2.13) elde edilir.

Eşitliğin ispatı için, $J_f(z_1) = (1+R)^{2\alpha-2}/(1-R)^{2\alpha+2}$ eşitsizliğini sağlayan bir $z_1 = Re^{i\theta}$, $(R \neq 0)$ noktasının mevcut olduğunu kabul edelim. Bu takdirde hem (2.16) hem (2.17) de eşitlik sağlanır. Ayrıca, (2.16) ve (2.17) eşitsizlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$|g'(z_1)| = 0$ bulunur. Böylece, $|h'(z_1)| = (1+R)^{\alpha-1}/(1-R)^{\alpha+1}$ elde edilir. Şimdi, Campbell'in (1974a) kullandığına benzer bir yöntem kullanılarak $h(z)$ fonksiyonunun (2.14) de verilen fonksiyon olduğu ve böylece $g(z) \equiv 0$ olduğu gösterilecek. Diğer yandan, $e^{i\theta} f(e^{-i\theta} z)$ dönüşümü dikkate alınırsa $z = R > 0$ olduğu kabul edilebilir. Bu durumda, $|h'(R)| = (1+R)^{\alpha-1}/(1-R)^{\alpha+1}$ dir. O halde $0 \leq x < 1$ için,

$$u(x) = \log|h'(x)| - (\alpha - 1)\log(1+x) + (\alpha+1)\log(1-x)$$

ise $0 < x < 1$ için

$$u'(x) = Re\left(\frac{h''(x)}{h'(x)}\right) - \frac{2\alpha + 2x}{1-x^2}$$

pozitif değildir. Gerçekten, $u'(x_0)$ pozitif olacak şekilde bir $x_0 \in (0,1)$ mevcut olsaydı

$$\alpha \geq \sup_{z\in\mathbb{U}}\left|-\bar{z} + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \geq \left|-x_0 + \frac{1-{x_0}^2}{2}\frac{h''(x_0)}{h'(x_0)}\right| = \left|\alpha + \frac{1-{x_0}^2}{2}u'(x_0)\right| > \alpha$$

olurdu. Ayrıca, $u(0) = u(R) = 0$ ve $u'(x) \leq 0$ olduğundan $0 \leq x \leq R$ için $u(x) \equiv 0$ olmalıdır.

$$\Phi(z) = \log h'(z) - (\alpha-1)\log(1+z) + (\alpha+1)\log(1-z) = u(z) + iv(z)$$

olarak alınırsa

$$\Phi'(z) = \frac{h''(z)}{h'(z)} - \frac{2\alpha+2z}{1-z^2}$$

olur. $0 \leq x \leq R$ ve L^0 sınıfındaki bir $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu için $[0, R]$ de $u'(x) \equiv 0$ olduğundan

$$\alpha \geq \left|-x + \frac{1-x^2}{2}\frac{h''(x)}{h'(x)}\right| = \left|-x + \frac{1-x^2}{2}\left(\Phi'(x) + \frac{2\alpha+2x}{1-x^2}\right)\right| = \left|\alpha + \frac{1-x^2}{2}iv'(x)\right|$$

bulunur. Çelişkinin önlenmesi için $[0, R]$ de $v'(x) = 0$ olması gerekir. Dolayısıyla $[0, R]$ de $\Phi'(z) \equiv 0$ olduğundan her $z \in \mathbb{U}$ için $\Phi'(z) = 0$ elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü (2.14) deki fonksiyonu verir.

2.3.10. Teorem. f fonksiyonu α mertebeli $ALIF\ L$ sınıfına ait ise $|z| = r$ için

$$\frac{(1-r)^{2\alpha-2}}{(1+r)^{2\alpha+2}} \leq J_f(z) \leq \frac{(1+r)^{2\alpha-2}}{(1-r)^{2\alpha+2}} = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2\alpha} \frac{1}{(1-r^2)^2} \tag{2.18}$$

dir.

İspat. Bu teoremin ispatı için,

$$S_\varphi\big(f(z)\big) = \frac{\overline{h'(z_0)}\Big(f\big(\varphi(z)\big) - f(z_0)\Big) - \overline{g'(z_0)}\Big(\overline{f\big(\varphi(z)\big)} - \overline{f(z_0)}\Big)}{\varphi'(0)J_f(z_0)}$$

dönüşümü kullanılacak. Bu dönüşüme dikkat edilirse, $f \in L$ olduğunda $S_\varphi\big(f(z)\big) \in L^0$ dır. Ayrıca $\varepsilon_0 = -\overline{g'\big(\varphi(0)\big)}/h'\big(\varphi(0)\big)$ olmak üzere $S_\varphi\big(f(z)\big) = A_{\varepsilon_0} \circ T_\varphi\big(f(z)\big)$ dir.

$f \in L$ ise $S_\varphi\big(f(z)\big) \in L$ olduğu açıktır. $\varphi(0) = z_0$ olmak üzere $H(z, z_0)$, $S_\varphi\big(f(z)\big)$ nin analitik kısmı olsun. Bu durumda, S_φ nin tanımından

$$H(z, z_0) = \frac{\overline{h'(z_0)}\Big(h\big(\varphi(z)\big) - h(z_0)\Big) - \overline{g'(z_0)}\Big(g\big(\varphi(z)\big) - g(z_0)\Big)}{(1-|z_0|^2)J_f(z_0)}$$

olduğu kolayca görülür. A_2, $S_\varphi\big(f(z)\big)$ nin kuvvet seri açılımındaki z^2 teriminin katsayısı olmak üzere, basit bir hesaplamayla

$$2A_2 = H''(0, z_0) = (1-|z_0|^2)\frac{\overline{h'(z_0)}h''(z_0) - \overline{g'(z_0)}g''(z_0)}{J_f(z_0)} - 2\overline{z_0} \tag{2.19}$$

olarak bulunur.

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} h'(z) & \overline{g'(z)} \\ g'(z) & \overline{h'(z)} \end{vmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} J_f(z) &= \frac{\partial}{\partial z} J_f(z) \frac{dz}{dr} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}} J_f(z) \frac{d\overline{z}}{dr} \\ &= \begin{vmatrix} h''(z) & \overline{g'(z)} \\ g''(z) & \overline{h'(z)} \end{vmatrix} e^{i\theta} + \begin{vmatrix} h'(z) & \overline{g''(z)} \\ g'(z) & \overline{h''(z)} \end{vmatrix} e^{-i\theta} = 2Re\left\{e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial z} J_f(z)\right\}\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınır ve (2.19) eşitliğinde $z_0 = re^{i\theta}$ olarak alınırsa

$$\frac{2A_2}{1-r^2} = \frac{\partial}{\partial z} \log J_f\left(re^{i\theta}\right) - \frac{2re^{-i\theta}}{1-r^2}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $e^{i\theta}$ ile çarpılır ve reel kısmı alınırsa

$$Re\left\{A_2 e^{i\theta} \frac{d}{dr} \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \log J_f\left(re^{i\theta}\right) + \frac{d}{dr} \log(1-r^2)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu eşitliğin her iki yanı 2 ile çarpılıp, $|A_2| \leq \alpha$ olduğu dikkate alınırsa

$$-2\alpha \frac{d}{dr} \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \leq \frac{\partial}{\partial r} \log J_f\left(re^{i\theta}\right) + 2\frac{d}{dr} \log(1-r^2) \leq 2\alpha \frac{d}{dr} \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki yanının integrali alınarak

$$\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{-2\alpha} \leq \log J_f\left(re^{i\theta}\right)(1-r^2)^2 \leq \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2\alpha}$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

2.3.11. Lemma. f fonksiyonu α mertebeli $ALIF\ L$ sınıfına ait ise

$$\frac{J_f(x)}{J_f(z_0)} \leq \left(\frac{1+\left|\frac{x-z_0}{1-\overline{z_0}x}\right|}{1-\left|\frac{x-z_0}{1-\overline{z_0}x}\right|}\right)^{2\alpha} \left(\frac{1-|z_0|^2}{1-|x|^2}\right)^2$$

dir.

$f \in L^0$ fonksiyonu için de aynı eşitsizlik sağlanır. Eşitlik sadece f fonksiyonu analitik ve (2.14) de verilen formda olduğunda sağlanır.

İspat. Teorem 2.3.10. dan

$$J_{S(f)}(z) \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2\alpha} \frac{1}{(1-r^2)^2}$$

dir. Diğer yandan basit bir hesaplamayla

$$J_{S(f)}(z) = \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|z_0|^2)^2} \frac{J_f(\varphi(z))}{J_f(z_0)}\ ;\ \ \varphi(z) = \frac{z_0+z}{1+\overline{z_0}z} \in Aut(\mathbb{U})$$

bulunur. Böylece

$$\frac{J_f(\varphi(z))}{J_f(z_0)} \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2\alpha} \left(\frac{1-|z_0|^2}{1-|x|^2}\right)^2 \frac{1}{|\varphi'(z)|^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda, $z = \frac{x-z_0}{1-\overline{z_0}x}$ olarak alınırsa $\varphi(z) = x$ ve

$$\varphi'(z) = \frac{(1-\overline{z_0}x)^2}{1-|z_0|^2}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar. $f \in L^0$ için eşitlik sadece Teorem 2.3.10. un ispatındaki eşitlik varsa sağlanır.

2.3.12. Teorem. F fonksiyonu α mertebeli $ALIF\ L$ sınıfına ya da L^0 sınıfına ait ve $1{,}65 \leq \alpha \leq \infty$ olsun. Bu durumda $f \prec F$ ise $|z| \leq r = \alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}$ için $J_f(z) \leq J_F(z)$ dir.

İspat. $f \prec F$ olduğundan $f(z) = F\big(\psi(z)\big)$ ve $J_f(z) = |\psi'(z)| J_F\big(\psi(z)\big)$ dir. Böylece Lemma 2.3.11. gereği

$$\frac{J_F\big(\psi(z_0)\big)}{J_F(z_0)} \leq \left(\frac{1 + \left|\frac{\psi(z_0) - z_0}{1 - \overline{z_0}\psi(z_0)}\right|}{1 - \left|\frac{\psi(z_0) - z_0}{1 - \overline{z_0}\psi(z_0)}\right|}\right)^{2\alpha} \left(\frac{1 - |z_0|^2}{1 - |\psi(z_0)|^2}\right)^2$$

ya da denk olarak

$$\frac{J_f(z_0)}{J_F(z_0)} \leq |\psi'(z_0)|^2 \left(\frac{1 - |z_0|^2}{1 - |\psi(z_0)|^2}\right)^2 \left(\frac{|1 - \overline{z_0}\psi(z_0)| + |\psi(z_0) - z_0|}{|1 - \overline{z_0}\psi(z_0)| - |\psi(z_0) - z_0|}\right)^{2\alpha}$$

eşitsizliği elde edilir.

Campbell (1974b), $|z| \leq r = \alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}$ için bu ifadenin birden büyük olmadığını gösterdi. Campbell (1974b), $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$F(z) = \frac{1}{2\alpha}\left\{1 - \left(\frac{1 - z}{1 + z}\right)^{\alpha}\right\}$$

ve

$$\psi(z) = \frac{z(a + z)}{(1 + az)} \quad (0 \leq a \leq 1)$$

için bunun mümkün olan en iyi sınır olduğunu gösterdi. $f \in L^0$ için eşitlik yalnızca f fonksiyonu analitik ve (2.14) de verilen formda olduğunda sağlandığından L^0 sınıfında, bu kesin sınırlara sahip olan harmonik fonksiyon yoktur.

2.3.13. Sonuç. $F \in KH$ olmak üzere $f \prec F$ ise $|z| \leq 3-\sqrt{8}$ için $J_f(z) \leq J_F(z)$ dir.

2.3.14. Sonuç. $F \in CH$ olmak üzere $f \prec F$ ise $|z| \leq 4-\sqrt{15}$ için $J_f(z) \leq J_F(z)$ dir.

Mertebesi $|a_2|$ nin supremumu olarak tanımlı fonksiyon aileleri incelendiğinde, analitik olmayan kısım ihmal edildiğinden bazı bilgiler kaybedilebilir. Bu nedenle, bölümün geri kalan kısmında, $\alpha = sup\{|a_2|: f \in L\}$ ve $\beta = sup\{|b_2|: f \in L\}$ olmak üzere $\alpha+\beta$ mertebeli $ALIF$ sınıfları incelenecektir.

2.3.15. Teorem. f fonksiyonu $\alpha + \beta$ mertebeli $ALIF$ L sınıfına ait olsun. Bu durumda, $|z| = r$ olmak üzere

$$\frac{(1-r)^{2\alpha+2\beta-1}}{(1+r)^{2\alpha+2\beta+3}} \leq J_f(z) \leq \frac{(1+r)^{2\alpha+2\beta-1}}{(1-r)^{2\alpha+2\beta+3}} \tag{2.20}$$

dir.

İspat. Teorem 2.3.10. un ispatındaki gibi $S_\varphi(f(z))$ dönüşümü kullanılacaktır. $A_2 = a_2(S_\varphi)$ ve $B_2 = b_2(S_\varphi)$ ise $\varphi(0) = z_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &2A_2 + 2B_2 \\ &= (1-|z_0|^2)\left(\frac{\overline{h'(z_0)}h''(z_0) - \overline{g'(z_0)}g''(z_0) + h'(z_0)g''(z_0) - g'(z_0)h''(z_0)}{J_f(z_0)}\right) - 2\overline{z_0} \end{aligned} \tag{2.21}$$

dir. $J_f(z_0) = |h'(z_0)|^2(1-|\omega(z_0)|^2)$ ve $\omega(z_0) = g'(z_0)/h'(z_0)$ olduğundan

$$\omega'(z_0) = \frac{h'(z_0)g''(z_0) - g'(z_0)h''(z_0)}{\left(h'(z_0)\right)^2}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{\overline{h'(z_0)}h''(z_0) - \overline{g'(z_0)}g''(z_0)}{J_f(z_0)} = \frac{\frac{\partial}{\partial z}J_f\left(re^{i\theta}\right)}{J_f(re^{i\theta})}$$

dir. Bu iki eşitlik, (2.21) de yerine yazılır, $z_0 = re^{i\theta}$ olarak alınır ve eşitliğin her iki yanı $(1 - r^2)$ ile bölünürse,

$$\frac{2A_2 + 2B_2}{1 - r^2} = \frac{-2re^{-i\theta}}{1 - r^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial z}J_f\left(re^{i\theta}\right)}{J_f(re^{i\theta})} + \frac{h'\left(re^{i\theta}\right)\omega'\left(re^{i\theta}\right)}{\overline{h'(re^{i\theta})}(1 - |\omega(re^{i\theta})|^2)}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $e^{i\theta}$ ile çarpılır ve reel kısmı alınırsa

$$Re\{e^{i\theta}(A_2 + B_2)\}\frac{d}{dr}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$
$$= \frac{d}{dr}\log(1 - r^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\log J_f\left(re^{i\theta}\right) + Re\left\{\frac{e^{i\theta}\, h'\left(re^{i\theta}\right)\omega'\left(re^{i\theta}\right)}{\overline{h'(re^{i\theta})}(1 - |\omega(re^{i\theta})|^2)}\right\}$$

bulunur ve bu eşitliğin her iki yanı 2 ile çarpılır, $|A_2|$ ve $|B_2|$ nin sınırları kullanılırsa

$$-(2\alpha + 2\beta)\frac{d}{dr}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \leq \frac{d}{dr}\log(1 - r^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\log J_f\left(re^{i\theta}\right) + 2\left|\frac{\omega'\left(re^{i\theta}\right)}{1 - |\omega(re^{i\theta})|^2}\right| \tag{2.22}$$

ve

$$\frac{d}{dr}\log(1 - r^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\log J_f\left(re^{i\theta}\right) - 2\left|\frac{\omega'\left(re^{i\theta}\right)}{1 - |\omega(re^{i\theta})|^2}\right| \leq (2\alpha + 2\beta)\frac{d}{dr}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \tag{2.23}$$

elde edilir. $\omega(z)$, Schwarz fonksiyonu olduğu için

$$|\omega'(z)| \leq \frac{1 - |\omega(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

dir. Bu eşitsizlik, (2.22) ve (2.23) eşitsizliklerine uygulanıp, integral alındıktan sonra her iki tarafın eksporensiyeli alınır ve sadeleştirme yapılırsa (2.20) eşitsizliği elde edilir.

2.3.16. Lemma. f fonksiyonu $\alpha+\beta$ mertebeli $ALIF\ L$ sınıfına ait ise

$$\frac{J_f(x)}{J_f(z_0)} \leq \left(\frac{1+\left|\frac{x-z_0}{1-\overline{z_0}x}\right|}{1-\left|\frac{x-z_0}{1-\overline{z_0}x}\right|}\right)^{2\alpha+2\beta+1} \left(\frac{1-|z_0|^2}{1-|x|^2}\right)^2$$

dir.

İspat. f, $\alpha+\beta$ mertebeli $ALIF\ L$ sınıfında iken (2.20) den

$$J_{S(f)}(z) \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2\alpha+2\beta+1} \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \tag{2.24}$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca basit bir hesaplamayla

$$J_{S(f)}(z) = \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|z_0|^2)^2}\frac{J_f(\varphi(z))}{J_f(z_0)} \tag{2.25}$$

bulunur. Böylece (2.24) ve (2.25) den

$$\frac{J_f(\varphi(z))}{J_f(z_0)} \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2\alpha+2\beta+1} \left(\frac{1-|z_0|^2}{1-|x|^2}\right)\frac{1}{|\varphi'(z)|^2}$$

eşitsizliği elde edilir. $z = \frac{x-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ olsun. O halde, $\varphi(z) = x$ ve

$$\varphi'(z) = \frac{(1-\overline{z_0}x)^2}{1-|z_0|^2}$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

2.3.17. Teorem. f, $\alpha+\beta$ mertebeli $ALIF\ L$ sınıfına ait fonksiyon, $1{,}15 \leq \alpha+\beta < \infty$, $f \prec F$ ve $f_z(0) \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$|z| \leq r = \alpha+\beta+\frac{3}{2}-\sqrt{\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)^2+2\alpha+2\beta+1}$$

için $J_f(z) \leq J_F(z)$ dir.

İspat. $f \prec F$ olduğundan $f(z) = F(\psi(z))$ ve $J_f(z) = |\psi'(z)| J_F(\psi(z))$ dir. Lemma 2.3.16. gereği

$$\frac{J_F(\psi(z_0))}{J_F(z_0)} \leq \left(\frac{1+\left|\frac{\psi(z_0)-z_0}{1-\overline{z_0}\psi(z_0)}\right|}{1-\left|\frac{\psi(z_0)-z_0}{1-\overline{z_0}\psi(z_0)}\right|}\right)^{2\alpha+2\beta+1} \left(\frac{1-|z_0|^2}{1-|\psi(z_0)|^2}\right)^2$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{J_f(z_0)}{J_F(z_0)} \leq |\psi'(z_0)|^2 \left(\frac{1-|z_0|^2}{1-|\psi(z_0)|^2}\right)^2 \left(\frac{|1-\overline{z_0}\psi(z_0)|+|\psi(z_0)-z_0|}{|1-\overline{z_0}\psi(z_0)|-|\psi(z_0)-z_0|}\right)^{2\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)} \tag{2.26}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Campbell (1974b), bir ifadenin tam karesi olan, (2.26) nın sağ tarafının $|z| \leq r = \left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)+1-\sqrt{\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)}$ için birden büyük olmadığını gösterdi.

3. SABORDİNASYON İLE TANIMLANAN HARMONİK FONKSİYON SINIFLARI

Bu bölümde, sabordinasyon yardımıyla tanımlanan harmonik fonksiyon sınıfları tanıtılmış ve bu sınıflara ait fonksiyonlar için bazı sonuçlar elde edilmiştir.

3.1. $SH^*(A,B)$ ve $H^n(A,B)$ Sınıfları

Salagean (1983), $f \in S$ için $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere D^n diferansiyel operatörünü tanımladı. Jahangiri ve ark. (2002), (2.8) ile verilen seri açılımına sahip $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonu için modifiye edilmiş Salagean operatörünü

$$D^0 f(z) = h(z) + \overline{g(z)},$$

$$D^1 f(z) = Df(z) = zh'(z) - \overline{zg'(z)} \qquad (3.1)$$

$$\vdots$$

$$D^n f(z) = D^1\big(D^{n-1} f(z)\big), \ \ n \in \mathbb{N} \qquad (3.2)$$

olarak tanımladı. Burada, (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$D^n h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k, \ \ D^n g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k^n b_k z^k$$

olmak üzere

$$D^n f(z) = D^n h(z) + (-1)^n \overline{D^n g(z)}$$

elde edilir.

3.1.1. Tanım. $-B \leq A < B \leq 1$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{Df(z)}{f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{3.3}$$

olacak şekildeki $f \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı $SH^*(A,B)$ ile gösterilir (Dziok 2015).

3.1.2. Tanım. $-B \leq A < B \leq 1$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{3.4}$$

olacak şekildeki $f \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı $H^n(A,B)$ ile gösterilir (Dziok ve ark. 2016).

3.1.3. Tanım. $z \in \mathbb{U}$ için

$$f = h + \overline{g} = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| z^k + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| \overline{z}^k \tag{3.5}$$

ile verilen seri açılımına sahip fonksiyonların sınıfı T^n ile gösterilir.

Bu tanımdan, $S\mathrm{T}^*(A,B) = \mathrm{T}^0 \cap SH^*(A,B)$ ve $H\mathrm{T}^n(A,B) = \mathrm{T}^n \cap H^n(A,B)$ alt sınıfları elde edilir.

Önce, bir harmonik fonksiyonun $SH^*(A,B)$ ve $H^n(A,B)$ sınıflarına ait olması için gerekli ve yeterli konvolüsyon şartı verilecek.

3.1.4. Teorem. Bir f fonksiyonunun $SH^*(A,B)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart $f \in SH^0$ ve $z \in \mathbb{U}\backslash\{0\}$ için

$$\varphi_1(z;\zeta) = \frac{(B-A)\zeta z + (1+A\zeta)z^2}{(1-z)^2} - \frac{2\overline{z} + (A+B)\zeta\overline{z} - (1+A\zeta)\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2}$$

olmak üzere

$$f(z) * \varphi_1(z;\zeta) \neq 0 \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1)$$

olmasıdır.

İspat. $f \in SH^0$ olsun. $f \in SH^*(A,B)$ olması için gerek ve yeter şart (3.3) ile verilen şartın sağlanması ya da bu şarta denk olarak

$$\frac{Df(z)}{f(z)} \neq \frac{1+A\zeta}{1+B\zeta} \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Buradan

$$zh'(z) = h(z) * \frac{z}{(1-z)^2} \text{ ve } h(z) = h(z) * \frac{z}{1-z}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
&(1+B\zeta)Df(z) - (1+A\zeta)f(z) \\
&\qquad = (1+B\zeta)zh'(z) - (1+A\zeta)h(z) - \left[(1+B\zeta)\overline{zg'(z)} + (1+A\zeta)\overline{g(z)}\right] \\
&\qquad = h(z) * \left(\frac{(1+B\zeta)z}{(1-z)^2} - \frac{(1+A\zeta)z}{1-z}\right) - \overline{g(z)} * \left(\frac{(1+B\zeta)\overline{z}}{(1-\overline{z})^2} + \frac{(1+A\zeta)\overline{z}}{1-\overline{z}}\right) \\
&\qquad = f(z) * \varphi_1(z;\zeta) \neq 0
\end{aligned}$$

bulunur.

3.1.5. Teorem. Bir f fonksiyonunun $H^n(A,B)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart $f \in SH^0$ ve $z \in \mathbb{U}\backslash\{0\}$ için

$$\varphi_2(z;\zeta) = \frac{(B-A)\zeta z + (1+A\zeta)z^2}{(1-z)^2} - (-1)^n \frac{2\overline{z} + (A+B)\zeta\overline{z} - (1+A\zeta)\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2}$$

olmak üzere

$$D^n f(z) * \varphi_2(z;\zeta) \neq 0 \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1)$$

olmasıdır.

İspat. $f \in SH^0$ olsun. $f \in H^n(A,B)$ olması için gerek ve yeter şart (3.4) ile verilen şartın sağlanması ya da bu şarta denk olarak

$$\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} \neq \frac{1+A\zeta}{1+B\zeta} \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Buradan

$$D^{n+1}h(z) = D^n h(z) * \frac{z}{(1-z)^2} \text{ ve } D^n h(z) = D^n h(z) * \frac{z}{1-z}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
&(1+B\zeta)D^{n+1}f(z) - (1+A\zeta)D^n f(z) \\
&\quad = (1+B\zeta)D^{n+1}h(z) - (1+A\zeta)D^n h(z) - (-1)^n \left[(1+B\zeta)\overline{D^{n+1}g(z)} + (1+A\zeta)\overline{D^n g(z)}\right] \\
&\quad = D^n h(z) * \left(\frac{(1+B\zeta)z}{(1-z)^2} - \frac{(1+A\zeta)z}{1-z}\right) - (-1)^{n+1}\overline{D^n g(z)} * \left(\frac{(1+B\zeta)\overline{z}}{(1-\overline{z})^2} + \frac{(1+A\zeta)\overline{z}}{1-\overline{z}}\right) \\
&\quad = D^n f(z) * \varphi_2(z;\zeta) \neq 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, bir f harmonik fonksiyonunun $SH^*(A,B)$ ve $H^n(A,B)$ sınıflarına ait olması için yeterli olan katsayı sınırları verilecek.

3.1.6. Teorem. $z \in \mathbb{U}$ için,

$$\gamma_k = k^n\big(k(1+B) - (1+A)\big) \text{ ve } \delta_k = k^n\big(k(1+B) + (1+A)\big) \tag{3.6}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\gamma_k|a_k| + \delta_k|b_k|) \leq B - A \tag{3.7}$$

ise (2.8) ile verilen f harmonik fonksiyonu $H^n(A,B)$ sınıfına aittir.

İspat. $f(z) = z$ fonksiyonu için teoremin doğru olduğu açıktır. Bu yüzden, $k \geq 2$ için $a_k \neq 0$ ya da $b_k \neq 0$ olduğu kabul edilir. (3.7) gereği $\gamma_k \geq k(B-A)$ ve $\delta_k \geq k(B-A)$ olduğundan

$$|h'(z)| - |g'(z)| \geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k||z|^k - \sum_{k=2}^{\infty} k|b_k||z|^k \geq 1 - |z|\sum_{k=2}^{\infty} k(|a_k| + |b_k|)$$
$$\geq 1 - \frac{|z|}{B-A}\sum_{k=2}^{\infty}(\gamma_k|a_k| + \delta_k|b_k|) \geq 1 - |z| > 0$$

bulunur. Bu eşitsizlik, f fonksiyonunun, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yerel yalınkat ve yön koruyan olduğunu gösterir. Diğer yandan $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ için $z_1 \neq z_2$ ise

$$\left|\frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2}\right| = \left|\sum_{m=1}^{k} {z_1}^{m-1}\,{z_2}^{k-m}\right| \leq \sum_{m=1}^{k} |z_1|^{m-1}\,|z_2|^{k-m} < k \quad (k = 2, 3, \dots)$$

dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
|f(z_1)-f(z_2)| &\geq |h(z_1)-h(z_2)|-|g(z_1)-g(z_2)| \\
&= \left|z_1 - z_2 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k\,({z_1}^k - {z_2}^k)\right| - \left|\sum_{k=2}^{\infty} b_k({z_1}^k - {z_2}^k)\right| \\
&\geq |z_1 - z_2| - \sum_{k=2}^{\infty}|a_k||{z_1}^k - {z_2}^k| - \sum_{k=2}^{\infty}|b_k||{z_1}^k - {z_2}^k| \\
&= |z_1 - z_2|\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\left|\frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2}\right| - \sum_{k=2}^{\infty}|b_k|\left|\frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2}\right|\right) \\
&> |z_1 - z_2|\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k| - \sum_{k=2}^{\infty} k|b_k|\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizlik f fonksiyonunun, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yalınkat olduğunu gösterir. Ayrıca, $f \in H^n(A,B)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}$ için

$$
\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} = \frac{1 + A\omega(z)}{1 + B\omega(z)}
$$

olacak şekilde $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$ özelliğinde kompleks değerli bir ω fonksiyonunun mevcut olmasıdır. Bu durumda,

$$
\left|\frac{D^{n+1}f(z) - D^n f(z)}{BD^{n+1}f(z) - AD^n f(z)}\right| < 1 \tag{3.8}
$$

dir. Buradan, $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ için (3.8) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
&|D^{n+1}f(z) - D^n f(z)| - |BD^{n+1}f(z) - AD^n f(z)| \\
&\quad = \left|\sum_{k=2}^{\infty} k^n(k-1)a_k z^k - (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} k^n(k+1)\overline{b_k z^k}\right| \\
&\qquad - \left|(B-A)z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n(Bk-A)a_k z^k + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} k^n(Bk+A)\overline{b_k z^k}\right|
\end{aligned}
$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} k^n(k-1)|a_k|r^k + \sum_{k=2}^{\infty} k^n(k+1)|b_k|r^k - (B-A)r$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} k^n(Bk-A)|a_k|r^k + \sum_{k=2}^{\infty} k^n(Bk+A)|b_k|r^k$$

$$\leq r\left\{\sum_{k=2}^{\infty}(\gamma_k|a_k| + \delta_k|b_k|)r^{k-1} - (B-A)\right\} < 0$$

bulunur. Böylece $f \in H^n(A,B)$ dır.

3.1.7. Teorem. $f \in SH^0$, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ve

$$\alpha_k = k(1+B) - (1+A) \text{ ve } \beta_k = k(1+B) + (1+A) \tag{3.9}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k|a_k| + \beta_k|b_k| \leq 2(B-A) \tag{3.10}$$

ise $f \in SH^*(A,B)$ dir.

Şimdi de $H\mathrm{T}^n(A,B)$ ve $S\mathrm{T}^*(A,B)$ sınıfına ait f fonksiyonları için gerekli ve yeterli katsayı koşulları incelenecek.

3.1.8. Teorem. f, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $f \in H\mathrm{T}^n(A,B)$ olması için gerek ve yeter şart (3.7) ile verilen eşitsizliğin sağlanmasıdır.

İspat. (3.7) ile verilen eşitsizlik sağlanıyorsa $f \in H\mathrm{T}^n(A,B)$ olduğu Teorem 3.1.6. da kullanılan yöntemler izlenerek gösterilir. Tersine, $f \in H\mathrm{T}^n(A,B)$ olsun. O halde (3.8) eşitsizliğinden, $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty} k^n \left[(k-1)a_k z^k + (-1)^n (k+1)\overline{b_k z^k}\right]}{(B-A)z - \sum_{k=2}^{\infty} k^n \left[(Bk-A)a_k z^k + (-1)^n (Bk+A)\overline{b_k z^k}\right]}\right| < 1$$

ve $|z| = r < 1$ için

$$\frac{\sum_{k=2}^{\infty} k^n [(k-1)|a_k| + (k+1)|b_k|] r^{k-1}}{(B-A) - \sum_{k=2}^{\infty} k^n [(Bk-A)|a_k| + (Bk+A)|b_k|] r^{k-1}} < 1$$

bulunur. Buradan γ_k ve δ_k, (3.6) ile verilen katsayılar olmak üzere $0 \leq r < 1$ için

$$\sum_{k=2}^{\infty} [\gamma_k |a_k| + \delta_k |b_k|] r^{k-1} \leq B - A \tag{3.11}$$

elde edilir.

$\sum_{k=2}^{\infty} [\gamma_k |a_k| + \delta_k |b_k|]$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{\sigma_k\}$ olsun. Bu durumda, $\{\sigma_k\}$, azalmayan ve (3.11) eşitsizliğinden $B - A$ ile üstten sınırlı bir dizidir. O halde, dizi yakınsak ve

$$\sum_{k=2}^{\infty} [\gamma_k |a_k| + \delta_k |b_k|] = \lim_{k \to \infty} \sigma_k \leq B - A$$

dir.

3.1.9. Teorem. f, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $f \in S\mathrm{T}^*(A, B)$ olması için gerek ve yeter şart (3.10) ile verilen eşitsizliğin sağlanmasıdır.

3.1.10. Teorem. $H\mathrm{T}^n(A, B)$ ve $S\mathrm{T}^*(A, B)$ sınıfları SH^0 sınıfının konveks ve kompakt alt sınıflarıdır.

İspat. $0 \leq \mu \leq 1$ ve $f_1, f_2 \in H\mathrm{T}^n(A,B)$ fonksiyonları (2.9) ile verilen seri açılımına sahip olsunlar. O halde

$$\mu f_1(z) + (1-\mu) f_2(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\mu|a_{1,k}| + (1-\mu)|a_{2,k}|\right) z^k + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} \left(\mu|b_{1,k}| + (1-\mu)|b_{2,k}|\right) \overline{z}^k$$

dir ve buradan

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} \left\{\gamma_k \left|\mu|a_{1,k}| + (1-\mu)|a_{2,k}|\right| + \delta_k \left|\mu|b_{1,k}| + (1-\mu)|b_{2,k}|\right|\right\} \\
&\qquad = \mu \sum_{k=2}^{\infty} \left\{\gamma_k|a_{1,k}| + \delta_k|b_{1,k}|\right\} + (1-\mu) \sum_{k=2}^{\infty} \left\{\gamma_k|a_{2,k}| + \delta_k|b_{2,k}|\right\} \\
&\qquad \leq \mu(B-A) + (1-\mu)(B-A) = B - A
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\mu f_1 + (1-\mu) f_2 \in H\mathrm{T}^n(A,B)$ dir. Bu ise $H\mathrm{T}^n(A,B)$ sınıfının konveks olduğunu gösterir.

Diğer yandan, $f \in H\mathrm{T}^n(A,B)$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere $|z| \leq r$ için

$$|f(z)| \leq r + \sum_{k=2}^{\infty} \{|a_k| + |b_k|\} r^k \leq r + \sum_{k=2}^{\infty} \{\gamma_k|a_k| + \delta_k|b_k|\} r^k \leq r + (B-A)$$

dir. O halde $H\mathrm{T}^n(A,B)$ yerel olarak düzgün sınırlıdır. Ayrıca f_t, (2.9) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ve $f = h + \overline{g}$, (2.8) ile verilen seri verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, Teorem 3.1.8. kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\{\gamma_k|a_{t,k}| + \delta_k|b_{t,k}|\right\} \leq B - A$$

elde edilir. Burada, $f_t \to f$ olduğu kabul edilirse $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k \to \infty$ iken $|a_{t,k}| \to |a_k|$ ve $|b_{t,k}| \to |b_k|$ dır. $\{\sigma_k\}$, $\sum_{k=2}^{\infty}[\gamma_k|a_k| + \delta_k|b_k|]$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Bu durumda, $\{\sigma_k\}$, azalmayan ve $B-A$ ile üstten sınırlı bir dizi olduğundan yakınsak ve

$$\sum_{k=2}^{\infty}[\gamma_k|a_k|+\delta_k|b_k|]=\lim_{k\to\infty}\sigma_k\leq B-A$$

dir. Bu eşitsizlik $f\in H\mathrm{T}^n(A,B)$ olduğunu ve dolayısıyla $H\mathrm{T}^n(A,B)$ sınıfının kapalı olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $H\mathrm{T}^n(A,B)$ sınıfı kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır. $S\mathrm{T}^*(A,B)$ sınıfının konveks ve kompakt olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Sıradaki teoremlerde $H\mathrm{T}^n(A,B)$ ve $S\mathrm{T}^*(A,B)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı incelenecektir. Ayrıca, bu teoremlerde kullanılacak olan bir Lemma verilecek.

3.1.11. Lemma. $f=h+\overline{g}$, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ve $0\leq\alpha<1$ olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\frac{k-\alpha}{1-\alpha}|a_k|+\frac{k+\alpha}{1-\alpha}|b_k|\right\}\leq 1\quad(z\in\mathbb{U})$$

olsun. Bu durumda f, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde harmonik, yalınkat ve yön koruyan ve α mertebeli yıldızıl fonksiyondur (Jahangiri 1999).

3.1.12. Teorem. γ_k ve δ_k, (3.6) ile verilen katsayılar ve $0\leq\alpha<1$ olsun. Bu durumda

$$r_\alpha^*\big(H\mathrm{T}^n(A,B)\big)=\inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{\gamma_k}{k-\alpha},\frac{\delta_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}}\tag{3.12}$$

dir.

İspat. $f\in H\mathrm{T}^n(A,B)$, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda $|z|=r<1$ için

$$\left|\frac{Df(z)-(1+\alpha)f(z)}{Df(z)+(1-\alpha)f(z)}\right|$$

$$=\left|\frac{-\alpha z-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1-\alpha)|a_k|z^k-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1+\alpha)|b_k|\overline{z}^k}{(2-\alpha)z-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1-\alpha)|a_k|z^k-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1+\alpha)|b_k|\overline{z}^k}\right|$$

$$\leq\frac{\alpha+\sum_{k=2}^{\infty}\{(k-1-\alpha)|a_k|+(k+1+\alpha)|b_k|\}\,r^{k-1}}{2-\alpha-\sum_{k=2}^{\infty}\{(k+1-\alpha)|a_k|+(k-1+\alpha)|b_k|\}\,r^{k-1}}$$

dir. Lemma 3.1.11. den f fonksiyonunun, $\mathbb{U}_{r_\alpha^*}$ diskine α mertebeli yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $z\in\mathbb{U}_r$ için

$$\left|\frac{Df(z)-(1+\alpha)f(z)}{Df(z)+(1-\alpha)f(z)}\right|<1$$

ya da denk olarak

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\frac{k-\alpha}{1-\alpha}|a_k|+\frac{k+\alpha}{1-\alpha}|b_k|\right\}\leq 1 \tag{3.13}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Ayrıca, γ_k ve δ_k, (3.6) ile verilen katsayılar olmak üzere Teorem 3.1.6 dan

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\gamma_k}{B-A}|a_k|+\frac{\delta_k}{B-A}|b_k|\right)\leq 1$$

dir. $k=2,3,\ldots$ için $\gamma_k<\delta_k$ olduğundan (3.13) eşitsizliği,

$$\frac{k-\alpha}{1-\alpha}r^{k-1}\leq\frac{\gamma_k}{B-A}\ \text{ ve }\ \frac{k+\alpha}{1-\alpha}r^{k-1}\leq\frac{\delta_k}{B-A}\quad (k=2,3,\ldots)$$

ya da

$$r \leq \left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{\gamma_k}{k-\alpha},\frac{\delta_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (k=2,3,\dots)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa doğrudur. Yani

$$r_\alpha^* = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{\gamma_k}{k-\alpha},\frac{\delta_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere f, $\mathbb{U}_{r_\alpha^*}$ diskinde α mertebeli yıldızıl fonksiyondur. Üstelik

$$f_k(z) = h_k(z) + \overline{g_k(z)} = z - \frac{B-A}{\gamma_k}e^{i(1-k)\phi}z^k + (-1)^n\frac{B-A}{\delta_k}e^{i(k-1)\phi}\overline{z}^k$$

fonksiyonu, yarıçapın r_α^* dan daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece, (3.12) elde edilir.

3.1.13. Teorem. α_k ve β_k, (3.9) ile verilen katsayılar ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$r_{\boldsymbol{\alpha}}^*\big(S\mathrm{T}^*(A,B)\big) = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{\alpha_k}{k-\alpha},\frac{\beta_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.14}$$

dir.

3.1.14. Teorem. γ_k ve δ_k, (3.6) ile verilen katsayılar ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$r_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{c}}\big(H\mathrm{T}^n(A,B)\big) = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{\gamma_k}{k(k-\alpha)},\frac{\delta_k}{k(k+\alpha)}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.15}$$

dir.

3.1.15. Teorem. α_k ve β_k, (3.9) ile verilen katsayılar ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$r_\alpha^c(S\mathrm{T}^*(A,B)) = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{\alpha_k}{k(k-\alpha)}, \frac{\beta_k}{k(k+\alpha)}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.16}$$

dir.

Son olarak, $H\mathrm{T}^n(A,B)$ ve $S\mathrm{T}^*(A,B)$ sınıflarının ekstrem noktaları incelenecek.

3.1.16. Teorem. $h = h_k$ ve $g = g_k$ fonksiyonları

$$\begin{gathered} h_1(z) = z, \\ h_k(z) = z - \frac{B-A}{\gamma_k} e^{i(1-k)\phi} z^k, \\ g_k(z) = (-1)^n \frac{B-A}{\delta_k} e^{i(k-1)\phi} \overline{z}^k \quad (z \in \mathbb{U}, k = 2, 3, \dots) \end{gathered} \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere (2.8) ile verilen seri açılımına sahip $f = h + \overline{g}$ fonksiyonları $H\mathrm{T}^n(A,B)$ sınıfının ekstrem noktalarıdır.

İspat. (2.9) ile verilen f_1 ve f_2 fonksiyonları $H\mathrm{T}^n(A,B)$ sınıfına ait ve $0 < \mu < 1$ olmak üzere $g_k = \mu f_1 + (1-\mu) f_2$ olsun. Bu durumda, (3.7) eşitsizliğinden $|b_{1,k}| = |b_{2,k}| = \frac{B-A}{\delta_k}$ elde edilir. Böylece, $t \in \{2, 3, \dots\}$ için $a_{1,t} = a_{2,t} = 0$ ve $t \in \{2, 3, \dots\} \backslash \{k\}$ için $b_{1,t} = b_{2,t} = 0$ bulunur. O halde $g_k(z) = f_1(z) = f_2(z)$ ve g_k, $H\mathrm{T}^n(A,B)$ sınıfına ait fonksiyonların ekstrem noktalarının oluşturduğu sınıfa aittir. h_k fonksiyonunun da, $H\mathrm{T}^n(A,B)$ sınıfının ekstrem noktalarının sınıfında bulunduğu benzer şekilde elde edilir. Şimdi, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip f fonksiyonunun $H\mathrm{T}^n(A,B)$ sınıfının ekstrem noktalarının sınıfına ait olduğu ve (3.17) formunda olmadığı kabul edilsin. Bu durumda

$$0 < |a_m| < \frac{(B-A)}{m^n\big(m(1+B) - (1+A)\big)}$$

ya da

$$0 < |b_m| < \frac{(B-A)}{m^n\big(m(1+B)+(1+A)\big)}$$

olacak şekilde $m \in \{2,3,\dots\}$ tamsayısı vardır. Eğer

$$0 < |a_m| < \frac{(B-A)}{m^n\big(m(1+B)-(1+A)\big)}$$

olduğunda

$$\mu = \frac{|a_m| m^n\big(m(1+B)-(1+A)\big)}{(B-A)}$$

olarak seçilir ve

$$\varphi = \frac{f-\mu h_m}{1-\mu}$$

olarak tanımlanırsa $0 < \mu < 1$, $h_m \neq \varphi$ ve $f = \mu h_m + (1-\mu)\varphi$ bulunur. O halde f fonksiyonunu $H\mathrm{T}^n(A,B)$ sınıfının ekstrem noktalarının sınıfına ait değildir. Benzer şekilde, eğer

$$0 < |b_m| < \frac{(B-A)}{m^n\big(m(1+B)+(1+A)\big)}$$

olduğunda

$$\mu = \frac{|b_m| m^n\big(m(1+B)+(1+A)\big)}{(B-A)}$$

olarak seçilir ve

$$\varphi = \frac{f - \mu g_m}{1 - \mu}$$

olarak tanımlanırsa $0 < \mu < 1,\ g_m \neq \varphi$ ve $f = \ \mu g_m + (1 - \mu)\varphi$ bulunur. Bu durumda, f fonksiyonunu $H\mathrm{T}^n(A, B)$ sınıfının ekstrem noktalarının sınıfına ait değildir. Böylece f fonksiyonu (3.17) ile verilen formdadır.

3.1.17. Teorem. $h = h_k$ ve $g = g_k$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} h_1(z) &= z, \\ h_k(z) &= z - \frac{B - A}{\alpha_k} z^k, \\ g_k(z) &= \frac{B - A}{\beta_k} \overline{z}^k \quad (z \in \mathbb{U}, k = 2, 3, \dots) \end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere (2.8) ile verilen seri açılımına sahip $f = h_k + \overline{g_k}$ fonksiyonları $S\mathrm{T}^*(A, B)$ sınıfının ekstrem noktalarıdır.

3.1.18. Sonuç. $f \in H\mathrm{T}^n(A, B)$ fonksiyonu (3.5) ile verilen seri açılımına sahip olsun. Bu durumda, $|z| = r < 1$ için

$$|a_k| \leq \frac{B - A}{k^n\big(k(1 + B) - (1 + A)\big)} \text{ ve } |b_k| \leq \frac{B - A}{k^n\big(k(1 + B) + (1 + A)\big)}$$

dir. Bu sonuç kesindir ve (3.17) ile verilen h_n ve g_n fonksiyonları ekstremal fonksiyonlardır. Ayrıca,

$$r - \frac{B - A}{2^n(1 + 2B - A)} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{B - A}{2^n(1 + 2B - A)} r^2$$

$$r - \frac{B - A}{1 + 2B - A} r^2 \leq |D^n f(z)| \leq r + \frac{B - A}{1 + 2B - A} r^2$$

dir. Bu sonuç kesindir ve (3.17) ile verilen h_2 fonksiyonu ekstremal fonksiyondur.

3.1.19. Sonuç. $f \in H\mathrm{T}^n(A,B)$ ise

$$r = 1 - \frac{B-A}{2^n(1+2B-A)}$$

olmak üzere $\mathbb{U}(r) \subset f(\mathbb{U})$ dir.

3.1.20. Sonuç. $f \in S\mathrm{T}^*(A,B)$ fonksiyonu (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $|z| = r < 1$ için

$$|a_k| \leq \frac{B-A}{k(1+B)-(1+A)} \text{ ve } |b_k| \leq \frac{B-A}{k(1+B)+(1+A)}$$

dir. Bu sonuç kesindir ve (3.18) ile verilen h_n ve g_n fonksiyonları ekstremal fonksiyonlardır. Ayrıca,

$$r - \frac{B-A}{1+2B-A} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{B-A}{1+2B-A} r^2,$$
$$r - \frac{2(B-A)}{1+2B-A} r^2 \leq |Df(z)| \leq r + \frac{2(B-A)}{1+2B-A} r^2,$$

dir. Bu sonuç kesindir ve (3.18) ile verilen h_2 fonksiyonu ekstremal fonksiyondur.

3.1.21. Sonuç. $f \in S\mathrm{T}^*(A,B)$ ise

$$r - \frac{B-A}{1+2B-A}$$

olmak üzere $\mathbb{U}(r) \subset f(\mathbb{U})$ dir.

3.2. $SH^0(\delta, n, A, B)$ ve $SH^0(\gamma, \beta, n, A, B)$ Sınıfları

$n \in \mathbb{N}_0, \delta \geq 0$ ve (2.8) ile verilen seri açılımına sahip $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonu için $D^{\delta,n}: SH^0 \to SH^0$,

$$D^{0,0}f(z) = h(z) + \overline{g(z)},$$
$$D^{0,1}f(z) = zh'(z) - \overline{zg'(z)}, \tag{3.19}$$
$$\vdots$$
$$D^{\delta,n}f(z) = D^{\delta,1}\left(D^{\delta,n-1}f(z)\right) \tag{3.20}$$

ile verilen diferansiyel operatörü Yaşar ve Yalçın (2013) tarafından tanımlanmıştır. (3.19) ve (3.20) den

$$D^{\delta,n}f(z) \ = z + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k+\delta}{1+\delta}\right]^{n} a_k z^k + (-1)^n\left[\frac{k-\delta}{1+\delta}\right]^{n}\overline{b_k z^k}$$

olduğu açıktır.

3.2.1. Tanım. $-B \leq A < B \leq 1, n \in \mathbb{N}_0, \delta \geq 0$ ve f fonksiyonu, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip olsun. Bu durumda,

$$\frac{D^{\delta,n+1}f(z)}{D^{\delta,n}f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{3.21}$$

şartını sağlayan $f \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı $SH^0(\delta, n, A, B)$ ile gösterilir (Jahangiri ve ark. 2017).

$n \in \mathbb{N}_0, \beta > \gamma \geq 0$ ve (2.8) ile verilen seri açılımına sahip $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonu için $D_{\gamma,\beta}^{n} : SH^0 \to SH^0$,

$$D_{\gamma,\beta}^{0}\, f(z) = h(z) + \overline{g(z)},$$
$$D_{\gamma,\beta}^{1}\, f(z) = \frac{\gamma\left(h(z) + \overline{g(z)}\right) + \beta\left(zh'(z) + \overline{zg'(z)}\right)}{\gamma+\beta} \tag{3.22}$$
$$\vdots$$
$$D_{\gamma,\beta}^{n}f(z) = D_{\gamma,\beta}^{1}\left(D_{\gamma,\beta}^{n-1}\, f(z)\right) \tag{3.23}$$

ile verilen diferansiyel operatörü Bayram ve Yalçın (2017) tarafından tanımlanmıştır. (3.22) ve (3.23) eşitliklerinden

$$D^n_{\gamma,\beta} f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{\beta k + \gamma}{\gamma + \beta}\right]^n a_k z^k + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{\beta k - \gamma}{\gamma + \beta}\right]^n \overline{b_k} \overline{z}^k$$

elde edilir.

3.2.2. Tanım. $-B \leq A < B \leq 1, n \in \mathbb{N}_0$ ve f fonksiyonu, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip olsun. Bu durumda,

$$\frac{D^{n+1}_{\gamma,\beta} f(z)}{D^n_{\gamma,\beta} f(z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz} \tag{3.24}$$

şartını sağlayan $f \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı $SH^0(\gamma, \beta, n, A, B)$ ile gösterilir (Yalçın ve Altınkaya 2017).

T^n, Tanım 3.1.3. de tanımlanan sınıf olsun. Bu durumda, $SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B) = \mathrm{T}^n \cap SH^0(\delta, n, A, B)$ ve $SH\mathrm{T}^0_\delta(\gamma, \beta, n, A, B) = \mathrm{T}^n \cap SH^0(\gamma, \beta, n, A, B)$ alt sınıfları elde edilir.

Önce, $SH^0(\delta, n, A, B)$ ve $SH^0(\gamma, \beta, n, A, B)$ sınıflarına ait f harmonik fonksiyonları için yeterli katsayı sınırları verilecek.

3.2.3. Teorem. f, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda

$$G_k = \left(\frac{k + \delta}{1 + \delta}\right)^n \left[\frac{B(k + \delta) + (k - 1)}{1 + \delta} - A\right] \tag{3.25}$$

ve

$$H_k = \left(\frac{k - \delta}{1 + \delta}\right)^n \left[\frac{B(k - \delta) + (k + 1)}{1 + \delta} + A\right] \tag{3.26}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty}(G_k|a_k| + H_k|b_k|) \leq (B - A) \tag{3.27}$$

ise $f \in SH^0(\delta, n, A, B)$ dir.

İspat. $f(z) = z$ fonksiyonu için teoremin doğru olduğu açıktır. Bu yüzden, $k \geq 2$ için $a_n \neq 0$ ya da $b_n \neq 0$ olduğu kabul edilsin. (3.27) eşitsizliğinden $G_k \geq k(B - A)$ ve $H_k \geq k(B - A)$ olduğundan

$$\begin{aligned}|h'(z)| - |g'(z)| &\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k||z|^k - \sum_{k=2}^{\infty} k|b_k||z|^k \geq 1 - |z|\sum_{k=2}^{\infty}(k|a_k| + k|b_k|)\\ &\geq 1 - \frac{|z|}{B - A}\sum_{k=2}^{\infty}(G_k|a_k| + H_k|b_k|) \geq 1 - |z| > 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlik, f fonksiyonunun, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yerel yalınkat ve yön koruyan olduğunu gösterir. Diğer yandan, $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ için $z_1 \neq z_2$ ise

$$\left|\frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2}\right| = \left|\sum_{m=1}^{k} {z_1}^{m-1}\,{z_2}^{k-m}\right| \leq \sum_{m=1}^{k}|z_1|^{m-1}\,|z_2|^{k-m} < k \quad (k = 2, 3, \dots)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}|f(z_1) - f(z_2)| &\geq |h(z_1) - h(z_2)| - |g(z_1) - g(z_2)|\\ &= \left|z_1 - z_2 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k\,({z_1}^k - {z_2}^k)\right| - \left|\sum_{k=2}^{\infty} \overline{b_k({z_1}^k - {z_2}^k)}\right|\\ &\geq |z_1 - z_2| - \sum_{k=2}^{\infty}|a_k||{z_1}^k - {z_2}^k| - \sum_{k=2}^{\infty}|b_k||{z_1}^k - {z_2}^k|\end{aligned}$$

$$= |z_1 - z_2| \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \left| \frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2} \right| - \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| \left| \frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2} \right| \right)$$

$$> |z_1 - z_2| \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k| - \sum_{k=2}^{\infty} k|b_k| \right) \geq 0$$

elde edilir. O halde f fonksiyonu, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yalınkattır. Ayrıca, $f \in SH^0(\delta, n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{D^{\delta,n+1} f(z)}{D^{\delta,n} f(z)} = \frac{1 + A\omega(z)}{1 + B\omega(z)}$$

olacak şekilde $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ özelliğinde kompleks değerli bir ω fonksiyonunun mevcut olmasıdır. Böyle bir ω fonksiyonu mevcutsa,

$$\left| \frac{D^{\delta,n+1} f(z) - D^{\delta,n} f(z)}{BD^{\delta,n+1} f(z) - AD^{\delta,n} f(z)} \right| < 1 \tag{3.28}$$

dir. Bu durumda (3.28) eşitsizliğinden, $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ için

$$\left| D^{\delta,n+1} f(z) - D^{\delta,n} f(z) \right| - \left| BD^{\delta,n+1} f(z) - AD^{\delta,n} f(z) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k+\delta}{1+\delta} \right]^n \left[\frac{k-1}{1+\delta} \right] a_k z^k - (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k-\delta}{1+\delta} \right]^n \left[\frac{k+1}{1+\delta} \right] \overline{b_k} \overline{z}^k \right|$$

$$- \left| (B-A)z + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k+\delta}{1+\delta} \right]^n \left[\frac{B(k+\delta)}{1+\delta} - A \right] a_k z^k \right.$$

$$\left. - (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k-\delta}{1+\delta} \right]^n \left[\frac{B(k-\delta)}{1+\delta} + A \right] \overline{b_k} \overline{z}^k \right|$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k+\delta}{1+\delta} \right]^n \left[\frac{k-1}{1+\delta} \right] |a_k| r^k + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k-\delta}{1+\delta} \right]^n \left[\frac{k+1}{1+\delta} \right] |b_k| r^k - (B-A)r$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k+\delta}{1+\delta} \right]^n \left[\frac{B(k+\delta)}{1+\delta} - A \right] |a_k| r^k + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k-\delta}{1+\delta} \right]^n \left[\frac{B(k-\delta)}{1+\delta} + A \right] |b_k| r^k$$

$$\leq r\left\{\sum_{k=2}^{\infty}(G_k|a_k| + H_k|b_k|)r^{k-1} - (B-A)\right\} < 0$$

bulunur. Böylece $f \in SH^0(\delta, n, A, B)$ dır.

3.2.4. Teorem. f, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ve

$$C_k = \left(\frac{\beta k + \gamma}{\gamma + \beta}\right)^n \left[\frac{\beta[k(1+B) - (1+A)] + \gamma(B-A)}{\gamma + \beta}\right] \tag{3.29}$$

ve

$$D_k = \left(\frac{\beta k - \gamma}{\gamma + \beta}\right)^n \left[\frac{\beta[k(1+B) + (1+A)] - \gamma(B-A)}{\gamma + \beta}\right] \tag{3.30}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty}(C_k|a_k| + D_k|b_k|) \leq (B-A) \tag{3.31}$$

ise $f \in SH^0(\gamma, \beta, n, A, B)$ dir.

Şimdi, $SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ ve $SH\mathrm{T}^0(\gamma, \beta, n, A, B)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için gerekli ve yeterli katsayı koşulları incelenecek.

3.2.5. Teorem. f, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $f \in SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart (3.27) ile verilen eşitsizliğin sağlanmasıdır.

İspat. (3.27) ile verilen eşitsizlik sağlanıyorsa $f \in SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ olduğu Teorem 3.2.3. deki yöntemler uygulanarak gösterilir. Tersine, $f \in SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ olsun. O halde (3.28) eşitsizliğinden, $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k+\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{k-1}{1+\delta}\right]|a_k|z^k+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k-\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{k+1}{1+\delta}\right]|b_k|\overline{z}^k}{(B-A)z-\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k+\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{B(k+\delta)}{1+\delta}-A\right]|a_k|z^k-\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k-\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{B(k-\delta)}{1+\delta}+A\right]|b_k|\overline{z}^k}\right|<1$$

dir ve buradan $|z|=r<1$ için

$$\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k+\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{k-1}{1+\delta}\right]|a_k|r^{k-1}+\left[\frac{k-\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{k+1}{1+\delta}\right]|b_k|r^{k-1}}{(B-A)-\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k+\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{B(k+\delta)}{1+\delta}-A\right]|a_k|r^{k-1}-\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k-\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{B(k-\delta)}{1+\delta}+A\right]|b_k|r^{k-1}}<1$$

bulunur. Buradan, G_k ve H_k, (3.25) ve (3.26) ile verilen katsayılar olmak üzere $0\leq r<1$ için

$$\sum_{k=2}^{\infty}[G_k|a_k|+H_k|b_k|]r^{k-1}\leq B-A \tag{3.32}$$

elde edilir.

$\sum_{k=2}^{\infty}[G_k|a_k|+H_k|b_k|]$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{\sigma_k\}$ olsun. Bu durumda $\{\sigma_k\}$, azalmayan ve $B-A$ ile üstten sınırlı bir dizidir. O halde, dizi yakınsak ve

$$\sum_{k=2}^{\infty}[G_k|a_k|+H_k|b_k|]=\lim_{k\to\infty}\sigma_k\leq B-A$$

dir.

3.2.6. Teorem. f, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $f\in SH\mathrm{T}^0(\gamma,\beta,n,A,B)$ olması için gerek ve yeter (3.31) ile verilen eşitsizliğin sağlanmasıdır.

3.2.7. Teorem. $SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$ ve $SH\mathrm{T}^0(\gamma,\beta,n,A,B)$ sınıfları SH^0 sınıfının konveks ve kompakt alt sınıflarıdır.

İspat. f_t,

$$f_t(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_{t,k}| z^k + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} |b_{t,k}| \overline{z}^k \quad (z \in \mathbb{U}, t \in \mathbb{N}) \tag{3.33}$$

şeklinde seri açılımına sahip fonksiyon olmak üzere $f_t \in SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ olsun. Bu durumda $0 \leq \mu \leq 1$ için

$$\mu f_1 + (1-\mu) f_2 = z - \sum_{k=2}^{\infty} (\mu |a_{1,k}| + (1-\mu)|a_{2,k}|) z^k + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} (\mu |b_{1,k}| + (1-\mu)|b_{2,k}|) \overline{z}^k$$

dir ve buradan

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} \{G_k[\mu |a_{1,k}| + (1-\mu)|a_{2,k}|] + H_k[\mu |b_{1,k}| + (1-\mu)|b_{2,k}|]\} \\
&\qquad = \mu \sum_{k=2}^{\infty} \{G_k |a_{1,k}| + H_k |b_{1,k}|\} + (1-\mu) \sum_{k=2}^{\infty} \{G_k |a_{2,k}| + H_k |b_{2,k}|\} \\
&\qquad \leq \mu(B-A) + (1-\mu)(B-A) = B - A
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\mu f_1 + (1-\mu) f_2 \in SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ dir. Bu ise $SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ sınıfının konveks olduğunu gösterir.

Diğer yandan, $f_t \in SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$, $t \in \mathbb{N}$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere $|z| \leq r$ için

$$|f_t(z)| \leq r + \sum_{k=2}^{\infty} \{|a_{t,k}| + |b_{t,k}|\} r^k \leq r + \sum_{k=2}^{\infty} \{G_k |a_{t,k}| + H_k |b_{t,k}|\} r^k \leq r + (B-A) r^n$$

dir. O halde, $SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ yerel olarak düzgün sınırlıdır. f_t, (3.33) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ve $f = h + \overline{g}$, (2.8) ile verilen seri verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, Teorem 3.2.5. kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{G_k\left|a_{t,k}\right|+H_k\left|b_{t,k}\right|\right\}\leq(B-A) \tag{3.34}$$

elde edilir.

Üstelik, $f_t\to f$ olduğu kabul edilirse, $t\in\mathbb{N}$ olmak üzere $k\to\infty$ iken $\left|a_{t,k}\right|\to|a_k|$ ve $\left|b_{t,k}\right|\to|b_k|$ dır. $\{\sigma_k\}$, $\sum_{k=2}^{\infty}[G_k|a_k|+H_k|b_k|]$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere $\{\sigma_k\}$, azalmayan ve $B-A$ ile üstten sınırlı bir dizidir. Böylece, dizi yakınsak ve

$$\sum_{k=2}^{\infty}[G_k|a_k|+H_k|b_k|]=\lim_{k\to\infty}\sigma_k\leq B-A$$

dir. Bu eşitsizlik, $f\in SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$ olduğunu ve dolayısıyla $SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$ sınıfının kapalı olduğunu gösterir. Böylece, $SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$ sınıfı kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

$SH\mathrm{T}^0(\gamma,\beta,n,A,B)$ alt sınıfının konveks ve kompakt olduğu da benzer şekilde gösterilir.

Sıradaki teoremlerde, $SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$ ve $SH\mathrm{T}^0(\gamma,\beta,n,A,B)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı araştırıldı.

3.2.8. Teorem. G_k ve H_k, (3.25) ve (3.26) ile verilen katsayılar ve $0\leq\alpha<1$ olsun. Bu durumda

$$r_\alpha^*(SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B))=\inf_{k\geq2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{G_k}{k-\alpha},\frac{H_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.35}$$

dir.

İspat. $f\in SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda $|z|=r<1$ için

$$\left|\frac{Df(z)-(1+\alpha)f(z)}{Df(z)+(1-\alpha)f(z)}\right|$$

$$=\left|\frac{-\alpha z-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1-\alpha)|a_k|z^k-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1+\alpha)|b_k|\overline{z}^k}{(2-\alpha)z-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1-\alpha)|a_k|z^k-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1+\alpha)|b_k|\overline{z}^k}\right|$$

$$\leq\frac{\alpha+\sum_{k=2}^{\infty}\{(k-1-\alpha)|a_k|+(k+1+\alpha)|b_k|\}r^{k-1}}{2-\alpha-\sum_{k=2}^{\infty}\{(k+1-\alpha)|a_k|+(k-1+\alpha)|b_k|\}r^k}$$

dir. Lemma 3.1.11. den f fonksiyonunun $\mathbb{U}_{r_\alpha^*}$ de α mertebeli yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $z\in\mathbb{U}_r$ için

$$\left|\frac{Df(z)-(1+\alpha)f(z)}{Df(z)+(1-\alpha)f(z)}\right|<1$$

ya da bu eşitsizliğe denk olarak

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\frac{k-\alpha}{1-\alpha}|a_k|+\frac{k+\alpha}{1-\alpha}|b_k|\right\}r^{k-1}\leq 1 \tag{3.36}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Ayrıca, G_k ve H_k, (3.25) ve (3.26) ile verilen katsayılar olmak üzere Teorem 3.2.3. den

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\frac{G_k}{B-A}|a_k|+\frac{H_k}{B-A}|b_k|\right\}r^{k-1}\leq 1$$

dir. Diğer yandan, (3.36) eşitsizliği, $k=2,3,\ldots$ için

$$\frac{k-\alpha}{1-\alpha}r^{k-1}\leq\frac{G_k}{B-A}\ \text{ ve }\ \frac{k+\alpha}{1-\alpha}r^{k-1}\leq\frac{H_k}{B-A}$$

eşitsizlikleri ya da

$$r \leq \left\{\frac{1-\alpha}{B-A}\min\frac{G_k}{k-\alpha},\frac{H_k}{k+\alpha}\right\}^{\frac{1}{k-1}}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa doğrudur. Böylece,

$$r_\alpha^* = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{G_k}{k-\alpha},\frac{H_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere f, $\mathbb{U}_{r_\alpha^*}$ diskinde α mertebeli yıldızıl fonksiyondur. Üstelik

$$f_k(z) = h_k(z) + \overline{g_k(z)} = z - \frac{B-A}{G_k}z^k + (-1)^n\frac{B-A}{H_k}\bar{z}^k$$

fonksiyonu, yarıçapın, r_α^* dan daha büyük olamayacağını gösterir.

3.2.9. Teorem. C_k ve D_k, (3.29) ve (3.30) ile verilen katsayılar ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$r_\alpha^*\left(SH\mathrm{T}^0(\gamma,\beta,n,A,B)\right) = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{C_k}{k-\alpha},\frac{D_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.37}$$

dir.

Bu alt sınıfların konvekslik yarıçapları da benzer şekilde elde edilir.

3.2.10. Teorem. G_k, ve H_k, (3.25) ve (3.26) ile verilen katsayılar ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$r_\alpha^c\left(\mathrm{SHT}^0(\delta,n,A,B)\right) = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{G_k}{k(k-\alpha)},\frac{H_k}{k(k+\alpha)}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.38}$$

dir.

3.2.11. Teorem. C_k ve D_k, (3.29) ve (3.30) ile verilen katsayılar ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$r_\alpha^c\big(S\mathrm{HT}^0(\gamma,\beta,n,A,B)\big) = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{C_k}{k(k-\alpha)},\frac{D_k}{k(k+\alpha)}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.39}$$

dir.

Son olarak, $S\mathrm{HT}^0(\delta,n,A,B)$ ve $SH\mathrm{T}^0(\gamma,\beta,n,A,B)$ sınıflarının ekstrem noktaları incelenecek.

3.2.12. Teorem. $h = h_k$ ve $g = g_k$ fonksiyonları

$$h_1(z) = z,$$
$$h_k(z) = z - \frac{B-A}{G_k}z^k,$$
$$g_k(z) = (-1)^n\frac{B-A}{H_k}\bar{z}^k \quad (z \in \mathbb{U}, k = 2,3,\dots) \tag{3.40}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere (2.8) ile verilen seri açılımına sahip $f = h + \overline{g}$ fonksiyonları $SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$ sınıfının ekstrem noktalarıdır.

İspat. (3.33) ile verilen f_1 ve f_2 fonksiyonları $SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$ sınıfına ait ve $0 < \mu < 1$ olmak üzere $g_k = \mu f_1 + (1-\mu)f_2$ olsun. Bu durumda (3.27) eşitsizliğinden

$$|b_{1,k}| = |b_{2,k}| = \frac{B-A}{H_k}$$

dir. Böylece, $t \in \{2,3,\dots\}$ için $a_{1,t} = a_{2,t} = 0$ ve $t \in \{2,3,\dots\}\backslash\{k\}$ için $b_{1,t} = b_{2,t} = 0$ bulunur. O halde, $g_k(z) = f_1(z) = f_2(z)$ ve g_k, $S\mathrm{HT}^0(\delta,n,A,B)$ fonksiyon sınıflarının ekstrem noktalarının oluşturduğu sınıfa aittir. Benzer şekilde, h_k fonksiyonunun da, $S\mathrm{HT}^0(\delta,n,A,B)$ fonksiyon sınıflarının ekstrem noktalarının oluşturduğu sınıfa ait olduğu görülür. Şimdi, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip f fonksiyonunun $S\mathrm{HT}^0(\delta,n,A,B)$

fonksiyon sınıfının ekstrem noktalarının sınıfına ait olduğu ve (3.40) formunda olmadığı kabul edilsin. Bu durumda,

$$0<|a_m|<\frac{(B-A)}{\left[\frac{m+\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{B(m+\delta)+(m-1)}{1+\delta}-A\right]}$$

ya da

$$0<|b_m|<\frac{(B-A)}{\left[\frac{m-\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{B(m-\delta)+(m+1)}{1+\delta}+A\right]}$$

olacak şekilde $m\in\{2,3,\dots\}$ tamsayısı vardır. Eğer,

$$0<|a_m|<\frac{(B-A)}{\left[\frac{m+\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{B(m+\delta)+(m-1)}{1+\delta}-A\right]}$$

olduğunda

$$\mu=\frac{|a_m|\left\{\left[\frac{m+\delta}{1+\delta}\right]^n\left[\frac{B(m+\delta)+(m-1)}{1+\delta}-A\right]\right\}}{(B-A)}$$

olarak seçilir ve

$$\phi=\frac{f-\mu h_m}{1-\mu}$$

olarak tanımlanırsa $0<\mu<1$, $h_m\neq\phi$ ve $f=\mu h_m+(1-\mu)\phi$ elde edilir. O halde f fonksiyonu, $SH\mathrm{T}^0(\delta,n,A,B)$ sınıfının ekstrem noktalarının ailesine ait değildir. Benzer şekilde, Eğer,

$$0 < |b_m| < \frac{(B-A)}{\left[\frac{m-\delta}{1+\delta}\right]^n \left[\frac{B(m-\delta)+(m+1)}{1+\delta}+A\right]}$$

olduğunda

$$\mu = \frac{|b_m| \left[\frac{m-\delta}{1+\delta}\right]^n \left[\frac{B(m-\delta)+(m+1)}{1+\delta}+A\right]}{(B-A)}$$

olarak seçilir ve

$$\phi = \frac{f-\mu g_m}{1-\mu}$$

olarak tanımlanırsa $0 < \mu < 1$, $g_m \neq \phi$ ve $f = \mu g_m + (1-\mu)\phi$ elde edilir. Bu durumda, f fonksiyonu, $SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ sınıfının ekstrem noktalarının ailesine ait değildir. Böylece, f fonksiyonu (3.40) ile verilen formdadır.

3.2.13. Teorem. $h = h_k$ ve $g = g_k$ fonksiyonları

$$h_1(z) = z,$$
$$h_k(z) = z - \frac{(B-A)}{C_k} z^k,$$
$$g_k(z) = (-1)^n \frac{(B-A)}{D_k} \overline{z}^k \quad (z \in \mathbb{U}, k = 2, 3, \dots) \tag{3.41}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere (2.8) ile verilen seri açılımına sahip $f = h + \overline{g}$ fonksiyonları $SH\mathrm{T}^0(\gamma, \beta, n, A, B)$ sınıfının ekstrem noktalarıdır.

3.2.14. Sonuç. $f \in SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ fonksiyonu (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $|z| = r < 1$ için

$$|a_k| \leq \frac{B-A}{\left(\frac{k+\delta}{1+\delta}\right)^n \left[\frac{B(k+\delta)+(k-1)}{1+\delta} - A\right]}$$

$$|b_k| \leq \frac{B-A}{\left(\frac{k-\delta}{1+\delta}\right)^n \left[\frac{B(k-\delta)+(k+1)}{1+\delta} + A\right]}$$

dir. Bu sonuç kesin olup, (3.40) ile verilen h_n ve g_n fonksiyonları ekstremal fonksiyonlardır. Diğer yandan,

$$r - \frac{B-A}{\left(\frac{2+\delta}{1+\delta}\right)^n \left[\frac{B(2+\delta)+1}{1+\delta} - A\right]} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{B-A}{\left(\frac{2+\delta}{1+\delta}\right)^n \left[\frac{B(2+\delta)+1}{1+\delta} - A\right]} r^2$$

$$r - \frac{B-A}{\frac{B(2+\delta)+1}{1+\delta} - A} r^2 \leq |D^{\gamma,n} f(z)| \leq r + \frac{B-A}{\frac{B(2+\delta)+1}{1+\delta} - A} r^2$$

dir ve (3.40) ile verilen h_2 ekstremal fonksiyonu için bu sonuç kesindir.

3.2.15. Sonuç. $f \in SH\mathrm{T}^0(\delta, n, A, B)$ ise

$$r = 1 - \frac{B-A}{\left(\frac{2+\delta}{1+\delta}\right)^n \left[\frac{B(2+\delta)+1}{1+\delta} - A\right]}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r \subset f(\mathbb{U})$ dir.

3.2.16. Sonuç. $f \in SH\mathrm{T}^0(\gamma, \beta, n, A, B)$ fonksiyonu (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $|z| = r < 1$ için

$$|a_k| \leq \frac{B-A}{\left(\frac{\beta k+\gamma}{\gamma+\beta}\right)^n \left[\frac{\beta[k(1+B)-(1+A)]+\gamma(B-A)}{\gamma+\beta}\right]}$$

$$|b_k| \leq \frac{B-A}{\left(\frac{\beta k-\gamma}{\gamma+\beta}\right)^n \left[\frac{\beta[k(1+B)+(1+A)]-\gamma(B-A)}{\gamma+\beta}\right]}$$

dir. Bu sonuç kesin olup, (3.41) ile verilen h_n ve g_n fonksiyonları ekstremal fonksiyonlardır. Diğer yandan,

$$r-\frac{B-A}{\left(\frac{2\beta+\gamma}{\gamma+\beta}\right)^n\left[\frac{\beta[2B-A+1]+\gamma(B-A)}{\gamma+\beta}\right]}r^2\leq|f(z)|\leq r+\frac{B-A}{\left(\frac{2\beta+\gamma}{\gamma+\beta}\right)^n\left[\frac{\beta[2B-A+1]+\gamma(B-A)}{\gamma+\beta}\right]}r^2$$

$$r-\frac{(B-A)(\gamma+\beta)}{\beta[2B-A+1]+\gamma(B-A)}r^2\leq\left|D_{\gamma,\beta}^n f(z)\right|\leq r+\frac{(B-A)(\gamma+\beta)}{\beta[2B-A+1]+\gamma(B-A)}r^2$$

dir ve (3.41) ile verilen h_2 ekstremal fonksiyonu için bu sonuç kesindir.

3.2.17. Sonuç. $f\in SH\mathrm{T}^0(\gamma,\beta,n,A,B)$ ise

$$r=1-\frac{B-A}{\left(\frac{2\beta+\gamma}{\gamma+\beta}\right)^n\left[\frac{\beta[2B-A+1]+\gamma(B-A)}{\gamma+\beta}\right]}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r\subset f(\mathbb{U})$ dir.

3.3. $\boldsymbol{SH^0(\lambda,n,A,B)}$ Sınıfı

Al-Oboudi (2004), $f\in A$ için D_λ^n diferansiyel operatörünü tanımladı. Yaşar ve Yalçın (2012), $n\in\mathbb{N}_0,\lambda\geq1$ ve $f=h+\overline{g}\in SH^0$, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olmak üzere modifiye edilmiş Al-Oboudi operatörünü, $D_\lambda^n\colon SH^0\to SH^0$,

$$D_\lambda^0 f(z)=D^0 f(z)=h(z)+\overline{g(z)},$$

$$D_\lambda^1 f(z)=(1-\lambda)D^0 f(z)+\lambda D^1 f(z),\ \ \lambda\geq1 \tag{3.42}$$

$$\vdots$$

$$D_\lambda^n f(z)=D_\lambda^1\left(D_\lambda^{n-1}f(z)\right) \tag{3.43}$$

olarak tanımladı. Burada, (3.42) ve (3.43) eşitliklerinden

$$D_{1,\lambda}^{n}h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty}[\lambda(k-1)+1]^{n}a_{k}z^{k}, \;\; D_{2,\lambda}^{n}g(z) = \sum_{k=2}^{\infty}[\lambda(k+1)-1]^{n}b_{k}z^{k}$$

olmak üzere

$$D_{\lambda}^{n}f(z) = D_{1,\lambda}^{n}h(z) + (-1)^{n}\overline{D_{2,\lambda}^{n}g(z)}$$

dir. Ayrıca f, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ise

$$\phi_{1}(z) = \frac{(\lambda-1)z^{2}+z}{(1-z)^{2}} \;\; \text{ve} \;\; \phi_{2}(z) = \frac{(\lambda-1)z^{2}+(1-2\lambda)z}{(1-z)^{2}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} D_{\lambda}^{n}f(z) &= f(z) * \underbrace{\left(\phi_{1}(z) + \overline{\phi_{2}(z)}\right) * \dots * \left(\phi_{1}(z) + \overline{\phi_{2}(z)}\right)}_{n\, defa} \\ &= h(z) * \underbrace{\left(\phi_{1}(z) * \dots * \phi_{1}(z)\right)}_{n\, defa} + \overline{g(z)} * \overline{\underbrace{\left(\phi_{2}(z) * \dots * \phi_{2}(z)\right)}_{n\, defa}} \end{aligned}$$

dir.

3.3.1. Tanım. $\lambda \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_{0}$ ve f fonksiyonu, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip olsun. Bu durumda,

$$\frac{D_{\lambda}^{n+1}f(z)}{D_{\lambda}^{n}f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \quad (-B \leq A < B \leq 1) \tag{3.44}$$

şartını sağlayan $f \in SH^{0}$ fonksiyonlarının sınıfı $SH^{0}(\lambda, n, A, B)$ ile gösterilir (Çakmak ve ark. 2017).

Önce $SH^{0}(\lambda, n, A, B)$ sınıfına ait f harmonik fonksiyonları için gerekli ve yeterli bir konvolüsyon şartı verilecek.

3.3.2. Teorem. $f \in SH^0$ olsun. $f \in SH^0(\lambda, n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}\backslash\{0\}$ için

$$\varphi_3(z;\zeta) = \frac{[(A-B)\zeta + \lambda(1+B\zeta)]z^2 + (B-A)z\zeta}{(1-z)^2} - (-1)^n \frac{[-\lambda(1+B\zeta) + (B-A)\zeta)]\overline{z}^2 + [2\lambda(1+B\zeta) + (A-B)\zeta]\overline{z}}{(1-\overline{z})^2}$$

olmak üzere

$$D_\lambda^n f(z) * \varphi_3(z;\zeta) \neq 0 \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1)$$

olmasıdır.

İspat. $f \in SH^0$ olsun. $f \in SH^0(\lambda, n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart (3.44) ile verilen şartın sağlanması ya da bu şarta denk olarak

$$\frac{D_\lambda^{n+1} f(z)}{D_\lambda^n f(z)} \neq \frac{1+A\zeta}{1+B\zeta} \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Buradan

$$D_\lambda^n f(z) = D_\lambda^n f(z) * \left(\frac{z}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}}\right) \text{ ve } D_\lambda^{n+1} f(z) = D_\lambda^n f(z) * \left(\phi_1(z) + \overline{\phi_2(z)}\right)$$

olması kullanılarak,

$$\begin{aligned}(1+B\zeta)D_\lambda^{n+1} f(z) - (1+A\zeta)D_\lambda^n f(z) \\ = D_\lambda^n f(z) * \left\{\frac{(1+B\zeta)[(\lambda-1)z^2 + z]}{(1-z)^2} + \frac{(1+B\zeta)\left[(\lambda-1)\overline{z}^2 + (1-2\lambda)\overline{z}\right]}{(1-\overline{z})^2}\right\} \\ - D_\lambda^n f(z) * \left\{\frac{(1+A\zeta)z}{1-z} + \frac{(1+A\zeta)\overline{z}}{1-\overline{z}}\right\} = D_\lambda^n f(z) * \varphi_3(z;\zeta) \neq 0\end{aligned}$$

bulunur.

3.3.3. Teorem. f, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$M_k = [(k-1)\lambda + 1]^n [\lambda(k-1)(1+B) + B - A] \tag{3.45}$$

ve

$$N_k = [(k+1)\lambda - 1]^n [\lambda(k+1)(1+B) + A - B] \tag{3.46}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty} (M_k |a_k| + N_k |b_k|) \leq B - A \tag{3.47}$$

ise $f \in SH^0(\lambda, n, A, B)$ dir.

İspat. $f(z) = z$ fonksiyonu için teoremin doğru olduğu açıktır. Bu nedenle, $k \geq 2$ için $a_n \neq 0$ ya da $b_n \neq 0$ olduğu kabul edilsin. (3.47) eşitsizliğinden $M_k \geq k(B-A)$ ve $N_k \geq k(B-A)$ olduğundan

$$\begin{aligned} |h'(z)| - |g'(z)| &\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k||z|^{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} k|b_k||z|^{k-1} \geq 1 - |z| \sum_{k=2}^{\infty} (k|a_k| + k|b_k|) \\ &\geq 1 - \frac{|z|}{B-A} \sum_{k=2}^{\infty} (M_k|a_k| + N_k|b_k|) \geq 1 - |z| > 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlik, f fonksiyonunun, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yerel yalınkat ve yön koruyan olduğunu gösterir. Diğer yandan, $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ için $z_1 \neq z_2$ ise

$$\left| \frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2} \right| = \left| \sum_{m=1}^{k} {z_1}^{m-1} {z_2}^{k-m} \right| \leq \sum_{m=1}^{k} |{z_1}^{m-1}| \, |{z_2}^{k-m}| < k \quad (k = 2, 3, \dots)$$

dir. Buradan

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right| \geq 1-\left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right| = 1-\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty} b_k({z_1}^k - {z_2}^k)}{(z_1 - z_2)+\sum_{k=2}^{\infty} a_k({z_1}^k - {z_2}^k)}\right|$$

$$> 1-\frac{\sum_{k=2}^{\infty} k|b_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|} \geq 1-\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{N_k}{B-A}|b_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{M_k}{B-A}|a_k|} \geq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, f fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterir. Ayrıca, $f \in SH^0(\lambda, n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{D_\lambda^{n+1} f(z)}{D_\lambda^n f(z)} = \frac{1+A\omega(z)}{1+B\omega(z)}$$

olacak şekilde $\omega(0)=0$ ve $|\omega(z)|<1$ özelliğinde kompleks değerli bir ω fonksiyonunun mevcut olmasıdır. O halde,

$$\left|\frac{D_\lambda^{n+1} f(z) - D_\lambda^n f(z)}{BD_\lambda^{n+1} f(z) - AD_\lambda^n f(z)}\right| < 1 \qquad (3.48)$$

dir.

(3.48) eşitsizliğinden, $|z|=r$ $(0<r<1)$ için

$$\left|D_\lambda^{n+1} f(z) - D_\lambda^n f(z)\right| - \left|BD_\lambda^{n+1} f(z) - AD_\lambda^n f(z)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\lambda[(k-1)\lambda+1]^n a_k z^k - (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\lambda[(k+1)\lambda-1]^n \overline{b_k}\overline{z}^k\right|$$

$$- \left|(B-A)z + \sum_{k=2}^{\infty}[(k-1)\lambda B + B - A][(k-1)\lambda+1]^n a_k z^k\right.$$

$$\left. - (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)\lambda B + A - B][(k+1)\lambda-1]^n \overline{b_k}\overline{z}^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\lambda[(k-1)\lambda+1]^n|a_k|r^k + \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\lambda[(k+1)\lambda-1]^n|b_k|r^k$$

$$-(B-A)r + \sum_{k=2}^{\infty}[(k-1)\lambda B + B - A][(k-1)\lambda+1]^n|a_k|r^k$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)\lambda B + A - B][(k+1)\lambda-1]^n|b_k|r^k$$

$$\leq r\left\{\sum_{k=2}^{\infty}(M_k|a_k| + N_k|b_k|)r^{k-1} - (B-A)\right\} < 0$$

bulunur. Böylece $f \in SH^0(\lambda, n, A, B)$ dır.

Şimdi, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B) = \mathrm{T}^n \cap SH^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfına ait fonksiyonlar için gerekli ve yeterli katsayı koşulları incelenecek.

3.3.4. Teorem. f, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $f \in SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart (3.47) ile verilen eşitsizliğin sağlanmasıdır.

İspat. (3.47) ile verilen eşitsizlik sağlanıyorsa $f \in SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ olduğu Teorem 3.3.3. deki yöntemler kullanılarak gösterilir. Tersine, $f \in SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ olsun. O halde (3.48) eşitsizliğinden, $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\lambda[(k-1)\lambda+1]^n|a_k|z^k + (k+1)\lambda[(k+1)\lambda-1]^n|b_k|\overline{z}^k}{(B-A)z - \sum_{k=2}^{\infty}[(k-1)\lambda B + B - A][(k-1)\lambda+1]^n|a_k|z^k + [(k+1)\lambda B + A - B][(k+1)\lambda-1]^n|b_k|\overline{z}^k}\right| < 1$$

dir ve buradan $|z| = r < 1$ için

$$\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\{(k-1)\lambda[(k-1)\lambda+1]^n|a_k| + (k+1)\lambda[(k+1)\lambda-1]^n|b_k|\}r^{k-1}}{(B-A) - \sum_{k=2}^{\infty}\{[(k-1)\lambda B + B - A][(k-1)\lambda+1]^n|a_k| + [(k+1)\lambda B + A - B][(k+1)\lambda-1]^n|b_k|\}r^{k-1}} < 1$$

bulunur. Buradan, M_k ve N_k, (3.45) ve (3.46) ile verilen katsayılar olmak üzere $0 \leq r < 1$ için

$$\sum_{k=2}^{\infty}[M_k|a_k| + N_k|b_k|]r^{k-1} \leq B - A \tag{3.49}$$

elde edilir.

$\sum_{k=2}^{\infty}[M_k|a_k| + N_k|b_k|]$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{\sigma_k\}$ olsun. Bu durumda, $\{\sigma_k\}$, azalmayan ve $B - A$ ile üstten sınırlı bir dizidir. O halde, dizi yakınsak ve

$$\sum_{k=2}^{\infty}[M_k|a_k| + N_k|b_k|] = \lim_{k\to\infty} \sigma_k \leq B - A$$

dir.

3.3.5. Teorem. SH^0 sınıfının alt sınıfı olan, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfı konveks ve kompakttır.

İspat. f_t, (3.33) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olmak üzere $f_t \in SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ olsun. O halde $z \in \mathbb{U}$ ve $t \in \mathbb{N}$ için

$$\mu f_1 + (1-\mu)f_2 = z - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\mu|a_{1,k}| + (1-\mu)|a_{2,k}|\right)z^k + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty}\left(\mu|b_{1,k}| + (1-\mu)|b_{2,k}|\right)\overline{z}^k$$

dir ve buradan

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}&\left\{M_k\left[\mu|a_{1,k}| + (1-\mu)|a_{2,k}|\right] + N_k\left[\mu|b_{1,k}| + (1-\mu)|b_{2,k}|\right]\right\} \\ &= \mu\sum_{k=2}^{\infty}\left\{M_k|a_{1,k}| + N_k|b_{1,k}|\right\} + (1-\mu)\sum_{k=2}^{\infty}\left\{M_k|a_{2,k}| + N_k|b_{2,k}|\right\} \\ &\leq \mu(B-A) + (1-\mu)(B-A) = B - A\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\mu f_1 + (1-\mu) f_2 \in SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ dir. Bu ise $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfının konveks olduğunu gösterir.

Diğer yandan, $f_t \in SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$, $t \in \mathbb{N}$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere $|z| \leq r$ için

$$|f_t(z)| \leq r + \sum_{k=2}^{\infty} \{|a_{t,k}| + |b_{t,k}|\} r^k \leq r + \sum_{k=2}^{\infty} \{M_k |a_{t,k}| + N_k |b_{t,k}|\} r^k \leq r + (B-A) r^2$$

dir. O halde, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ yerel olarak düzgün sınırlıdır. f_t, (3.33) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ve $f = h + \overline{g}$, (2.8) ile verilen seri verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, Teorem 3.3.3. kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty} \{M_k |a_{t,k}| + N_k |b_{t,k}|\} \leq B - A \tag{3.50}$$

elde edilir.

$f_t \to f$ olduğu kabul edilirse, $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k \to \infty$ iken $|a_{t,k}| \to |a_k|$ ve $|b_{t,k}| \to |b_k|$ dır. $\{\sigma_k\}$, $\sum_{k=2}^{\infty} [M_k |a_k| + N_k |b_k|]$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Bu durumda, $\{\sigma_k\}$, azalmayan ve $B - A$ ile üstten sınırlı bir dizidir. Böylece, dizi yakınsak ve

$$\sum_{k=2}^{\infty} [M_k |a_k| + N_k |b_k|] = \lim_{k \to \infty} \sigma_k \leq B - A$$

dir. Bu eşitsizlik, $f \in SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ olduğunu ve dolayısıyla $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfının kapalı olduğunu gösterir. Böylece, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfı kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

Aşağıdaki teoremlerde, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfına ait fonksiyonlar için yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı verildi.

3.3.6. Teorem. M_k ve N_k, (3.45) ve (3.46) ile verilen katsayılar ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$r_{\alpha}^{*}\big(SH\mathrm{T}^{0}(\lambda, n, A, B)\big) = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{M_k}{k-\alpha}, \frac{N_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.51}$$

dir.

İspat. $f \in SH\mathrm{T}^{0}(\lambda, n, A, B)$, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda $|z| = r < 1$ için

$$\begin{aligned}\left|\frac{D_1 f(z) - (1+\alpha)f(z)}{D_1 f(z) + (1-\alpha)f(z)}\right| &\\ &= \left|\frac{-\alpha z - \sum_{k=2}^{\infty}(k-1-\alpha)|a_k|z^k - \sum_{k=2}^{\infty}(k+1+\alpha)|b_k|\overline{z}^k}{(2-\alpha)z - \sum_{k=2}^{\infty}(k+1-\alpha)|a_k|z^k - \sum_{k=2}^{\infty}(k-1+\alpha)|b_k|\overline{z}^k}\right| \\ &\leq \frac{\alpha + \sum_{k=2}^{\infty}\{(k-1-\alpha)|a_k| + (k+1+\alpha)|b_k|\}\, r^{k-1}}{2-\alpha - \sum_{k=2}^{\infty}\{(k+1-\alpha)|a_k| + (k-1+\alpha)|b_k|\}\, r^{k-1}}\end{aligned}$$

dir. Lemma 3.1.11. den f fonksiyonunun $\mathbb{U}_{r_{\alpha}^{*}}$ de α mertebeli yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}_r$ için

$$\left|\frac{D_1 f(z) - (1+\alpha)f(z)}{D_1 f(z) + (1-\alpha)f(z)}\right| < 1$$

ya da bu eşitsizliğe denk olarak

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\frac{k-\alpha}{1-\alpha}|a_k| + \frac{k+\alpha}{1-\alpha}|b_k|\right\} r^{k-1} \leq 1 \tag{3.52}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Ayrıca, M_k ve N_k, (3.45) ve (3.46) ile verilen katsayılar olmak üzere Teorem 3.3.3. den

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{M_k}{B-A}|a_k|+\frac{N_k}{B-A}|b_k|\right)\leq 1$$

dir. Diğer yandan, (3.52) eşitsizliği, $k=2,3,\dots$ için

$$\frac{k-\alpha}{1-\alpha}r^{k-1}\leq\frac{M_k}{B-A}\ \text{ ve }\ \frac{k+\alpha}{1-\alpha}r^{k-1}\leq\frac{N_k}{B-A}$$

eşitsizlikleri ya da

$$r\leq\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{M_k}{k-\alpha},\frac{N_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa doğrudur. Böylece,

$$r_\alpha^*=\inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{M_k}{k-\alpha},\frac{N_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere f, $\mathbb{U}_{r_\alpha^*}$ diskinde α mertebeli yıldızıl fonksiyondur. Üstelik

$$f_k(z)=h_k(z)+\overline{g_k(z)}=z-\frac{B-A}{M_k}z^k+(-1)^n\frac{B-A}{N_k}\overline{z}^k$$

fonksiyonu, yarıçapın, r_α^* dan daha büyük olamayacağını gösterir.

3.3.7. Teorem. M_k ve N_k, (3.45) ve (3.46) ile verilen katsayılar ve $0\leq\alpha<1$ olsun. Bu durumda

$$r_\alpha^c\left(SH\mathrm{T}^0(\lambda,n,A,B)\right)=\inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{M_k}{k(k-\alpha)},\frac{N_k}{k(k+\alpha)}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \qquad (3.53)$$

dir.

Son olarak, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfının ekstrem noktaları incelenecek.

3.3.8. Teorem. $h = h_k$ ve $g = g_k$ fonksiyonları

$$h_1(z) = z,$$
$$h_k(z) = z - \frac{B-A}{M_k} z^k,$$
$$g_k(z) = (-1)^n \frac{B-A}{N_k} \overline{z}^k \quad (z \in \mathbb{U}, k = 2, 3, \dots) \tag{3.54}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere (2.8) ile verilen seri açılımına sahip $f = h + \overline{g}$ fonksiyonları $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfının ekstrem noktalarıdır.

İspat. (3.33) ile verilen f_1 ve f_2 fonksiyonları $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfına ait ve $0 < \mu < 1$ olmak üzere $g_k = \mu f_1 + (1-\mu) f_2$ olsun. Bu durumda (3.47) den $|b_{1,k}| = |b_{2,k}| = \frac{B-A}{N_k}$ elde edilir. Böylece, $t \in \{2, 3, \dots\}$ için $a_{1,t} = a_{2,t} = 0$ ve $t \in \{2, 3, \dots\} \backslash \{k\}$ için $b_{1,t} = b_{2,t} = 0$ bulunur. O halde, $g_k(z) = f_1(z) = f_2(z)$ ve g_k, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ fonksiyon sınıflarının ekstrem noktalarının oluşturduğu sınıfa aittir. Benzer şekilde, h_k fonksiyonunun da, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ fonksiyon sınıflarının ekstrem noktalarının oluşturduğu sınıfa ait olduğu görülür. Şimdi, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip f fonksiyonunun $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ fonksiyon sınıfının ekstrem noktalarının sınıfına ait olduğu ve (3.54) formunda olmadığı kabul edilsin. Bu durumda,

$$0 < |a_m| < \frac{B-A}{[(m-1)\lambda + 1]^n [\lambda(m-1)(B+1) + B - A]}$$

ya da

$$0 < |b_m| < \frac{B-A}{[(m+1)\lambda - 1]^n [\lambda(m+1)(B+1) + A - B]}$$

olacak şekilde $m \in \{2,3, \dots\}$ tamsayısı vardır. Eğer,

$$0 < |a_m| < \frac{B-A}{[(m-1)\lambda+1]^n[\lambda(m-1)(B+1)+B-A]}$$

olduğunda

$$\mu = \frac{|a_m|[(m-1)\lambda+1]^n[\lambda(m-1)(B+1)+B-A]}{B-A}$$

olarak seçilir ve

$$\phi = \frac{f-\mu h_m}{1-\mu}$$

olarak tanımlanırsa $0 < \mu < 1$, $h_m \neq \phi$ ve $f = \mu h_m + (1-\mu)\phi$ elde edilir. O halde f fonksiyonu, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfının ekstrem noktalarının ailesine ait değildir. Benzer şekilde,

$$0 < |b_m| < \frac{B-A}{[(m+1)\lambda-1]^n[\lambda(m+1)(B+1)+A-B]}$$

olduğunda

$$\mu = \frac{|b_m|[(m+1)\lambda-1]^n[\lambda(m+1)(B+1)+A-B]}{B-A}$$

olarak seçilir ve

$$\phi = \frac{f-\mu g_m}{1-\mu}$$

olarak tanımlanırsa $0 < \mu < 1$, $g_m \neq \phi$ ve $f = \mu g_m + (1-\mu)\phi$ elde edilir. Bu durumda f fonksiyonu, $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfının ekstrem noktalarının ailesine ait değildir. Böylece, f fonksiyonu (3.54) ile verilen formdadır.

3.3.9. Sonuç. $f \in SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ olsun. Bu durumda, $|z| = r < 1$ için

$$|a_k| \leq \frac{B-A}{[(k-1)\lambda+1]^n[\lambda(k-1)(B+1)+B-A]}$$
$$|b_k| \leq \frac{B-A}{[(k+1)\lambda-1]^n[\lambda(k+1)(B+1)+A-B]}$$

dir. Bu sonuç kesin olup, (3.54) ile verilen h_n ve g_n fonksiyonları ekstremal fonksiyonlardır. Diğer yandan,

$$r - \frac{B-A}{(\lambda+1)^n[\lambda(B+1)+B-A]}r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{B-A}{(\lambda+1)^n[\lambda(B+1)+B-A]}r^2$$
$$r - \frac{B-A}{[\lambda(B+1)+B-A]}r^2 \leq |D_\lambda^n f(z)| \leq r + \frac{B-A}{[\lambda(B+1)+B-A]}r^2$$

dir. Bu sonuç kesin olup, (3.54) ile verilen h_2 fonkiyonu ekstremal fonksiyondur.

3.3.10. Sonuç. $f \in SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ ise

$$r = 1 - \frac{B-A}{(\lambda+1)^n[\lambda(B+1)+B-A]}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r \subset f(\mathbb{U})$ dir.

3.4. $SH_\delta^0(n, A, B)$ Sınıfı

3.4.1. Tanım. D^n, Jahangiri ve ark. (2002) tarafından tanımlanan modifiye edilmiş Salagean diferansiyel operatörü olmak üzere $-B \leq A < B \leq 1$ ve $0 \leq \delta < 1$ için

$$\frac{\delta D^{n+2}f(z) + (1-\delta)D^{n+1}f(z)}{\delta D^{n+1}f(z) + (1-\delta)D^n f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{3.55}$$

özelliğindeki $f \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı $SH_\delta^0(n, A, B)$ ile gösterilir (Çakmak ve ark. 2018).

Verilecek olan teoremde, $SH_\delta^0(n, A, B)$ sınıfına ait harmonik fonksiyonlar için gerekli ve yeterli konvolüsyon şartı incelenmiştir.

3.4.2. Teorem. $f \in SH^0$ olsun. $f \in SH_\delta^0(n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}\backslash\{0\}$ için

$$\varphi_4(z;\zeta) = \frac{(1+A\zeta)(\delta-1)z^3 + (\delta+1)z^2 + [B(2\delta-1) + A(2-\delta)\zeta]z^2 + (B-A)\zeta z}{(1-z)^3} - (-1)^n \frac{(1+A\zeta)(1-\delta)\bar{z}^3 - 3(1-\delta)\bar{z}^2 - [B(2-3\delta)A]\zeta\bar{z}^2 + (1-2\delta)[2+(B+A)\zeta]\bar{z}}{(1-\bar{z})^3}$$

olmak üzere

$$D^n f(z) * \varphi_4(z;\zeta) \neq 0 \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1)$$

olmasıdır.

İspat. $f \in SH^0$ olsun. $f \in SH_\delta^0(n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart (3.55) ile verilen şartın sağlanması ya da bu şarta denk olarak

$$\frac{\delta D^{n+2} f(z) + (1-\delta) D^{n+1} f(z)}{\delta D^{n+1} f(z) + (1-\delta) D^n f(z)} \neq \frac{1+A\zeta}{1+B\zeta} \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Buradan

$$D^n h(z) = D^n h(z) * \frac{z}{1-z}, D^{n+1} h(z) = D^n h(z) * \frac{z}{(1-z)^2} \text{ ve } D^{n+2} h(z) = D^n h(z) * \frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

olması kullanılarak,

$$(1+B\zeta)[\delta D^{n+2}f(z)+(1-\delta)D^{n+1}f(z)]-(1+A\zeta)[\delta D^{n+1}f(z)+(1-\delta)D^{n}f(z)]$$
$$=D^n h(z)*\left\{(1+B\zeta)\left[\frac{\delta z+\delta z^2}{(1-z)^3}+\frac{(1-\delta)z}{(1-z)^2}\right]-(1+A\zeta)\left[\frac{\delta z}{(1-z)^2}+\frac{(1-\delta)z}{1-z}\right]\right\}$$
$$+(-1)^n\overline{D^n g(z)}*\left\{(1+B\zeta)\left[\frac{\delta\overline{z}+\delta\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^3}-\frac{(1-\delta)\overline{z}}{(1-\overline{z})^2}\right]+(1+A\zeta)\left[\frac{\delta\overline{z}}{(1-\overline{z})^2}-\frac{(1-\delta)\overline{z}}{1-\overline{z}}\right]\right\}$$
$$=D^n f(z)*\ \varphi_4(z;\zeta)\neq 0$$

bulunur.

3.4.3. Teorem. f, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$X_k=k^n[(B+1)k-(A+1)][1+\delta(k-1)] \tag{3.56}$$

ve

$$Y_k=k^n[(B+1)k+(A+1)]|1-\delta(k+1)| \tag{3.57}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty}(X_k|a_k|+Y_k|b_k|)\leq B-A \tag{3.58}$$

ise $f\in SH_\delta^0(n,A,B)$ dir.

İspat. $f(z)=z$ fonksiyonu için teoremin doğru olduğu açıktır. Bu nedenle, $k\geq 2$ için $a_n\neq 0$ ya da $b_n\neq 0$ olduğu kabul edilsin. (3.58) eşitsizliğinden $X_k\geq k(B-A)$ ve $Y_k\geq k(B-A)$ olduğundan

$$|h'(z)|-|g'(z)|\geq 1-\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k||z|^{k-1}-\sum_{k=2}^{\infty}k|b_k||z|^{k-1}\geq 1-|z|\sum_{k=2}^{\infty}(k|a_k|+k|b_k|)$$
$$\geq 1-\frac{|z|}{B-A}\sum_{k=2}^{\infty}(X_k|a_k|+Y_k|b_k|)\geq 1-|z|>0$$

bulunur. O halde f fonksiyonu, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yerel yalınkat ve yön koruyandır. Diğer yandan, $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ için $z_1 \neq z_2$ ise

$$\left|\frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2}\right| = \left|\sum_{m=1}^{k} {z_1}^{m-1}\, {z_2}^{k-m}\right| \leq \sum_{m=1}^{k} |{z_1}^{m-1}|\, |{z_2}^{k-m}| < k \quad (k = 2, 3, \dots)$$

dir. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &\geq |h(z_1) - h(z_2)| - |g(z_1) - g(z_2)| \\
&= \left|z_1 - z_2 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k({z_1}^k - {z_2}^k)\right| - \left|\sum_{k=2}^{\infty} \overline{b_k({z_1}^k - {z_2}^k)}\right| \\
&\geq |z_1 - z_2| - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k||{z_1}^k - {z_2}^k| - \sum_{k=2}^{\infty} |b_k||{z_1}^k - {z_2}^k| \\
&= |z_1 - z_2|\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|\left|\frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2}\right| - \sum_{k=2}^{\infty} |b_k|\left|\frac{{z_1}^k - {z_2}^k}{z_1 - z_2}\right|\right) \\
&> |z_1 - z_2|\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k| - \sum_{k=2}^{\infty} k|b_k|\right) \geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f fonksiyonu yalınkattır. Ayrıca, $f \in SH_\delta^0(n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{\delta D^{n+2} f(z) + (1-\delta) D^{n+1} f(z)}{\delta D^{n+1} f(z) + (1-\delta) D^n f(z)} = \frac{1 + A\omega(z)}{1 + B\omega(z)}$$

olacak şekilde $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ özelliğinde kompleks değerli bir ω fonksiyonunun mevcut olmasıdır. Bu durumda,

$$\left|\frac{\delta D^{n+2} f(z) + (1-2\delta) D^{n+1} f(z) - (1-\delta) D^n f(z)}{-B\delta D^{n+2} f(z) + [\delta(A+B) - B] D^{n+1} f(z) + A(1-\delta) D^n f(z)}\right| < 1 \tag{3.59}$$

dir. (3.59) eşitsizliğinden, $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ için

$$
\begin{aligned}
&|\delta D^{n+2}f(z) + (1-2\delta)D^{n+1}f(z) - (1-\delta)D^n f(z)| \\
&\qquad\qquad - |B\delta D^{n+2}f(z) - [\delta(A+B) - B]D^{n+1}f(z) - A(1-\delta)D^n f(z)| \\
&= \left|\sum_{k=2}^{\infty} k^n \{\delta k^2 + (1-2\delta)k - (1-\delta)\} a_k z^k \right. \\
&\qquad\qquad \left. + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} k^n \{\delta k^2 - (1-2\delta)k - (1-\delta)\} \overline{b_k z^k}\right| \\
&\qquad\qquad - \left|(B-A)z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n \{B\delta k^2 + [B - \delta(A+B)]k - A(1-\delta)\} a_k z^k \right. \\
&\qquad\qquad \left. + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} k^n \{B\delta k^2 - [B - \delta(A+B)]k - A(1-\delta)\} \overline{b_k z^k}\right| \\
&\le \sum_{k=2}^{\infty} k^n (k-1)[\delta(k-1)+1]|a_k| r^k + \sum_{k=2}^{\infty} k^n (k+1)|\delta(k+1) - 1||b_k| r^k \\
&\qquad\qquad - (B-A)r + \sum_{k=2}^{\infty} k^n (Bk - A)[\delta(k-1)+1]|a_k| r^k \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=2}^{\infty} k^n (Bk + A)|\delta(k+1) - 1||b_k| r^k \\
&\le r\left\{\sum_{k=2}^{\infty} X_k |a_k| r^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k |b_k| r^{k-1} - (B-A)\right\} < 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece $f \in SH_\delta^0(n, A, B)$ dır.

Şimdi, $SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B) = \mathrm{T}^n \cap SH_\delta^0(n, A, B)$ sınıfına ait fonksiyonlar için gerekli ve yeterli katsayı koşulları incelenecek.

3.4.4. Teorem. f, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $\frac{1}{3} < \delta \le 1$ olmak üzere $f \in SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ olması için gerek ve yeter şart (3.58) ile verilen eşitsizliğin sağlanmasıdır.

İspat. (3.58) ile verilen eşitsizlik sağlanıyorsa $f \in SHT_\delta^0(n,A,B)$ olduğu Teorem 3.4.3. ün ispatına benzer şekilde gösterilir. Tersine, $f \in SHT_\delta^0(n,A,B)$ olsun. O halde (3.59) eşitsizliğinden, $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty} k^n \{[\delta k^2 + (1-2\delta)k - (1-\delta)]|a_k|z^k + [\delta k^2 - (1-2\delta)k - (1-\delta)]|b_k|\overline{z}^k\}}{(B-A)z - \sum_{k=2}^{\infty} k^n \{[B\delta k^2 + [B-\delta(A+B)]k - A(1-\delta)]|a_k|z^k + [B\delta k^2 - [B-\delta(A+B)]k - A(1-\delta)]|b_k|\overline{z}^k\}}\right| < 1$$

dir ve buradan $|z| = r < 1$ için

$$\frac{\sum_{k=2}^{\infty} k^n \{[\delta k^2 + (1-2\delta)k - (1-\delta)]|a_k| + [\delta k^2 - (1-2\delta)k - (1-\delta)]|b_k|\} r^{k-1}}{(B-A) - \sum_{k=2}^{\infty} k^n \{[B\delta k^2 + [B-\delta(A+B)]k - A(1-\delta)]|a_k| + [B\delta k^2 - [B-\delta(A+B)]k - A(1-\delta)]|b_k|\} r^{k-1}} < 1$$

bulunur. Bu eşitsizlikten, (3.56) ve (3.57) ile tanımlanan X_k ve Y_k katsayıları için

$$\sum_{k=2}^{\infty} [X_k|a_k| + Y_k|b_k|] r^{k-1} \le B - A \tag{3.60}$$

elde edilir.

$\sum_{k=2}^{\infty} [X_k|a_k| + Y_k|b_k|]$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{\sigma_k\}$ olsun. Bu durumda, $\{\sigma_k\}$, azalmayan ve $B - A$ ile üstten sınırlı bir dizidir. O halde, dizi yakınsak ve

$$\sum_{k=2}^{\infty} [X_k|a_k| + Y_k|b_k|] = \lim_{k\to\infty} \sigma_k \le B - A$$

dir.

3.4.5. Teorem. $SHT_\delta^0(n,A,B)$, SH^0 sınıfının konveks ve kompakt alt sınıfıdır.

İspat. f_t, (3.33) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olmak üzere $f_t \in SHT_\delta^0(n,A,B)$ ve $0 \le \mu \le 1$ olsun. O halde, $z \in \mathbb{U}$ ve $t \in \mathbb{N}$ için

$$\mu f_1 + (1-\mu) f_2 = z - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\mu |a_{1,k}| + (1-\mu)|a_{2,k}|\right) z^k + (-1)^n \sum_{k=2}^{\infty} \left(\mu |b_{1,k}| + (1-\mu)|b_{2,k}|\right) \overline{z}^k$$

ve

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ X_k \left[\mu |a_{1,k}| + (1-\mu)|a_{2,k}| \right] + Y_k \left[\mu |b_{1,k}| + (1-\mu)|b_{2,k}| \right] \right\}$$
$$= \mu \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ X_k |a_{1,k}| + Y_k |b_{1,k}| \right\} + (1-\mu) \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ X_k |a_{2,k}| + Y_k |b_{2,k}| \right\}$$
$$\leq \mu(B-A) + (1-\mu)(B-A) = B - A$$

elde edilir. Böylece, $\mu f_1 + (1-\mu) f_2 \in SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ dir. Dolayısıyla $SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ sınıfı konvekstir.

Diğer yandan, $f_t \in SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$, $t \in \mathbb{N}$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere $|z| \leq r$ için

$$|f_t(z)| \leq r + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ |a_{t,k}| + |b_{t,k}| \right\} r^k \leq r + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ X_k |a_{t,k}| + Y_k |b_{t,k}| \right\} r^k \leq r + (B-A) r^2$$

dir. O halde, $SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ yerel olarak düzgün sınırlıdır. f_t, (3.33) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ve $f = h + \overline{g}$, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda Teorem 3.4.3. kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ X_k |a_{t,k}| + Y_k |b_{t,k}| \right\} \leq B - A \tag{3.61}$$

elde edilir.

Burada, $f_t \to f$ olduğu kabul edilirse, $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k \to \infty$ iken $|a_{t,k}| \to |a_k|$ ve $|b_{t,k}| \to |b_k|$ dır. $\{\sigma_k\}$, $\sum_{k=2}^{\infty} [X_k |a_k| + Y_k |b_k|]$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Bu durumda, $\{\sigma_k\}$, azalmayan ve $B-A$ ile üstten sınırlı bir dizidir. Böylece, dizi yakınsak ve

$$\sum_{k=2}^{\infty}[X_k|a_k|+Y_k|b_k|]=\lim_{k\to\infty}\sigma_k\leq B-A$$

dir. Bu eşitsizlik, f fonksiyonunun $SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)$ sınıfına ait olduğunu gösterir. O halde $SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)$ sınıfı kapalıdır. Böylece, $SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)$ sınıfı kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

Aşağıdaki teoremlerde, $SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)$ sınıfına ait fonksiyonlar için yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı incelendi.

3.4.6. Teorem. X_k ve Y_k, (3.56) ve (3.57) ile verilen katsayılar ve $0\leq\alpha<1$ olsun. Bu durumda

$$r_{\alpha}^{*}\left(SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)\right)=\inf_{k\geq2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{X_k}{k-\alpha},\frac{Y_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.62}$$

dir.

İspat. $f\in SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)$, (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda $|z|=r<1$ için

$$\begin{aligned}\left|\frac{Df(z)-(1+\alpha)f(z)}{Df(z)+(1-\alpha)f(z)}\right|&\\ &=\left|\frac{-\alpha z-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1-\alpha)|a_k|z^k-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1+\alpha)|b_k|\overline{z}^k}{(2-\alpha)z-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1-\alpha)|a_k|z^k-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1+\alpha)|b_k|\overline{z}^k}\right|\\ &\leq\frac{\alpha+\sum_{k=2}^{\infty}\{(k-1-\alpha)|a_k|+(k+1+\alpha)|b_k|\}r^{k-1}}{2-\alpha-\sum_{k=2}^{\infty}\{(k+1-\alpha)|a_k|+(k-1+\alpha)|b_k|\}r^{k-1}}\end{aligned}$$

dir. f fonksiyonunun $\mathbb{U}_{r_\alpha^*}$ de α mertebeli yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}_r$ için

$$\left|\frac{Df(z) - (1+\alpha)f(z)}{Df(z) + (1-\alpha)f(z)}\right| < 1$$

ya da bu eşitsizliğe denk olarak Lemma 3.1.11. den

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\frac{k-\alpha}{1-\alpha}|a_k| + \frac{k+\alpha}{1-\alpha}|b_k|\right\}r^{k-1} \leq 1 \tag{3.63}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Ayrıca, X_k ve Y_k, (3.56) ve (3.57) ile verilen katsayılar olmak üzere Teorem 3.4.4. den

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{X_k}{B-A}|a_k| + \frac{Y_k}{B-A}|b_k|\right) \leq 1$$

dir. Diğer yandan, (3.63) eşitsizliği, $k = 2, 3, \ldots$ için

$$\frac{k-\alpha}{1-\alpha}r^{k-1} \leq \frac{X_k}{B-A} \text{ ve } \frac{k+\alpha}{1-\alpha}r^{k-1} \leq \frac{Y_k}{B-A}$$

eşitsizlikleri ya da

$$r \leq \left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{X_k}{k-\alpha}, \frac{Y_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa doğrudur. Böylece,

$$r_\alpha^* = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A}\min\left\{\frac{X_k}{k-\alpha}, \frac{Y_k}{k+\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere f, $\mathbb{U}_{r_\alpha^*}$ diskinde α mertebeli yıldızıl fonksiyondur. Üstelik

$$f_k(z) = h_k(z) + \overline{g_k(z)} = z - \frac{B-A}{X_k} z^k + (-1)^n \frac{B-A}{Y_k} \overline{z}^k$$

fonksiyonu, yarıçapın, r_α^* dan daha büyük olamayacağını gösterir.

Bu alt sınıfın konvekslik yarıçapı da benzer şekilde elde edilir.

3.4.7. Teorem. X_k ve Y_k, (3.56) ve (3.57) ile verilen katsayılar ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$r_\alpha^c\left(SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)\right) = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1-\alpha}{B-A} \min\left\{\frac{X_k}{k(k-\alpha)}, \frac{Y_k}{k(k+\alpha)}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{3.64}$$

dir.

Son olarak, $SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ sınıfının ekstrem noktaları incelenecek.

3.4.8. Teorem. $h = h_k$ ve $g = g_k$ fonksiyonları

$$h_1(z) = z,$$
$$h_k(z) = z - \frac{B-A}{X_k} z^k,$$
$$g_k(z) = (-1)^n \frac{B-A}{Y_k} \overline{z}^k \quad (z \in \mathbb{U}, k = 2, 3, \dots) \tag{3.65}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar ve $\frac{1}{3} < \delta \leq 1$ olmak üzere (2.8) ile verilen seri açılımına sahip $f = h + \overline{g}$ fonksiyonları $SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ sınıfının ekstrem noktalarıdır.

İspat. (3.33) ile verilen f_1 ve f_2 fonksiyonları $SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ sınıfına ait ve $0 < \mu < 1$ olmak üzere $g_k = \mu f_1 + (1-\mu) f_2$ olsun. Bu durumda (3.58) eşitsizliğinden

$|b_{1,k}| = |b_{2,k}| = \frac{B-A}{Y_k}$ dir. Böylece, $t \in \{2, 3, \dots\}$ için $a_{1,t} = a_{2,t} = 0$ ve $t \in \{2, 3, \dots\} \backslash \{k\}$ için $b_{1,t} = b_{2,t} = 0$ bulunur. O halde, $g_k(z) = f_1(z) = f_2(z)$ ve g_k, $SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ fonksiyon sınıflarının ekstrem noktalarının oluşturduğu sınıfa aittir. Benzer şekilde, h_k fonksiyonunun da, $SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ fonksiyon sınıflarının ekstrem noktalarının oluşturduğu sınıfa ait olduğu görülür. Şimdi, (2.8) ile verilen seri açılımına sahip f fonksiyonunun $SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ fonksiyon sınıfının ekstrem noktalarının sınıfına ait olduğu ve (3.65) formunda olmadığı kabul edilsin. Bu durumda,

$$0 < |a_m| < \frac{B-A}{m^n[(B+1)m - (A+1)][1 + \delta(m-1)]}$$

ya da

$$0 < |b_m| < \frac{B-A}{m^n[(B+1)m + (A+1)][\delta(m+1) - 1]}$$

olacak şekilde $m \in \{2,3, \dots\}$ tamsayısı vardır. Eğer,

$$0 < |a_m| < \frac{B-A}{m^n[(B+1)m - (A+1)][1 + \delta(m-1)]}$$

olduğunda

$$\mu = \frac{|a_m| m^n[(B+1)m - (A+1)][1 + \delta(m-1)]}{B-A}$$

olarak seçilir ve

$$\phi = \frac{f - \mu h_m}{1 - \mu}$$

olarak tanımlanırsa $0<\mu<1,\ h_m \neq \phi$ ve $f=\ \mu h_m+(1-\mu)\phi$ elde edilir. O halde f fonksiyonu, $SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)$ sınıfının ekstrem noktalarının ailesine ait değildir. Benzer şekilde

$$0<|b_m|<\frac{B-A}{m^n[(B+1)m+(A+1)][\delta(m+1)-1]}$$

olduğunda

$$\mu=\frac{|b_m|m^n[(B+1)m+(A+1)][\delta(m+1)-1]}{B-A}$$

olarak seçilir ve

$$\phi=\frac{f-\mu g_m}{1-\mu}$$

olarak tanımlanırsa $0<\mu<1,\ g_m \neq \phi$ ve $f=\ \mu g_m+(1-\mu)\phi$ elde edilir. Bu durumda f fonksiyonu, $SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)$ sınıfının ekstrem noktalarının ailesine ait değildir. Böylece, f fonksiyonu (3.65) ile verilen formdadır.

3.4.9. Sonuç. $f \in SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)$ fonksiyonu (3.5) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda, $|z|=r<1$ için

$$|a_k| \leq \frac{B-A}{k^n[(B+1)k-(A+1)][\delta(k-1)+1]}$$
$$|b_k| \leq \frac{B-A}{k^n[(B+1)k+(A+1)][\delta(k+1)-1]}$$

dir. Bu sonuç kesin olup, (3.65) ile verilen h_n ve g_n fonksiyonları ekstremal fonksiyonlardır. Diğer yandan,

$$r-\frac{B-A}{2^n[(\delta+1)(2B-A+1)]}r^2 \leq |f(z)| \leq r+\frac{B-A}{2^n[(\delta+1)(2B-A+1)]}r^2$$

$$r - \frac{(B-A)}{[(\delta+1)(2B-A+1)]}r^2 \leq |D^n f(z)| \leq r + \frac{(B-A)}{[(\delta+1)(2B-A+1)]}r^2$$

dir. Bu sonuç kesindir ve (3.65) ile verilen h_2 fonkiyonu ekstremal fonksiyondur.

3.4.10. Sonuç. $f \in SH\mathrm{T}_\delta^0(n, A, B)$ ise

$$r = 1 - \frac{B-A}{2^n[(\delta+1)(2B-A+1)]}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r \subset f(\mathbb{U})$ dir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, sabordinasyon yardımıyla yeni harmonik fonksiyon sınıfları tanımlanmıştır. Bu tanımlanan fonksiyon sınıfları için gerekli ve yeterli konvolüsyon şartları, katsayı bağıntıları, distorsiyon sınırları ve ekstrem noktaları elde edilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümü, sabordinasyon ile tanımlanan harmonik fonksiyon sınıfları üzerinedir. Bu bölüm, dört alt bölümden oluşmuştur. İlk bölümde, Dziok (2015) ve Dziok ve ark (2016) tarafından tanımlanan iki harmonik fonksiyon sınıfı tanıtılmıştır. İkinci bölümde, Jahangiri ve ark. (2017) ve Yalçın ve Altınkaya (2017) tarafından tanımlanan harmonik fonksiyon sınıfları tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde; Yaşar ve Yalçın (2012) tarafından tanımlanan D_λ^n diferansiyel operatörü yardımıyla kurulan harmonik fonksiyon sınıfı tanımlanmış ve $SH^0(\lambda, n, A, B)$ ile gösterilmiştir. Bu fonksiyon sınıfı için gerekli ve yeterli konvolüsyon şartları ve yeterli katsayı şartları verilmiştir. Yine bu bölümde, $SH^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfı ile T^n sınıfının arakesiti ile oluşturulan $SH\mathrm{T}^0(\lambda, n, A, B)$ sınıfı tanımlanmış ve bu fonksiyon sınıfının gerekli ve yeterli katsayı şartları, kompaktlık, yıldızıllık yarıçapı, konvekslik yarıçapı ve ekstrem noktaları elde edilmiştir. Ayrıca, $|z| = r < 1$ için kesin katsayı sınırları

$$|a_k| \le \frac{B - A}{[(k-1)\lambda + 1]^n[\lambda(k-1)(B+1) + B - A]}$$

$$|b_k| \le \frac{B - A}{[(k+1)\lambda - 1]^n[\lambda(k+1)(B+1) + A - B]}$$

olarak, büyüme ve distorsiyon teoremi,

$$r - \frac{B - A}{(\lambda+1)^n[\lambda(B+1) + B - A]}r^2 \le |f(z)| \le r + \frac{B - A}{(\lambda+1)^n[\lambda(B+1) + B - A]}r^2$$

$$r - \frac{B - A}{[\lambda(B+1) + B - A]}r^2 \le |D_\lambda^n f(z)| \le r + \frac{B - A}{[\lambda(B+1) + B - A]}r^2$$

olarak bulunmuştur (Çakmak ve ark. 2017). Dördüncü bölümde, Salagean diferansiyel operatörü yardımıyla harmonik fonksiyon sınıfı tanımlanmış ve $SH_{\delta}^{0}(n,A,B)$ ile gösterilmiştir. Tanımlanan fonksiyon sınıfına ait fonksiyonlar için gerekli ve yeterli konvülasyon şartı ve yeterli katsayı şartı elde edilmiştir. Ayrıca, $SH_{\delta}^{0}(n,A,B)$ sınıfının, T^{n} sınıfı ile arakesitinden oluşan $SH\mathrm{T}_{\delta}^{0}(n,A,B)$ sınıfı tanımlanmış ve bu fonksiyon sınıfı için gerekli ve yeterli katsayı şartları, kompaktlık, yıldızıllık yarıçapı, konvekslik yarıçapı ve ekstrem noktaları elde edilmiştir ve $|z|=r<1$ için

$$|a_k| \leq \frac{B-A}{k^n[(B+1)k-(A+1)][\delta(k-1)+1]}$$
$$|b_k| \leq \frac{B-A}{k^n[(B+1)k+(A+1)][\delta(k+1)-1]}$$

kesin katsayı sınırları ve

$$r-\frac{B-A}{2^n[(\delta+1)(2B-A+1)]}r^2 \leq |f(z)| \leq r+\frac{B-A}{2^n[(\delta+1)(2B-A+1)]}r^2$$
$$r-\frac{(B-A)}{[(\delta+1)(2B-A+1)]}r^2 \leq |D^n f(z)| \leq r+\frac{(B-A)}{[(\delta+1)(2B-A+1)]}r^2$$

büyüme ve distorsiyon teoremleri bulunmuştur (Çakmak ve ark. 2018). Ayrıca, $SH^0(\lambda,n,A,B)$ ve $SH_{\delta}^{0}(n,A,B)$ sınıflarına ait parametrelerin özel seçimi ile

(i) $SH^0(1,0,2\alpha-1,1)=SH_0^0(0,2\alpha-1,1)=SH^{0,*}(\alpha)$, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yön koruyan α mertebeli yıldızıl harmonik yalınkat fonksiyon sınıfı (Silverman 1998, Jahangiri 1999, Silverman ve Silvia 1999),
(ii) $SH^0(1,1,2\alpha-1,1)=SH_0^0(1,2\alpha-1,1)=SH_1^0(0,2\alpha-1,1)=KH^0(\alpha)$, $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yön koruyan α mertebeli konveks harmonik yalınkat fonksiyon sınıfı (Jahangiri 1999)

elde edilir. Son olarak, $H^n(A,B)$, $SH^0(\delta,n,A,B)$, $SH^0(\gamma,\beta,n,A,B)$, $SH^0(\lambda,n,A,B)$, $SH_{\delta}^{0}(n,A,B)$ ve $SH^*(A,B)$ sınıfları arasındaki ilişkiler incelenmiş ve

(i) $H^n(A,B) = SH^0(0,n,A,B) = SH^0(0,\beta,n,A,B) = SH^0(1,n,A,B) = SH_0^0(n,A,B)$
(ii) $H^0(A,B) = SH^0(0,0,A,B) = SH^0(0,\beta,0,A,B) = SH^0(1,0,A,B) = SH_0^0(0,A,B)$
$= SH^*(A,B)$

sonucu elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. 1979. Complex analysis. Mcgraw Hill, New York, USA, 336 pp.

Alexander, J.W. 1915. Functions which map the interior of the unic circle upon simple regions. *Ann. Of Math.*, 17: 12-22.

Al-Oboudi, F.M. 2004. On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator. *International Journal of Mathematics and Mathematical Scienced*, 27: 1429-1436.

Başkan, T. 2005. Kompleks fonksiyonlar teorisi. Nobel Basımevi, Ankara, 318 s.

Bayram, H., Yalçın, S. 2017. A subclass of harmonic univalent functions defined by a linear operator. *Palestine Journal of Mathematics,* 6: 320-326.

Bieberbach, L. 1916. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen. *Welcheeine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.,* 940-955.

Campbell, D.M. 1974a. Applications and proof of a uniqueness theorem for linear invariant families of finite order. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 4: 621-634.

Campbell, D.M. 1974b. Majorization-subordination theorems for locally univalent functions. III. *Transactions of the American Mathematical Society*, 198: 297-306.

Carathéodory, C. 1907. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Mathematische Annalen*, *64*(1): 95-115.

Clunie, J. Sheil-Small, T. 1984. Harmonic univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.,* 9: 3-25.

Çakmak, S., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017. On a Subclass of Harmonic Univalent Functions Based on Subordination. *Theory and Applications of Mathematics & Computer Science*, 7(2): 51-62.

Çakmak, S., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2018. A subclass of harmonic univalent functions defined by means of differential subordination. *Khayyam J. Math.*, 4(1): 28-38.

Duren, P. 2004. Harmonic mappings in the plane. Cambridge Univesity Pres, New York, USA, 212 pp.

Dziok, J. 2015. Classes of harmonic functions defined by subordination. *In Abstract and Applied Analysis*, 21: 99-107.

Dziok, J., Jahangiri, J., Silverman, H. 2016. Harmonic functions with varying coefficients. *Journal of Inequalities and Applications*, 1: 139.

Goodman, A.W. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II. Polygonal Publishing House House, Washington, New Jersey, 556 pp.

Jahangiri, J. M. 1999. Harmonic functions starlike in the unit disk. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 235(2): 470-477.

Jahangiri, J. M., Murugusundaramoorthy, G., Vijaya, K. 2002. Salagean-type harmonic univalent functions. *Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics,* 2: 77-82.

Jahangiri, J., Magesh, N., Murugesan, C. 2017. Certain subclass of starlike harmonic functions defined by subordination. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 8(2): 88-100.

Kaplan, W. 1952. Close-to-convex schlicht functions. *Michigan Math. J.*, 1: 169-185.

Koebe, P. 1907. Über die uniformisierung beliebeger analytischer kurven. *Nach. Ges. Wiss. Gottingen*, 191-210.

Littlewood, J. E. 1944. Lectures on the Theory of Functions. Oxford University Press, London, 243 pp.
Nevanlinna, R. 1921. Uber die Konforme Abbildung von Sterngebieten. *Oversiktav Finska Vetenskaps-Societetens Forhandlingar*, 6(63): 1-21.
Riemann, B. 1851. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. *PhD Thesis*, University of Göttingen, Germany.
Robertson, M. S. 1936. On the theory of univalent functions. *Ann. of Math.*, 37: 374-408.
Salagean, G.S. 1983. Subclasses of univalent functions. *Lecture Notes in Math*., Springer- Verlag, Heidelberg, 1013: 362-372.
Schaubroeck, L. E. 2000. Subordination of planar harmonic functions. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 41(2): 163-178.
Sheil-Small, T. 1990. Constants for planar harmonic mappings. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2): 237-248.
Silverman, H. 1998. Harmonic univalent functions with negative coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 220(1): 283-289.
Silverman, H., Silvia E.M. 1999. Subclasses of harmonic univalent functions. *N. Z. J. Math.*, 28: 275-284.
Study, S. 1913. Vorlesungen uber ausgewahlte gegenstande der geometrie. heft 2, Konforme Abbildung Einfach Zusammenhangender Bereiche, B. G. Teubner, Leibzig und Berlin: No. 0411593.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2018. On a subclass of harmonic univalent functions involving a linear operator. *AIP Conference Proceedings* 1926(1): 020045-1-020045-8.
Yaşar, E., Yalcin, S. 2012. Generalized Salagean-type harmonic univalent functions. *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.*, 57(3): 395-403.
Yaşar, E., Yalçin, S. 2013. Certain properties of a subclass of harmonic functions. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 7(5): 1749.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Serkan ÇAKMAK
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Uşak, 12.02.1990
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Uşak Lisesi-2008
Lisans	:	Uludağ Üniversitesi-2015

İletişim (e-posta)	:	serkan.cakmak64@hotmail.com
Yayınları	:	

Çakmak, S., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017. On a Subclass of Harmonic Univalent Functions Based on Subordination. *Theory and Applications of Mathematics & Computer Science*, 7(2): 51-62.

Çakmak, S., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2018. A subclass of harmonic univalent functions defined by means of differential subordination. *Khayyam J. Math.*, 4(1): 28-38.