T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVOLUSYON İLE TANIMLANAN ANALİTİK YALINKAT FONKSİYON SINIFLARI

Figen EBREN CİHAN

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2016

TEZ ONAYI

Figen EBREN CİHAN tarafından hazırlanan "Konvolusyon İle Tanımlanan Analitik Yalınkat Fonksiyon Sınıfları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Başkan **:** Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** Yrd.Doç.Dr. Hakan BOSTANCI
Karabük Ü. Fen Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
…/…/2016

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…/…/…

İmza

Figen EBREN CİHAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVOLUSYON İLE TANIMLANAN ANALİTİK YALINKAT FONKSİYON SINIFLARI

Figen EBREN CİHAN

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, $E = \{z : |z| < 1\}$ olmak üzere E de analitik ve yalınkat (ünivalent), $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şeklinde normalize edilmiş fonksiyonların $\boldsymbol{S}$ sınıfı ve onun alt sınıfları olan yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıflarının temel özellikleri verildi. Ayrıca $E^* = \{z : |z| > 1\}$ da analitik, ünivalent fonksiyonlar için alan teoremi ve bu teorem yardımıyla $\boldsymbol{S}$ deki fonksiyonların ikinci katsayısı için kesin bir üst sınır elde edildi.

Çalışmanın esas kısmını oluşturan son bölümde de Konvolusyon(Hadamard Çarpımı) ile tanımlanan analitik, yalınkat fonksiyon sınıfları tanıtıldı. Ayrıca katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri, ekstrem noktaları verildi.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyon, Yalınkat Fonksiyon, Hadamard Çarpımı

2016, v+80 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

CLASSES OF ANALYTIC UNIVALENT FUNCTIONS DEFINED BY CONVOLUTION

Figen EBREN CİHAN

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

This work consist of three chapters.

In the first chapter, some of concepts which will be used later are introduced.

In the second chapter, basic properties of the class $\boldsymbol{S}$ of normalized functions by $f(0)=f^{'}(0)-1=0$ on E and of convex and starlike function classes which are the subclasses of $\boldsymbol{S}$ are, where $E=\{z:|z|<1\}$ is the unit disc. Furthermore area theorem for analytic, univalent functions on $E^{*}=\{z:|z|>1\}$ and a sharp upper bound for the second coefficient on $\boldsymbol{S}$ is obtained.

In the last chapter, which consist of the main part of our study, on class of analytic, univalent functions defined by Convolution are introduced. In addition coefficient estimates, distortion theorems, extreme points are given.

Key Words: Analytic Functions, Univalent Functions, Hadamard Product

2016, v+80 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde her türlü desteğini ve fedakârlığını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ'E şükranlarımı sunarım. Ayrıca matematik öğrenimimde katkısı olan tüm hocalarıma ve yüksek lisans eğitimi sürecinde desteklerinden faydalandığım TÜBİTAK'a teşekkürü borç bilirim. Yaşamım boyunca benden esirgemedikleri sevgi, anlayış ve güvenle kendimi gerçekleştirmeme fırsat veren ve desteklerini her zaman hissettiğim sevgili aileme, bu süreçte anlayışı, desteği, hissettirdiği sevgi ile her zorluğun üstesinden gelmemi sağlayan sevgili eşim Aytaç CİHAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Figen EBREN CİHAN

.. /.. /….

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
C_r	Orijin merkezli r yarıçaplı çember
$\overline{D}$	D nin kapanışı
E	Birim disk
E^*	Birim diskin dışı
$f(D)$	D nin f altındaki görüntüsü
$f * g$	f ile g nin Hadamard çarpımı
Imf	f nin sanal kısmı
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
$k(w)$	$k(z)$ nin tersi
Ref	f nin reel kısmı
$\boldsymbol{C(\alpha)}$	α-mertebeli negatif katsayılı konveks fonksiyonlar sınıfı
CV	Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı
CV$(\boldsymbol{\alpha})$	α-mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı
K	Konvekse yakın fonksiyonların sınıfları
P	Pozitif katsayılı ünivalent fonksiyonların sınıfı
S	Normalize edilmiş, E de analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı
ST	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
ST$(\boldsymbol{\alpha})$	α-mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı
T	Negatif katsayılı analitik ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathbf{T}^*(\boldsymbol{\alpha})$	α-mertebeli negatif katsayılı yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\boldsymbol{\Sigma}$	E^* da analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı

GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisindeki en güzel konulardan birisi yalınkat fonksiyonlar teorisidir. Bu konunun temeli Koebe'nin 1907 de yayımladığı makalesi olup, bunu 1914 de Granwall'ın alan teoreminin ispatı ve 1916 da Bieberbach'ın yalınkat fonksiyonların ikinci katsayıları için sonucunu ve onun özellikleri izlemiştir.

Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir has alt kümesini birim diske konform olarak tasvir eden bir dönüşümün varlığı Riemann Dönüşüm Teoremi olarak bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan yalınkat fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan yalınkat fonksiyonlarla çalışmak çoğu kez kolaylık sağlar. Yalınkat fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalizasyonu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\boldsymbol{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1916 da Bieberbach tarafından ileri sürülen, $z \in E$ olmak üzere $f \in \boldsymbol{S}$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $k \geq 2$ olmak üzere $|a_k| \leq k$ olduğu uzun yıllar matematikçileri meşgul etmiştir. 1985 yılına kadar ispatlanamayan bu sonuç Branges tarafından ispatlanmıştır.

Bieberbach Tahmininin önemli sonuçlarından birisi de $\boldsymbol{S}$ sınıfına ait bir f fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ sonucunu kullanarak Koebe tarafından verilen ve distorsiyon teoremleri olarak bilinen $f(z)$ fonksiyonunun kendisinin ve türevinin mutlak değeri için alt ve üst sınırların elde edilmesidir.

Bieberbach probleminin çözümüyle ilgilenen matematikçiler $\boldsymbol{S}$ sınıfının bazı alt sınıflarıyla ilgilenmek suretiyle bu sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili birçok bağıntı elde edildi. Bu alt sınıfların en önemlileri; yıldızıl, konveks, alfa mertebeden yıldızıl, alfa mertebeden konveks, alfa yıldızıl ve alfa konveks fonksiyon sınıflarıdır.

Bu tezin amacı, konvolusyon yardımıyla tanımlanan analitik yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıflarının katsayı koşulları, distorsiyon sınırları ve ekstrem noktalarını incelemektir. Çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, $\boldsymbol{S}$ sınıfı ve yıldızıl, konveks, alfa mertebeli yıldızıl, alfa mertebeli konveks fonksiyon sınıfları hakkında genel bilgiler ve teoremler verilmiş, sonuçlar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, Konvolusyon yardımıyla tanımlanan analitik yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıfları ele alınmıştır. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, Konvolusyon(Hadamard Çarpımı) tanımlanmıştır. İkinci kısımda, (Murugundaramoorthy ve Frasin 2010)' da ele alınan $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})$ ve $\mathbf{ST}(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})$ sınıfları; üçüncü kısımda (Subramanian ve ark. 2010)' da ele alınan $\boldsymbol{TS_p}(\boldsymbol{\alpha})$ ve $\boldsymbol{TS_p^g}(\boldsymbol{\alpha})$ sınıfları; dördüncü kısımda (Aouf ve ark. 2010)' da ele alınan $\boldsymbol{S_\gamma}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ ve $\boldsymbol{TS_\gamma}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ sınıfları incelenmiştir.

1.ÖN BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde sıkça kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu kavramlarla ilgili ayrıntılı bilgiler (Alhfors 1996, Başkan 1996, Nehari 1952, Palka 1991, Hayman 1994, Silverman ve Ponnusamy 2006)' da bulunabilir.

1.1. Tanım. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$D(z_0, r) = \{z \ : |z - z_0| < r\}$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z : \ |z - z_0| \leq r\}$$

$$\partial D(z_0, r) = \{z : \ |z - z_0| = r\}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli r yarıçaplı *açık daire, kapalı daire* ve *çember* denir. Kısalık olsun diye $D(0, r)$ dairesi D_r ile ve D_1 birim dairesi de E ile gösterilecek. Ayrıca, birim dairenin dışı $\mathbb{D}^* = \{z: |z| > 1\}$ ile gösterilecek.

1.2. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_0, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, z_0 noktasına A kümesinin bir *iç noktası*, A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* denir. Eğer A kümesinin bütün noktaları iç nokta ise, A ya *açık küme* ve tümleyeni açık olan kümeye de *kapalı küme* adı verilir. Bir A kümesini bulunduran kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. Eğer $z \in \mathbb{C}$ için her $D(z, r)$ dairesi ile hem A hem de A nın tümleyeninin arakesiti boş kümeden farklı ise, z noktasına A kümesinin bir *sınır noktası* denir.

1.3. Tanım. $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $S_1 = S \cap A_1 \neq \emptyset$, $S_2 = S \cap A_2 \neq \emptyset$, $S = S_1 \cup S_2$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ de ayrık ve açık A_1 ve A_2 kümeleri bulunamıyorsa S kümesine bağlantılı küme denir. Aksi halde küme bağlantısız olarak adlandırılır.

1.4. Tanım. Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

1.5. Tanım. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğri denir.

1.6. Tanım. $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ bir eğri ve $t_1, t_2 \in [a,b]$ olsun. $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ ya basit eğri ya da Jordan eğrisi denir. Eğer γ, basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya basit kapalı eğri denir.

1.7. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $z \in A$ için $|z| \leq M < \infty$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa A kümesine sınırlıdır denir.

1.8. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. A kümesinde alınan her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa A kümesine kompakt veya dizisel kompakt denir.

1.9. Teorem. $A \subset \mathbb{C}$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır (Palka 1991).

1.10. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir, denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye A kümesi üzerinde süreklidir, denir.

1.11. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere f bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilir denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına f nin z_0 daki türevi denir. Yani $f'(z_0)$ değeri,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

veya

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h + z_0) - f(z_0)}{h}$$

dır. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilirse,

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0)$$

dır.

1.12. Tanım. Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının uygun bir D(z_0, δ) komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f, z_0 da analitiktir, denir. Eğer f fonksiyonu bir A kümesinin tüm noktalarında analitik ise f, A üzerinde analitiktir, denir. Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitikse, f ye tam fonksiyon denir.

1.13. Teorem. Eğer f fonksiyonu z_0 merkezli ve R yarıçaplı bir γ çemberinin içinde analitik ise, bu durumda γ eğrisinin içinde bulunan her *z* noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{1.1}$$

dır. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki Taylor açılımı adı verilir (Nehari 1952).

1.14. Tanım. $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasının $D^*(z_0, r)$ delinmiş komşuluğunda analitik ancak z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktasına ayrık tekil nokta adı verilir.

1.15. Teorem. Eğer z_0 noktası f fonksiyonunun ayrık tekil noktası ise f fonksiyonu $D^*(z_0, r)$ delinmiş komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{1.2}$$

açılımıyla temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş komşuluğundaki Laurent açılımı denir (Nehari 1952).

1.16. Tanım. $f(z)$ fonksiyonu (1.2) ifadesiyle verilsin. Burada eğer sonlu sayıda a_{-n} katsayısı sıfırdan farklı, diğer tüm katsayılar sıfır ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

1.17. Tanım. Bir f fonksiyonu, bir D bölgesinde sadece kutup olan aykırı noktalara sahipse f, D de meromorf bir fonksiyondur denir.

1.18. Teorem. Sınırlı bir D bölgesinde analitik ve sınırında sürekli, sabit olmayan bir f fonksiyonu maksimum modülünü D bölgesinin sınırında alır (Palka 1991).

Maksimum modül teoremi $1/f$ fonksiyonuna uygulanırsa, minimum modül teoremi elde edilir.

1.19. Teorem. Sınırlı bir B bölgesinde analitik ve sınırında sürekli, sabit olmayan ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olan bir f fonksiyonu minimum modülünü B bölgesinin sınırında alır (Palka 1991).

Maksimum modül teoreminin basit fakat önemli bir sonucu $f(z)/z$ fonksiyonuna maksimum modül teoremini uygulamakla elde edilen Schwarz Lemmasıdır.

1.20. Teorem (Schwarz Lemması). f fonksiyonu E birim dairesinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. O halde E de $|f(z)| < |z|$ ve $|f'(0)| < 1$ dir. Eşitlik $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.21. Teorem. Kompleks düzlemde bulunan her z değerleri için f sınırlı bir tam fonksiyon ise, bu durumda düzlemin tamamında f (z) sabittir.

1.22. Teorem (Schwarz-Pick Lemması). $z \in E$ olmak üzere $|f(z)| < 1$ olacak şekilde $f : E \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu verilsin. Bu durumda her $z \in E$ için;

$$|f(z)| < \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

dır.

1.23. Tanım. f: $A \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in A$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de ω_0 da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür, denir. Eğer her $z_0 \in A$ noktasında f konform ise f, A da konformdur denir.

1.24. Teorem. f, bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 da bir konform dönüşümdür.

1.25. Teorem. D en az iki farklı sınır noktası bulunan basit bağlantılı bir bölge olsun. Bu durumda D yi konform olarak birim daire üzerine resmeden bir tek analitik f fonksiyonu vardır (Nehari 1952).

1.26. Tanım. D, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $u\colon D \to \mathbb{C}$, D de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer her $z \in D$ için

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna D de reel harmonik fonksiyon denir.

2. ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biri analitik ve yalınkat fonksiyonlar teorisidir. Bu bölümde E birim dairesi üzerinde tanımlı yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı ve buna bağlı alt sınıfları oluşturularak bu sınıflara ait fonksiyonların genel özellikleri, katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri verilecektir. Bazı alt sınıfları için ekstrem noktalar elde edilecektir.

Bu bölümde belirtilen kavramlarla ilgili ayrıntılı bilgilere (Pommerenke 1975, Schober 1975, Duren 1983, Goodman 1983)'den ulaşılabilir.

2.1. Yalınkat Fonksiyonların Temel Özellikleri

2.1.1. Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve z_1 ve $z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ iken $z_1 = z_2$ ise f ye D de yalınkat (ünivalent)tır, denir.

Tanımdan da görüleceği gibi bir f fonksiyonunun yalınkat olması, analitik olmasını gerektirmez. Örneğin; $f(z) = z + z^{-1}$ fonksiyonu orijini bulunduran herhangi bir bölgede yalınkattır ancak bu fonksiyon $z = 0$ da basit kutba sahip olduğu için bu bölgede analitik değildir.

D, karmaşık düzlemde en az iki sınır noktası bulunan basit bağlantılı herhangi bir bölge ve $E = \{z: |z| < 1\}$ açık birim dairesi olsun. Riemann dönüşüm teoremine göre D bölgesi analitik ve yalınkat olarak E üzerine dönüştürülebilir. Yani bir tek $\varphi: D \to E$ analitik dönüşümü mevcuttur. Böylece herhangi $g: D \to \mathbb{C}$ analitik ve yalınkat fonksiyonu için $f: E \to \mathbb{C}, f = g \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonu da analitik ve yalınkat olur. Bu nedenle çalışmalar $E = \{z: |z| < 1\}$ (veya $E^* = \{z: |z| > 1\}$) de yalınkat fonksiyonlarla sınırlı tutulacaktır.

h, E de analitik ve yalınkat bir fonksiyon olsun. $h'(0) \neq 0$ olduğundan

$$f(z) = \frac{h(z) - h(0)}{h'(0)}$$

fonksiyonu E de $f(0) = 0, f'(0) = 1$ bağıntılarını sağlayan analitik ve yalınkat bir fonksiyondur. E de analitik ve yalınkat , $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ile normalize edilmiş bir f fonksiyonu,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. E de (2.1) şeklinde bir açılıma sahip yalınkat fonksiyonların sınıfı ***S*** ile gösterilir. Buna göre;

$$\boldsymbol{S} = \{f : f : E \to \mathbb{C}, \text{analitik ve yalınkat}, f(0) = f'(0) - 1 = 0\}$$

dir.

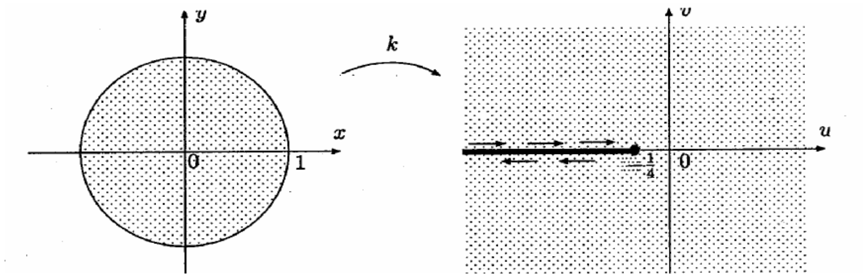
Aşağıda ***S*** sınıfına ait, çok kullanılan bazı fonksiyon örnekleri verilmiştir.

i. $f(z) = z$ özdeşlik fonksiyonu E yi kendi üzerine resmeder.

ii. $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$ fonksiyonu Koebe fonksiyonu olarak adlandırılır. $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ denirse $wz^2 - (2w + 1)z + w = 0$ yazılır. z ye göre ikinci dereceden bu ifadenin köklerinin varlığı

$$\Delta = 1 + 4w > 0, \quad (w \in \mathbb{R})$$

olmasıyla mümkün olacağından $w < -1/4$ olamaz. O halde $k(z)$ dönüşümü E yi $-\infty$ dan -1/4 e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış karmaşık düzlem üzerine konform olarak resmeder.



Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu

iii. $w = f(z) = z/(1-z)$ fonksiyonu E yi $\text{Re}\{w\} > -1/2$ yarı düzlemine birebir olarak resmeder.

iv. $f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu E yi $-\frac{\pi}{4} < Im(w) < \frac{\pi}{4}$ yatay şeridi üzerine birebir resmeder.

v. $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu E yi bir kardioidin içi üzerine birebir olarak resmeder.

Burada $\boldsymbol{S}$ sınıfının elemanlarının temel dönüşümler altında korunduğuna dair bir sonuç verilecektir. İspat (2.1) bağıntısı ve yalınkatlık tanımı kullanılarak elde edilir.

2.1.2. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{S}$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonlar da bu sınıfa aittir.

i. $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$

ii. $g(z) = e^{-i\theta}f\left(e^{i\theta}z\right)$

iii. 0$< r < 1$ için $g(z) = r^{-1}f(rz)$

iv. $\Psi, \Psi(0) = 0\,, \Psi'(0) = 1$ olmak üzere $f(E)$ bölgesi üzerinde analitik ve yalınkat ise $g = \Psi \circ f$

v. $f(\text{z}) \neq \text{w}$ olmak üzere $g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)}$

vi. $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$

vii. $f \in \boldsymbol{S}$ olmak üzere ve $|\alpha| < 1$ için $g(z) = \frac{f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)-f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)}$

İspat. ii. ve iv. in ispatı verilecektir.

ii. $f(z) \in \boldsymbol{S}$ olduğundan

$$g(z) = e^{-i\theta} f\left(e^{i\theta} z\right) = e^{-i\theta}\left(e^{i\theta} z + a_2 e^{2i\theta} z^2 + \cdots + a_n e^{in\theta} z^n + \cdots\right)$$
$$= z + a_2 (e^{i\theta}) z^2 + \cdots + a_n e^{i(n-1)\theta} z^n + \cdots$$

yazılabilir. Buradan $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ olduğu görülür. f fonksiyonu E de analitik ve yalınkat olduğundan g fonksiyonu da E de analitik ve yalınkattır. Dolayısıyla $g(z) \in \boldsymbol{S}$ dir.

iv. $f(z) \in \boldsymbol{S}$ ve Ψ , $f(E)$ de analitik ve yalınkat olduğundan $g = \Psi \circ f$ bileşke fonksiyonu da *E* de yalınkat ve analitiktir.

$$g(0) = \Psi\left(f(0)\right) = \Psi(0) = 0$$

ve

$$g'(z) = \Psi'\left(f(z)\right) f'(z) \Rightarrow g'(0) = \Psi'\left(f(0)\right) f'(0) = \Psi'(0) = 1$$

olup $g(z) \in \boldsymbol{S}$ elde edilir.

2.2. Birim Diskin Dışında Analitik Yalınkat Olan Fonksiyonların Sınıfı

2.2.1. Tanım. $E^* = \{\zeta: 1 < |\zeta| < \infty\}$ bölgesinde analitik ve yalınkat olan

$$g(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)} = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\zeta^n} \tag{2.2}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı $\boldsymbol{\Sigma}$ ile sıfır değerini alamayan $g \in \boldsymbol{\Sigma}$ fonksiyonlarının sınıfı $\boldsymbol{\Sigma}_0$ ile gösterilir.

2.2.2. Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \boldsymbol{S}$ ise bu takdirde;

$$g(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)} = \zeta - a_2 + ({a_2}^2 - a_3)\zeta^{-1} + \cdots \tag{2.3}$$

fonksiyonu $\boldsymbol{\Sigma}_0$ sınıfına aittir. Tersine $g(\zeta)$, (2.3) ile verilmiş ise bu takdirde;

$$f(z) = \frac{1}{g(1/z)} = z - b_0 z^2 + \left({b_0}^2 - b_1\right)z^3 + \left(2b_0 b_1 - b_2 - {b_0}^3\right)z^4 + \cdots$$

fonksiyonu da $\boldsymbol{S}$ sınıfına aittir.

İspat. $|\zeta| > 1$ olduğundan $1/\zeta \in E$ olup f, $1/\zeta$ da analitiktir. O halde

$$g(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)} = \frac{1}{\frac{1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \cdots} = \zeta - a_2 + ({a_2}^2 - a_3)\zeta^{-1} + \cdots$$

bulunur.Yani $g(\zeta) \in \boldsymbol{\Sigma}$ dır.

$g(\zeta) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(1/\zeta) = \infty$ olur. Yani $f, 1/\zeta$ da bir kutba sahiptir. $1/\zeta \in E$ ve f, E de analitik olduğundan bu mümkün değildir. O halde $g(\zeta) \neq 0$, dolasıyla $g(\zeta) \in \boldsymbol{\Sigma}_0$ dır.

Burada $f(z)$ nin $\boldsymbol{S}$ sınıfına ait olduğu gösterilecektir. $z \in E$ için $\zeta = z^{-1} \in E^*$ olur. $g(\zeta) = 1/f(z)$ ve $f(z) = 1/g(\zeta)$ olur. $g(\zeta), E^*$da analitik, yalınkat ve $g\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0$ olduğundan $f(z), E$ de analitik ve yalınkattır. Üstelik bölme işlemi sonunda

$$f(z) = \frac{1}{g(\zeta)} = z - b_0 z^2 + \left({b_0}^2 - b_1\right)z^3 + \left(2b_0 b_1 - b_2 - {b_0}^3\right)z^4 + \cdots$$

elde edilir. Yani $f(z) \in \boldsymbol{S}$ dir.

2.3. Alan Teoremi

2.3.1. Teorem. $f \in \boldsymbol{S}$ ve $\overline{D}_r = \{z: |z| \leq r \leq 1\}$ olsun. Bu durumda $f(\overline{D}_r)$ sınırlı bölgesinin alanı

$$A_r = \pi |a_n|^2 r^{2n}$$

dir.

İspat. $z = x + iy \in \overline{D}_r$ ve $w = f(z) = u + iv$ olsun.

$$A_r = \iint\limits_{f(\overline{D}_r)} du\, dv = \iint\limits_{\overline{D}_r} \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dx\, dy$$

dir. Burada f nin analitikliği göz önüne alınırsa,

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = {u_x}^2 + {v_x}^2 = |f'(z)|^2$$

$$A_r = \iint\limits_{\overline{D}_r} |f'(z)|^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^2 \rho\, d\rho\, d\theta \tag{2.4}$$

olur.

$$f'\left(\rho e^{i\theta}\right) = a_1 + 2a_2\rho e^{i\theta} + \cdots + n a_n \rho^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \cdots$$

olduğundan

$$\left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2 = f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\overline{f'(\rho e^{i\theta})} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \rho^{2n-2} + \sum_{k \neq 0}^{\infty} c_k\, e^{ik\theta}$$

elde edilir. Buradaki c_k lar a_n ve ρ a bağlıdır. Böylece,

$$\rho\left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2\,\rho^{2n-1} + \sum_{k\neq 0}^{\infty} \rho c_k\, e^{ik\theta}$$

ifadesi (2.4) de yerine yazılıp terim terime integrallenebilirliği ve $\mathrm{k} \neq 0$ için $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$A_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$$

bulunur.

2.3.2 Örnek. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $D = \{z\colon r \leq |z| \leq R, 0 < r < R < 1\}$ de analitik olsun. $f(D)$ nin alanı,

$$A = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n|a_n|^2(R^{2n} - r^{2n})$$

dir.

Çözüm.

$$A = \iint_{f(D)} du\, dv = \iint_D \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} dx\, dy = \int_r^R \int_0^{2\pi} \left|f'(\zeta e^{i\theta})\right|^2 \zeta d\theta\, d\zeta$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \left|f'(\zeta e^{i\theta})\right|^2 \zeta d\theta \ = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|a_n|^2 \zeta^{2n-2}$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa;

$$A=\int_r^R 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|a_n|^2\,\zeta^{2n-1}d\zeta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|a_n|^2 \frac{\zeta^{2n}}{2n}\ \Big|_r^R$$

$$=2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|a_n|^2 \frac{R^{2n}-r^{2n}}{2n} = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n|a_n|^2\,(R^{2n}-r^{2n})$$

olur.

2.3.3. Teorem (Alan Teoremi). $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ fonksiyonu $E^*=\{z:|z|>1\}$ de analitik ve yalınkat ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

dir.

İspat. f nin almadığı değerlerinin kümesi D olsun. $|z|=r>1$ çemberinin f altındaki görüntüsü γ_r olsun. f yalınkat olduğundan γ_r, $D_r \supset D$ bölgesini saran basit kapalı bir eğridir. Green teoreminden D_r nin alanı

$$A_r=\frac{1}{2i}\int_{\gamma_r} \overline{w}dw = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{f(z)}\,f'(z)dz$$

dir. Buradan

$$A_r=\frac{1}{2i}\int_{|z|=r}\left(\bar{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}\,(\bar{z})^{-n}\right)\left(1-\sum_{m=1}^{\infty} mb_m z^{-m-1}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(re^{-i\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}\,r^{-n}e^{-in\theta}\right)\ \left(1-\sum_{m=1}^{\infty} mb_m r^{-m-1}e^{-i(m+1)\theta}\right)re^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(r^2 - \sum_{m=1}^{\infty} b_m r^{-m+1} e^{-i(m+1)\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n}\, r^{-n+1} e^{-i(n-1)\theta}\right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\,\overline{b_n}\, b_m r^{-n-m} e^{-i(n+m)\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} r^2 d\theta - \sum_{m=1}^{\infty} m b_m r^{-m+1} \int_0^{2\pi} e^{-i(m+1)\theta} d\theta\right.$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n}\; r^{-n+1} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\,\overline{b_n}\, b_m r^{-n-m}$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} e^{-i(n+m)\theta} d\theta\right)$$

elde edilir. $\{e^{in\theta}\}$ ortogonal yani

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

olduğundan

$$A_r = \frac{1}{2}\left(2\pi r^2 - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}\right) = \pi\left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}\right)$$

olur. $r \to 1^+$ için

$$A_r = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right)$$

bulunur. $A_r \geq 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

elde edilir.

2.3.4. Teorem. $f \in \boldsymbol{S}$ ise $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitlik ancak ve ancak f nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir.

İspat. $f \in \boldsymbol{S}$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.1.2 (vi) den dolayı $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ de $\boldsymbol{S}$ sınıfına aittir. Üstelik

$$g(z) = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \left(\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{8}{a_2}^2\right)z^5 + \cdots$$

dır. Teorem 2.2.2 gereği

$$h(\xi) = \frac{1}{g(1/\xi)} = \xi - (1/2)a_2\xi^{-1} + b_3\xi^{-3} + b_5\xi^{-5} + \cdots \qquad (2.5)$$

fonksiyonu $\boldsymbol{\Sigma}$ sınıfında bulunur. Teorem 2.3.3 den dolayı

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 = |-a_2/2|^2 + 3|b_3|^2 + 5|b_5|^2 + \cdots \leq 1 \qquad (2.6)$$

olur. Buradan $|-a_2/2|^2 \leq 1$ ve $|a_2| \leq 2$ elde edilir. Eğer $|a_2| = 2$ yani $a_2 = 2e^{i\alpha}$ ise (2.6) bağıntısında her n≥ 2 için $b_n = 0$ olur. Bu takdirde (2.5) bağıntısı

$$h(\xi) = \xi - (1/2)\,a_2\xi^{-1} = \xi - e^{i\alpha}\xi^{-1}$$

olup

$$g(z) = \frac{1}{h(1/z)} = \frac{1}{z^{-1} - e^{i\alpha}z} = \frac{z}{1 - e^{i\alpha}z^2}$$

dir.

$$f(z^2) = g(z)^2 = \frac{z^2}{(1 - e^{i\alpha} z^2)^2}$$

olduğundan $f(z) = z\left(1 - e^{i\alpha} z\right)^{-2}$ dir. O halde eşitlik ancak ve ancak

$$f(z) = e^{i\alpha} k\left(e^{-i\alpha} z\right) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2}$$

olması durumunda geçerlidir. Bu ise Koebe fonksiyonunun bir rotasyonudur.

2.3.5. Teorem. ***S*** sınıfının her fonksiyonunun değer kümesi $\{\omega : |\omega| \leq 1/4\}$ dairesini kapsar. Bu eşitsizlik kesin olup eşitlik ancak ve ancak $f(z)$ nin Koebe fonksiyonu olması durumunda geçerlidir.

İspat. Eğer bir $f \in \boldsymbol{S}$ fonksiyonu $\omega \in \mathbb{C}$ değerini almıyorsa

$$g(z) = \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{\omega}\right) z^2 + \cdots$$

fonksiyonu Teorem 2.1.2 (v) gereği ***S*** sınıfına aittir. $f \in \boldsymbol{S}$ ve Teorem 2.3.4 gereği $\left|\left(a_2 + \frac{1}{\omega}\right)\right| \leq 2$ olduğundan $\frac{1}{|\omega|} \leq 2 + |a_2|$ olur. Dolayısıyla buradan $|\omega| \geq 1/4$ elde edilir. Böylece f nin almadığı her değer $|\omega| < 1/4$ diskinin dışında kalmak zorundadır. Eğer $|\omega| \leq 1/4$ ise $|a_2| = 2$ olmak zorundadır. Bu ise $f(z)$ nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir.

2.4. Distorsiyon Teoremleri

Birim diskin içinin veya dışının bir yalınkat fonksiyon altındaki resmi, bu bölgenin şeklinin bir distorsiyonu (burulma) olarak düşünülebilir. Bu distorsiyonun miktarı için bazı sınırların elde edilmesine yani dönüşümün kendisinin ve türevlerinin mutlak değerleri için sınırlar elde edilmesine distorsiyon teoremleri denir.

Aşağıda Koebe distorsiyon teoremleri olarak bilinen, $\boldsymbol{S}$ sınıfına ait bir f fonksiyonunun $z \in \overline{D_r} = \{z: |z| \leq r < 1\}$ olması durumunda $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ için alt ve üst sınırlar verilecektir.

2.4.1. Teorem. $f \in \boldsymbol{S}$ ise her $z \in \overline{D_r}$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{2.7}$$

ve

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \tag{2.8}$$

dır.

İspat. $0 < |\alpha| < 1$ için

$$\omega(z) = f\left(\frac{z+\alpha}{1+z\bar{\alpha}}\right)$$

fonksiyonu E de yalınkattır. Böylece

$$g(z) = \frac{\omega(z) - f(\alpha)}{f'(\alpha)(1-|\alpha|^2)}$$

fonksiyonu da E de yalınkattır ve $g(0) = 0,\ g'(0) = 1$ bağıntıları sağlanır. Dolayısıyla $g \in \boldsymbol{S}$ dir. Eğer a_2, $g(z)$ nin orijin civarında Taylor açılımının ikinci katsayısı ise,

$$a_2 = \frac{g''(0)}{2!} = \frac{1}{2}\left[\frac{f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)}{f'(\alpha)} - 2\bar{\alpha}\right]$$

dir. $|a_2| \leq 2$ olduğundan

$$\left|\frac{f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)}{f'(\alpha)} - 2\bar{\alpha}\right| \leq 4$$

dir. α ile z yer değiştirirse,

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} \tag{2.9}$$

olur. $|z| = r < 1$ alınırsa,

$$\left|Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r}{1-r^2}\right| \leq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq \ Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2} \tag{2.10}$$

bulunur. $z = re^{i\theta}$ alınırsa,

$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$ ve $f''(z) = e^{-2i\theta}(u_{rr} + iv_{rr})$

olduğundan

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{r(u_{rr} + iv_{rr})}{u_r + iv_r} = \frac{r(u_{rr} + iv_{rr})(u_r - iv_r)}{{u_r}^2 + {v_r}^2}$$

dir. Böylece

$$Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{r(u_{rr} + iv_{rr})(u_r - iv_r)}{{u_r}^2 + {v_r}^2} = r\frac{\partial}{\partial r}In({u_r}^2 + {v_r}^2)^{1/2} = r\frac{\partial}{\partial r}\ In|f'(z)|$$

elde edilir. Bu son ifade (2.9) da yerine yazılır ve $r \neq 0$ ile bölünürse,

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\ In|f'(z)|\ \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

bulunur. 0 dan r ye integral alındığında

$$In(1-r) - 3In(1+r) \leq \ In|f'(z)| \leq In(1+r) - 3In(1-r)$$

veya

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.8) bağıntısını elde etmek için yukarıdaki eşitsizliğin ikinci kısmının $\zeta = te^{i\theta}$ için $0 \leq t \leq r$ doğru parçası boyunca $\zeta = 0$ dan $\zeta = z = \ re^{i\theta}$ ya integrali alınırsa,

$$|f'(z)| = \left|\int_0^r f'(\zeta)d\zeta\right| \leq \int_0^r |f'(\zeta)|\,d\zeta \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}dt = \frac{r}{(1-r)^2} \qquad (2.11)$$

bulunur.

Şimdi (2.8) in sol tarafındaki eşitsizliğin doğruluğu gösterilecektir. $0 \leq r < 1$ iken $r(1+r)^{-2} < 1/4$ olduğundan $|f(z)| \ \geq 1/4$ ise eşitsizlik sağlanır. $|f(z)| > 1/4$ olduğu kabul edilsin. Teorem 2.3.5 gereği, orijini $w = f(z)$ noktasına birleştiren γ_1 doğrusu $f(E)$ içinde kalır. Eğer $\gamma = f^{-1}(\gamma_1)$ ise γ_1 boyunca,

$$|w| = \int_0^{|w|} |dw| = L(\gamma_1)$$

ifadesi (2.7) nin sol tarafındaki eşitsizlik ve $|dz| = [(dr)^2 + r^2(d\theta)^2]^{1/2} \geq dr$ eşitsizliği göz önüne alınırsa, r boyunca

$$|f(z)| = \int_0^{|z|} |f'(z)||dz| \geq \int_0^r \frac{1-r}{(1+r)^3} dr = \frac{r}{(1+r)^2} \tag{2.12}$$

olur. (2.11) ve (2.12) birleştirilirse (2.8) in sol tarafındaki eşitsizlik elde edilir. (2.8) in sağ tarafındaki eşitsizliğin doğruluğu da benzer şekilde gösterilir. Eşitlik durumu Koebe fonksiyonu ve onun bir rotasyonu için geçerlidir.

2.4.2. Teorem. Eğer $f \in \boldsymbol{S}$ ve $0 \leq r < 1$ ise bu takdirde $0 \leq |z| < r$ olacak şekildeki her *z* için

$$|Argf'(z)| \leq 2In\frac{1+r}{1-r}$$

dır.

İspat. (2.9) dan

$$\left|Im\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

$$Im\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{u_r v_{rr} - v_r u_{rr}}{{u_r}^2 + {v_r}^2} = r\frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)$$

olduğundan,

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)\right| \leq \frac{4}{1-r^2}$$

elde edilir. $|Argf'(z)| = \left|\int_0^r \frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)dr\right|$ eşitliği kullanılırsa;

$$|Argf'(z)| = \left|\int_0^r \frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)dr\right| \leq \int_0^r \left|\frac{\partial}{\partial r}Argf'(z)\right| dr \leq \int_0^r \frac{4dr}{1-r^2} = 2In\frac{1+r}{1-r}$$

elde edilir. Ancak bu sonuç kesin değildir. Kesin sonuç Goluzin (1936) tarafından elde edilmiştir. Buna göre $f \in \boldsymbol{S}$ ise

$$|Argf'(z)| \leq \begin{cases} 4Arcsinr \ , r \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi + In\dfrac{r^2}{1-r^2} \ , \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \end{cases}$$

dir.

1918 den beri meşhur olan ve Bieberbach tahmini olarak bilinen $\boldsymbol{S}$ sınıfına ait fonksiyonların a_n katsayıları için $|a_n| \leq n,\ n \geq 2,$ eşitsizliğinin gösterilmesi uzun yıllar matematikçileri meşgul etmiştir. 1985 yılında Louis de Branges bu eşitsizliğin doğruluğunu kesin olarak göstermiştir. Uzun olan bu ispat burada verilmeyecek, sadece teorem ifade edilecektir.

2.4.3. Teorem. Eğer $f \in \boldsymbol{S}$ ise $|a_n| \leq n,\ (n \geq 2)$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir (Hayman 1994).

2.5. Reel Kısmı Pozitif Fonksiyonlar

2.5.1. Tanım. $z \in E$ için $Re(f(z)) > 0$ olacak şekilde E de analitik ve

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

şeklinde bir açılıma sahip olan fonksiyonlara reel kısmı pozitif fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\boldsymbol{P}$ ile gösterilir.

Tanımda da belirtildiği gibi $\boldsymbol{P}$ sınıfına ait fonksiyonların yalınkat olması gerekmez. Örneğin; $n \geq 0$ sayısı için $f(z) = 1 + z^n$, $\boldsymbol{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \geq 2$ için yalınkat değildir. Koebe fonksiyonunun $\boldsymbol{S}$ sınıfında oynadığı önemli rolü $\boldsymbol{P}$ sınıfında

$$L(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

fonksiyonu oynar. Bu fonksiyon, $\boldsymbol{P}$ de olup aynı zamanda E de analitik ve yalınkattır. E yi sağ yarı düzlem içine resmeder. $L(z)$ ile $k(z)$ nin karakterinde bir fark vardır. ***S*** sınıfındaki birçok ekstremal problemde Koebe fonksiyonu tek çözümdür. Buna karşılık $L(z)$ fonksiyonu, $\boldsymbol{P}$ sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonunun p_n katsayılarını maksimize eder. Fakat $n\geq 2$ için $p_n=2$ olacak şekilde $\boldsymbol{P}$ de sonsuz çoklukta fonksiyon vardır. Bu fonksiyonların birinden diğerine herhangi bir rotasyonla geçmek mümkün değildir.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1+\lambda_2=1$ olacak şekilde negatif olmayan iki sayı ve $f_1(z), f_2(z)\in\boldsymbol{P}$ olmak üzere $f(z)=\lambda_1 f_1(z)+\lambda_2 f_2(z)$ fonksiyonu da ***P*** dedir. Bu nedenle ***P*** sınıfı konvekstir. Buradan hareketle her k için $\lambda_k\geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=1$ olmak üzere

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\, f_k(z)$$

şeklinde sonsuz toplama geçilebilir.

Eğer $f(z)\in\boldsymbol{P}$ ise her bir $\theta\in\mathbb{R}$ için $f(e^{-i\theta}z)$ de ***P*** dedir. λ_k lar yerine $d\lambda(\theta)$ yazılarak yukarıdaki ifade Riemann Stieltjes integraline dönüştürülebilir.

2.5.2. Teorem. $f(z)\in\boldsymbol{P}$ ise o zaman reel değerli, azalmayan bir $\lambda(\theta)$ fonksiyonu

$$\int d\,\lambda(\theta)=2\pi$$

olacak şekilde vardır ve her $z\in E$ için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}d\lambda(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L\left(e^{-i\theta}z\right)d\lambda(\theta)$$

dir. Tersine $f(z)$ teoremdeki şartları sağlayacak şekilde tanımlanır ve $\lambda(\theta)$ azalmayan ise $f(z)\in\boldsymbol{P}$ dir.

İspat. (Goodmann 1983)

2.5.3. Teorem. $f(z)$, $f_1(z), f_2(z) \in \boldsymbol{P}$ ise bu takdirde aşağıda verilen eşitliklerdeki fonksiyonlarda $\boldsymbol{P}$ dedir.

i. $g(z) = f\left(e^{i\alpha}z\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$

ii. $g(z) = \left(f(z)\right)^t$ veya $g(z) = f(tz), -1 \leq t \leq 1$

iii. $g(z) = 1/f(z)$

iv. $g(z) = \frac{1}{a}\left[f\left(\frac{z+\gamma}{1+z\bar{\gamma}}\right) - bi\right]$ $, f(\gamma) = a + bi\ , \gamma \in E$

v. $g(z) = (f_1(z))^{t_1}(f_2(z))^{t_2}$, $0 \leq t_1, t_2, t_1 + t_2 \leq 1$

vi. $g(z) = \frac{f(z)+ib}{1+ibf(z)}$, $b \in \mathbb{R}$

İspat. İspat $\boldsymbol{P}$ nin tanımından kolayca elde edilir.

2.5.4. Teorem. $f(z) \in \boldsymbol{P}$ ve $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ ise $n = 1,2, \ldots$ için $|p_n| \leq 2$ dir. Bu eşitsizlik her bir n için kesindir.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{P}$ olduğundan Teorem 2.5.2 gereği

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} d\lambda(\theta)$$

dir. Buradan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\theta} z^n\right) d\,\lambda(\theta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\,\lambda(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\lambda(\theta)\right) z^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$p_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\,\lambda(\theta)$$

dır. Böylece

$$|p_n| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\,\lambda(\theta) = 2$$

bulunur. Eşitlik ancak ve ancak

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

fonksiyonu için geçerlidir.

2.6. Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kısımda $\boldsymbol{S}$ sınıfının alt sınıfları olan yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıfları tanıtılacak ve bazı temel özellikleri verilecektir.

2.6.1. Tanım. Düzlemde bir D kümesi ve bir $\omega_0 \in D$ noktası verilmiş olsun. Eğer ω_0 noktasını diğer her bir $\omega \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D kümesine ω_0 noktasına göre yıldızıldır, denir.

Özel olarak $\omega_0 = 0$ için D bölgesi orijine göre yıldızıldır, ya da, sadece D bölgesi yıldızıldır diye tanımlanır.

2.6.2. Tanım. f fonksiyonu E de yalınkat olmak üzere her $z \in E$ için $f(z)$, E bölgesini ω_0=$f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl olan bir bölgeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonu ω_0 noktasına göre yıldızıldır, denir.

$\omega_0 = 0$ alınırsa $f(z)$ fonksiyonu yıldızıl fonksiyon olarak adlandırılır. Yıldızıl fonksiyonların kümesi $\boldsymbol{ST}$ ile gösterilir.

Koebe fonksiyonu , $\omega_0 > -1/4$ olmak üzere ω_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyondur.

2.6.3. Tanım. $\Gamma_{\mathbf{z}}$: $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$ şeklinde parametrelendirilmiş bir eğri ve $x(t)$ ile $y(t)$ reel değerli fonksiyon olmak üzere;

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + i\frac{\partial y}{\partial t} \neq 0, t \in [a, b]$$

olsun. $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}}$ eğrisinin $f(z)$ analitik fonksiyonu altındaki görüntüsü $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}}$ ve $\omega_0 \notin \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}}$ olsun. Eğer $\arg(\omega - \omega_0)$ her $t \in [a, b]$ için azalmayan bir fonksiyon yani

$$\frac{\partial}{\partial t}\arg(\omega - \omega_0) \geq 0\,, t \in [a, b]$$

ise $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}}$ eğrisine ω_0 noktasına göre yıldızıl eğridir denir.

Tanım 2.6.3 daki $\frac{\partial}{\partial t}\arg(\omega - \omega_0) \geq 0\,, t \in [a, b]$ eşitsizliği ele alınırsa;

$$\frac{\partial}{\partial t}\arg(\omega - \omega_0) = \frac{\partial}{\partial t}[Im\, ln(\omega - \omega_0)] = Im\left[\frac{\partial}{\partial t}\; ln(\omega - \omega_0)\right]$$

$$= Im\left[\frac{\partial}{\partial z}[ln(\omega - \omega_0)]\frac{\partial z}{\partial t}\right] = Im\left[\frac{f'(z)}{f(z) - \omega_0} \cdot z'(t)\right]$$

elde edilir. Dolayısıyla $Im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0}\cdot z'(t)\right] \geq 0$ olur. Böylece aşağıdaki lemma ispat edilmiş olur.

2.6.4. Lemma. $\boldsymbol{\Gamma_z}$: z$=z(t)$ eğrisinin $f(z)$ altındaki görüntüsünün ω_0 noktasına göre yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$Im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0}\cdot z'(t)\right] \geq 0$$

olmasıdır.

f fonksiyonu ω_0 noktasına göre yıldızıl ise

C$_R$: $|z| = R$ eğrisi için z$= Re^{it}$,$0 \leq t \leq 2\pi$ olmak üzere $z'(t) = iRe^{it} = iz$ olup

$$Im\left[\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0}\cdot z'(t)\right] = Im\left[\frac{izf'(z)}{f(z)-\omega_0}\right] = Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-\omega_0}\right] \geq 0 \qquad (2.13)$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç. f fonksiyonu ω_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon ise

$$\frac{zf'(z)}{f(z)-\omega_0} \in \boldsymbol{P}$$

dir.

2.6.5. Teorem. $f(z)$, $E_R : |z| \leq R$ kapalı diskinde analitik ve yalınkat bir fonksiyon olsun. $\mathbf{C}_R : |z| = R$ ve her $z \in \mathbf{C}_R$ için $f(z)$ nin E_R yi $\omega = 0$ noktasına göre yıldızıl bir bölgeye resmetmesi için gerek ve yeter şart

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$$

olmasıdır.

İspat. (2.13) ifadesinde $\omega_0 = 0$ alınarak istenilen sonuca ulaşılır.

2.6.6. Teorem. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \boldsymbol{ST}$ ise her pozitif n tamsayısı için $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik f nin Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonu olması durumunda gerçekleşir.

İspat. $f(z) \in \boldsymbol{ST}$ olduğundan $\frac{zf'(z)}{f(z)} \in \boldsymbol{P}$ dir. Bu nedenle

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, z_k = g(z)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece

$$zf'(z) = f(z)g(z)$$

olup

$$z+\sum_{k=2}^{\infty} ka_k z^k = \left(z+\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right)$$

eşitliğinden z^n teriminin katsayıları yazılırsa;

$$na_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k}\, b_k + b_{n-1} \quad , n = 3,4,5, \dots \tag{2.14}$$

elde edilir. $n = 2$ için $2a_2 = a_2 + b_1 \Rightarrow a_2 = b_1$ olur. $g(z) \in \boldsymbol{P}$ olduğundan her k için $|b_k| \leq 2$ dir. Dolayısıyla $|a_2| = |b_1| \leq 2$ yazılır.

Kabul edelim ki $|a_k| \leq k$ olsun. (2.14) eşitliğinden;

$$|(n-1)a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k}b_k + b_{n-1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n-2} |a_{n-k}||b_k| + |b_{n-1}|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-2} 2|a_{n-k}| + 2 = 2\left(1+\sum_{k=1}^{n-2} |a_{n-k}|\right)$$

$$\leq 2\left(1+\sum_{k=1}^{n-2} (n-k)\right) = 2\left(1+\sum_{k=2}^{n-1} k\right) = n(n-1)$$

olup $|a_n| \leq n$ elde edilir.

2.6.7. Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ için $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ ise $f(z) \in \boldsymbol{ST}$ dir.

İspat.

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\,z^n$$

için $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leq 1$ olsun. O halde

$f'(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}$ ise $\quad zf'(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n$

olup

$$|zf'(z)-f(z)|=\left|z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n-z-\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\right|$$

$$\leq\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^n=\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\,|z|^n-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n$$

$$\leq|z|-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n\leq\left|z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n|z|^n\right|=|f(z)|$$

$$|zf'(z)-f(z)|\leq|f(z)|$$

elde edilir. Yani $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\leq 1$ bulunur. Böylece $Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geq 0$ olup $f(z)\ \in \boldsymbol{ST}$ dir**.**

2.6.8. Teorem. $f(z)\ \in \boldsymbol{ST}$ ise

$$\frac{r}{(r+1)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

ve

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

dir.

İspat. $\boldsymbol{ST} \subset \boldsymbol{S}$ olduğundan $f(z) \in \boldsymbol{ST}$ ise $f(z)$ aynı zamanda $\boldsymbol{S}$ sınıfındadır. O halde Teorem 2.4.1. deki eşitsizlikleri kullanılarak yukarıdaki eşitsizlikler elde edilmiş olur.

Koebe fonksiyonu aynı zamanda yıldızıl olduğundan buradaki eşitsizlikler alt sınıflar için de geçerlidir.

2.6.9. Tanım. B karmaşık düzlemde bir bölge olsun. Farklı herhangi $z, w \in B$ noktaları ve $0 \le t \le 1$ için $tz + (1-t)w$ doğru parçası B de kalıyorsa B ye konveks bölge denir.

$f(E)$ konveks bir bölge ise E de analitik f fonksiyonuna konvekstir denir. $\boldsymbol{S}$ sınıfına ait konveks fonksiyonların kümesi $\boldsymbol{CV}$ ile gösterilir.

$L(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu E birim diskini sağ yarı düzleme resmettiğinden konvekstir.

Herhangi bir konveks bölge her noktasına göre yıldızıl olduğundan bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir yıldızıl fonksiyondur. Ancak tersi doğru değildir.

2.6.10. Tanım. Γ_z : $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$ şeklinde parametrelendirilmiş bir eğri ve $x(t)$ ile $y(t)$ reel değerli fonksiyon olmak üzere;

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + i\frac{\partial y}{\partial t} \neq 0 \;\; t \in [a, b]$$

olsun. $\mathbf{\Gamma_z}$ eğrisinin $f(z)$ analitik fonksiyonu altındaki görüntüsü $\mathbf{\Gamma_w}$ ve $\omega_0 \notin \mathbf{\Gamma_w}$ olsun. Eğer $arg(z'(t)f'(t))$, $t \in [a, b]$ için azalmayan bir fonksiyon yani

$$\frac{\partial}{\partial t}[\arg(z'(t)f'(t))] \geq 0 \, , t \in [a, b]$$

ise $\mathbf{\Gamma_w}$ eğrisine ω_0 noktasına göre konveks eğridir, denir.

C$_R$: $|z| = R$ eğrisi $0 \leq t \leq 2\pi$ için z= Re^{it}olmak üzere $z'(t) = iRe^{it} = iz$ ve $z''(t) = -Re^{it} = -z$ ve $\frac{\partial}{\partial t}[\arg(z'(t)f'(t))] \geq 0$, $t \in [a, b]$ eşitsizliğini ele alınırsa;

$$\frac{\partial}{\partial t}[\arg(z'(t)f'(t))] = \frac{\partial}{\partial t} Im[In(z'(t)f'(t))] = \frac{\partial}{\partial t} Im[In\, z'(t) + In\, f'(z)]$$

$$= Im\left[\frac{\partial}{\partial t} In\, z'(t) + \frac{\partial}{\partial t} In\, f'(t)\right] = Im\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(t)}{f'(t)}\, z'(t)\right]$$

$$= Im\left[i + iz\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] = Re\left[1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispat edilmiş olur.

2.6.11. Teorem. $f \in \boldsymbol{S}$ olmak üzere f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$Re\left[1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0$$

olmasıdır.

2.6.12. Teorem(Alexander Teoremi). E_r de $f(z) \neq 0$ olmak üzere $f(z)$ nin E_r de konveks olması için gerek ve yeter şart $F(z) = zf'(z)$ fonksiyonunun E_r de yıldızıl olmasıdır.

İspat. $F(z)$ için;

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

dir. Teorem 2.6.11 den

$f \in \boldsymbol{CV}$ ise $Re\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0$ olduğundan $Re\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\} \geq 0$ olup $F(z) \in \boldsymbol{ST}$ olur.

2.6.13 Örnek. $f(z) = \frac{z}{1-z} = \mathrm{z} + \sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty} \mathrm{z}^{\mathrm{n}}$ fonksiyonu E yi $Rew > -1/2$ yarı düzlemine resmettiği için konveks bir fonksiyondur. Buna karşılık

$$F(z) = zf'(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

biçimde elde edilen fonksiyon Koebe fonksiyonu olduğundan yıldızıl bir fonksiyondur.

2.6.14. Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \boldsymbol{CV}$ ise her bir pozitif n tamsayısı için $|a_n| \leq 1$ dir.

İspat. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \boldsymbol{CV}$ fonksiyonu için

$$zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$$

olup $zf'(z)$ yıldızıldır. Teorem 2.6.6 gereği;

$n|a_n| \leq n$ veya $|a_n| \leq 1$

bulunur. Eşitlik E yi $Rew > -1/2$ yarı düzlemine resmeden $w = z/(1-z)$ fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir.

2.6.15. Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ve $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \leq 1$ ise f fonksiyonu konvekstir.

İspat. $Re\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart $\left|1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} - 1\right| \leq 1$ olmalıdır.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \ \ z^n$$

için

$$\left|1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} - 1\right| = \left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \ \ z^{n-1}}\right|$$

$$\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}}$$

$$< \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|}$$

$$\leq \frac{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|} = 1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.6.16. Teorem. $f: E \to \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $f \in \boldsymbol{CV}$ olması için gerek ve yeter şart $z, \zeta \in E$ için

$$Re\left\{\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z + \zeta}{z - \zeta}\right\} \geq 0$$

dır (Duren 1983).

2.7. α −Mertebeli Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda birim diskte normalizasyona sahip yıldızıl ve konveks fonksiyonların iki alt sınıfı tanımlanacak ve bazı özellikleri incelenecektir.

2.7.1. Tanım. $f: E \to \mathbb{C}$ bir analitik fonksiyon ve $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ için $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \geq \alpha, \qquad z \in E$$

ise f ye α −mertebeli yıldızıl fonksiyon denir**.** Bu özelliğe sahip fonksiyonların sınıfı $\boldsymbol{ST(\alpha)}$ ile gösterilir.

2.7.2. Tanım. $f: E \to \mathbb{C}$ bir analitik fonksiyon ve $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ için $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \alpha, \qquad z \in E$$

ise f ye α −mertebeli konveks fonksiyon denir Bu özelliğe sahip fonksiyonların sınıfı da $\mathbf{CV}(\boldsymbol{\alpha})$ ile gösterilir.

$\boldsymbol{ST}(\boldsymbol{\alpha})$ ile $\mathbf{CV}(\boldsymbol{\alpha})$ sınıfları arasında Alexander teoremine benzer bir ilişki mevcuttur.

2.7.3. Teorem. $f \in \mathbf{CV}(\boldsymbol{\alpha})$ için $g(z) = zf'(z)$ olmak üzere $g \in \boldsymbol{ST}(\boldsymbol{\alpha})$ dır.

2.7.4. Teorem. f fonksiyonu birim diskte konveks bir fonksiyon ise $f \in \boldsymbol{ST}(\mathbf{1/2})$ dir.

İspat. f konveks fonksiyon olsun. Bu durumda Teorem 2.6.16 gereği $z, \zeta \in E$ için

$$Re\left\{\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right\}\geq 0$$

dır.Burada $\zeta = 0$ alınırsa

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geq\frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu sonuç kesindir.

2.7.5. Teorem. $f \in \mathbf{CV}(\boldsymbol{\alpha})$, $\alpha \in [0,1)$ ve $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}}\leq|f'(z)|\leq\frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

dır. Eğer $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ise

$$\frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1}\leq|f(z)|\leq\frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}$$

dir ve $\alpha = \frac{1}{2}$ ise o zaman

$$\log(1+r)\leq|f(z)|\leq-\log(1-r)$$

dir. Tüm bu eşitsizlikler kesin olup eşitlik

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} & ,\alpha\neq 1/2\\ -\log(1-z) & ,\alpha = 1/2\end{cases}$$

fonksiyonu için sağlanır.

İspat. $Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \alpha$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olduğundan

$$g(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\alpha\right\} = 1+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

fonksiyonu $\boldsymbol{P}$ sınıfına aittir. $\boldsymbol{P}$ deki fonksiyonlar için bilinen sonuçlar g fonksiyonuna uygulanırsa istenilen eşitsizlikler elde edilir.

3. KONVOLUSYON İLE TANIMLANAN ANALİTİK FONKSİYON SINIFLARI

Bu bölümde konvolusyon operatörüyle tanımlanan analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları tanıtılacaktır. Sınıflara ait katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri, ekstrem noktaları verilecektir. Tanımlanan sınıfların hangi hallerde yıldızıl ve konveks olduğu incelenecektir.

3.1. Konvolusyon Operatörü

3.1.1. Tanım. $f(z) \in \boldsymbol{S}$ ve $g(z) \in \boldsymbol{S}$ fonksiyonları $E = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik, yalınkat ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

ve

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

biçiminde verilmiş olsun. $f(z)$ ve $g(z)$ için Konvolusyon veya Hadamard Çarpımı

$$f(z) * g(z) = (f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır.

Konvolusyon Operatörünün bazı özellikleri şunlardır.

f ve g fonksiyonları yukarıda verilen şekilde ve

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

olmak üzere

i) $f * g = g * f$

ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$

iii) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

iv) $a \in \mathbb{R}$ için

$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$$

v) $\frac{d}{dz}(f * g) = \frac{df}{dz} * g = f * \frac{dg}{dz}$

dir.

3.2. *S(Φ,Ψ,η,γ)* ve *ST(Φ,Ψ,η,γ)* Sınıfları

3.2.1. Tanım. $f(z) \in \boldsymbol{S}$ fonksiyonu ***S(Φ,Ψ,η,γ)*** sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart her $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq 1$ için

$$Re\left\{\frac{(f * \Phi)(z)}{(1-\eta)(f * \Psi)(z) + \eta(f * \Phi)(z)}\right\} \geq \gamma , z \in E \qquad (3.1)$$

olmasıdır. Burada

$$\Phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z^n$$

ve

$$\Psi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n z^n$$

$\lambda_n \geq \mu_n \geq 0$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar da birim diskte analitiktir.

3.2.2. Tanım. ***ST(Φ,Ψ,η,γ)*** sınıfı,

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n , \qquad a_n \geq 0 \tag{3.2}$$

fonksiyonlarının oluşturduğu ***S***'nin alt sınıfı olan ***T*** için

$$\boldsymbol{ST(\Phi,\Psi,\eta,\gamma) = S(\Phi,\Psi,\eta,\gamma) \cap T} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.3. Teorem. $f \in$ ***S*** fonksiyonu

$$\sum_{n=2}^{\infty}[\lambda_n - (\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n))\gamma]\,|a_n| \leq 1 - \gamma \qquad (3.4)$$

şartını sağlıyor ise $f \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma})$ dır.

İspat. (3.4) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim ve $|z| = 1$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{(f * \Phi)(z)}{(1-\eta)(f * \Psi)(z) + \eta(f * \Phi)(z)} - 1\right| = \left|\frac{z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n a_n z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty}[\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n]a_n z^n} - 1\right|$$
$$\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n |a_n||z|^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty}[\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n]|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}[\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n)]\,|a_n||z|^{n-1}}$$

dir ve z→ 1 olursa

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n |a_n| - \sum_{n=2}^{\infty}[\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n)]|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}[\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n)]\,|a_n|}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade (3.4) gereği 1-γ ile sınırlıdır. Yani

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n |a_n| - \sum_{n=2}^{\infty}[\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n]|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}[\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n)]\,|a_n|} \leq 1 - \gamma$$

dır. Bu

$$\frac{(f * \Phi)(z)}{(1-\eta)(f * \Psi)(z) + \eta(f * \Phi)(z)} - 1$$

fonksiyonunun $w = 1$ merkezli, 1-γ yarıçaplı çember içinde kaldığını gösterir ve ispat tamamlanmış olur.

3.2.4. Teorem. f, (3.2) formunda tanımlanmış olsun. $f \in \boldsymbol{ST}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\lambda_n - (\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n))\gamma]\, a_n \leq 1 - \gamma \qquad (3.5)$$

olmasıdır. Eşitlik

$$f(z) = z - \frac{1-\gamma}{\left[\lambda_n - \left(\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n)\right)\gamma\right]} z^n, \qquad n \geq 2 \qquad (3.6)$$

fonksiyonu için sağlanır.

İspat. Teorem 3.2.3' e göre sadece gereklilik kısmı ispatlanmalıdır. Eğer $f \in \boldsymbol{ST}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma})$ ise

$$Re\left\{\frac{(f*\Phi)(z)}{(1-\eta)(f*\Psi)(z)+\eta(f*\Phi)(z)}\right\} = Re\left\{\frac{z-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n a_n z^n}{z-\sum_{n=2}^{\infty}[\mu_n+\eta(\lambda_n-\mu_n]a_n z^n}\right\} \geq \gamma \,, z \in E$$

dir. Böylece z değerleri reel eksende seçilirse $\frac{(f*\Phi)(z)}{(1-\eta)(f*\Psi)(z)+\eta(f*\Phi)(z)}$ fonksiyonu reel olur ve yukarıdaki eşitsizliğin paydası düzenlenip $z \to 1^-$ alınırsa

$$1-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n a_n|z|^{n-1} \geq \gamma\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}[\mu_n+\eta(\lambda_n-\mu_n)]a_n|z|^{n-1}\right\}$$

bulunur. Bu ise (3.5) eşitsizliğini verir.

3.2.5. Sonuç. (3.2) formundaki $f(z)$ fonksiyonları ***ST(Φ,Ψ,η,γ)*** sınıfındaysa

$$a_n \leq \frac{1-\gamma}{[\lambda_n-(\mu_n+\eta(\lambda_n-\mu_n))\gamma]}, \qquad n \geq 2 \tag{3.7}$$

elde edilir. Eşitlik sadece (3.6) formundaki $f(z)$ fonksiyonları için sağlanır.

3.2.6. Teorem. (3.3) formunda tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu ***ST(Φ,Ψ,η,γ)*** sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$|z| \leq r$ için $\{\lambda_n-(\mu_n+\eta(\lambda_n-\mu_n)\}_{n=2}^{\infty}$ azalmayan bir dizi ise

$$r-\frac{1-\gamma}{\lambda_2-(\mu_2+\eta(\lambda_2-\mu_2))\gamma}r^2 \leq |f(z)| \leq r+\frac{1-\gamma}{\lambda_2-(\mu_2+\eta(\lambda_2-\mu_2))\gamma}r^2 \tag{3.8}$$

ve $z \in E$ için $\left\{\frac{\lambda_n-(\mu_n+\eta(\lambda_n-\mu_n))}{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ azalmayan dizi ise

$$1-\frac{2(1-\gamma)}{\lambda_2-\left(\mu_2+\eta(\lambda_2-\mu_2)\right)\gamma}r \leq |f'(z)| \leq r+\frac{2(1-\gamma)}{\lambda_2-\left(\mu_2+\eta(\lambda_2-\mu_2)\right)\gamma}r \quad (3.9)$$

dir.

İspat. Teorem 3.2.4 e gereği

$$\lambda_2-\left(\mu_2+\eta(\lambda_2-\mu_2)\right)\gamma\sum_{n=2}^{\infty}a_n \leq \sum_{n=2}^{\infty}\left[\lambda_n-\left(\mu_n+\eta(\lambda_n-\mu_n)\right)\right]a_n \leq 1-\gamma \quad (3.10)$$

ve hatta

$$\frac{\lambda_2-\left(\mu_2+\eta(\lambda_2-\mu_2)\right)\gamma}{2}\sum_{n=2}^{\infty}na_n \leq \sum_{n=2}^{\infty}\left[\lambda_n-\left(\mu_n+\eta(\lambda_n-\mu_n)\right)\right]a_n \leq 1-\gamma \quad (3.11)$$

yazılır. (3.3) kullanılarak (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinden

$$|f(z)| \geq |z|-\sum_{n=2}^{\infty}a_n|z|^n \geq r-r^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n \geq r-\frac{1-\gamma}{\lambda_2-\left(\mu_2+\eta(\lambda_2-\mu_2)\right)\gamma}r^2 \quad (3.12)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$|f(z)| \leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty} a_n |z|^n \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq r + \frac{1-\gamma}{\lambda_2 - \big(\mu_2 + \eta(\lambda_2 - \mu_2)\big)\gamma} r^2$$

bulunur. Üstelik;

$$|f'(z)| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n |z|^{n-1} \geq 1 - r \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \geq 1 - \frac{2(1-\gamma)}{\lambda_2 - \big(\mu_2 + \eta(\lambda_2 - \mu_2)\big)\gamma} r$$

ve

$$|f'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n |z|^{n-1} \leq 1 + r \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \leq 1 + \frac{2(1-\gamma)}{\lambda_2 - \big(\mu_2 + \eta(\lambda_2 - \mu_2)\big)\gamma} r$$

elde edilir.

3.2.7.Teorem.

$$f_1(z) = z$$

$$f_n(z) = z - \frac{1-\gamma}{\big[\lambda_n - \big(\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n)\big)\gamma\big]} z^n, \qquad n \geq 2 \tag{3.13}$$

$0 \leq \gamma \leq 1\,, \eta \geq 0$ olsun.

$f(z)$ fonksiyonunun ***ST(Φ,Ψ,η,γ)*** sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart $f(z)$ nin

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n f_n\,(z), \qquad (3.14)$$

formunda yazılabilmesidir. Burada

$\mu_n \geq 0$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n = 1$$

dir.

İspat. $f(z)$ fonksiyonlarının (3.14) formunda yazılabildiğini kabul edelim. Bu takdirde

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \theta_n \frac{1-\gamma}{[\lambda_n - (\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n))\gamma]} z^n$$

dir. Buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[\lambda_n - (\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n))\gamma] a_n}{1-\gamma} \theta_n \frac{1-\gamma}{[\lambda_n - (\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n))\gamma] a_n}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \theta_n = 1 - \theta_1 \leq 1$$

olur ve böylece $f \in \boldsymbol{ST(\Phi, \Psi, \eta, \gamma)}$ dir.

Tersine $f \in \boldsymbol{ST(\Phi, \Psi, \eta, \gamma)}$ olduğunu kabul edelim. (3.14) kullanılarak

$$\theta_n = \frac{[\lambda_n - (\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n))\gamma]a_n}{1-\gamma} \ , n \geq 2$$

ve

$$\theta_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \theta_n$$

alınarak

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n f_n\,(z)$$

yazılır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.2.8. Teorem.

$$f_j(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n \ , a_{n,j} \geq 0 \ , j = 1,2,\dots,m \ , z \in E \tag{3.15}$$

şeklinde tanımlanan $f_j(z)$ fonksiyonları her bir *j=1,2,…,m* için $\boldsymbol{ST(\Phi, \Psi, \eta, \gamma_j)}$ sınıfında olsun. Bu takdirde

$$h(z) = z - \frac{1}{m}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\right)z^n$$

şeklindeki $h(z)$ fonksiyonu $\gamma = \min_{1\le j\le m}\{\gamma_j\}, 0 \le \gamma_j < 1$ için $\boldsymbol{ST(\Phi,\Psi,\eta,\gamma)}$ sınıfındadır.

İspat. (3.15) ile verilen $f_j(z) \in \boldsymbol{ST(\Phi,\Psi,\eta,\gamma)}, (j = 1,2,\dots,m)$ fonksiyonu için $h(z)$ fonksiyonuna Teorem 3.2.4 uygulanılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}[\lambda_n - (\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n))\gamma]\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{n=2}^{\infty}[\lambda_n - (\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n))\gamma]a_{n,j}\right) \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(1-\gamma_j) \\
&\qquad \le 1-\gamma
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.4 gereği $h(z) \in \boldsymbol{ST(\Phi,\Psi,\eta,\gamma)}$ dır ve bu ispatı tamamlar.

3.2.9. Teorem. $\boldsymbol{ST(\Phi,\Psi,\eta,\gamma)}$ sınıfı konvekstir.

İspat. (3.15) de verilen fonksiyonlar $\boldsymbol{ST(\Phi,\Psi,\eta,\gamma)}$ sınıfında iken

$$h(z) = vf_1(z) + (1 - v)f_2(z), 0 \leq v \leq 1\,,$$

şeklinde tanımlanan $h(z)$ fonksiyonlarının $\boldsymbol{ST(\Phi, \Psi, \eta, \gamma)}$ sınıfına ait olduğunu göstermek yeterlidir. O halde Teorem 3.2.4

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \left[va_{n,1} + (1 - v)a_{n,2} \right] z^n$$

fonksiyonuna uygulanırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\lambda_n - (\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n))\gamma] va_{n,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\lambda_n - \left(\mu_n + \eta(\lambda_n - \mu_n)\right)\gamma\right](1 - v)a_{n,2}$$

$$\leq v(1 - \gamma) + (1 - v)(1 - \gamma) \leq 1 - \gamma$$

elde edilir ve böylece $h(z) \in \boldsymbol{ST(\Phi, \Psi, \eta, \gamma)}$ olur. Dolayısıyla $\boldsymbol{ST(\Phi, \Psi, \eta, \gamma)}$ sınıfı konvekstir.

3.3. $\boldsymbol{TS_p(\alpha)}$ ve $\boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ Sınıfları

3.3.1. Tanım.

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (3.16)$$

şeklindeki negatif katsayılı analitik fonksiyonların sınıfı $\boldsymbol{T}$ ile gösterilsin. $\boldsymbol{T}$ nin alt sınıfı olan α-yıldızıl fonksiyonların $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{\alpha})$ sınıfı (Silverman, 1975) tarafından çalışılmıştır.

(3.16) formundaki fonksiyonların

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha\right\} \geq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|, \qquad -1 \leq \alpha \leq 1$$

bağıntısını sağlayanlarının oluşturduğu alt sınıf $\boldsymbol{TS_p}(\boldsymbol{\alpha})$ ile gösterilsin. Aşağıdaki teorem (Subramanian ve ark. 1998) tarafından ispatlanmıştır.

3.3.2. Teorem.

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların $\boldsymbol{TS_p}(\boldsymbol{\alpha})$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} [2n - (\alpha + 1)]\, a_n \leq 1 - \alpha$$

olmasıdır.

$Re\frac{z(D^{\lambda}f(z))'}{D^{\lambda}f(z)} > \alpha\ ,\ z \in E,\ \lambda > -1,\ \alpha < 1$

eşitsizliğini sağlayan $f(z) \in \boldsymbol{T}$ fonksiyonlarının sınıfı $\boldsymbol{T_{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})$ ile gösterilir.

Buradaki $D^{\lambda}f$ Ruscheweyh Türev operatörü (St. Ruscheweyh 1975) f fonksiyonu için

$$D^{\lambda}f(z) = f(z) * \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}$$

şeklinde tanımlanır. $f * g$ analitik fonksiyonların Hadamard Çarpımı olmak üzere $\boldsymbol{T_{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})$ sınıfı

$$\boldsymbol{T_{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha}) = \left\{f \in \boldsymbol{T}: Re\frac{z(f*g)'(z)}{(f*g)(z)} > \alpha, g(z) = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}\right\},$$

biçiminde tanımlanır (Ahuja 1992).

3.3.3. Tanım. $E = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde tanımlanan belirli bir

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \qquad b_n > 0$$

analitik fonksiyonu için

$$Re\left\{\frac{z(f*g)'(z)}{(f*g)(z)} > \alpha\right\} \geq \left|\frac{z(f*g)'(z)}{(f*g)(z)} - 1\right|, \qquad -1 \leq \alpha \leq 1$$

eşitsizliğini sağlayan (3.16) formundaki f fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf $\boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ olarak tanımlanır.

3.3.4. Teorem.

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonların $\boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} [2n - (\alpha + 1)]\, a_n b_n \leq 1 - \alpha$$

olmasıdır.

İspat. $\boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ ve $\boldsymbol{TS_P(\alpha)}$ sınıflarınn tanımları ve Teorem 3.3.2 kullanılarak

$$f \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)} \Leftrightarrow (f * g) \in \boldsymbol{TS_P(\alpha)} \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} [2n - (\alpha + 1)]\, a_n b_n \leq 1 - \alpha$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.3.5. Sonuç. $-1 \leq \alpha < 1$ ve $g(z) = \frac{z}{z-1}$ fonksiyonu için $\boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$=$\boldsymbol{TS_P(\alpha)}$ olur.

3.3.6. Teorem. $f \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ ise $a_n \leq \frac{1-\alpha}{[2n-(\alpha+1)]b_n}$ dır. Eşitlik yalnızca

$f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{[2n-(\alpha+1)]b_n} z^n$

formundaki fonksiyonlar için sağlanır.

İspat. $f \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ ise Teorem 3.3.4 gereği

$$[2n-(\alpha+1)]a_n b_n \leq \sum_{n=2}^{\infty} [2n-(\alpha+1)]\, a_n b_n \leq 1-\alpha$$

olur. Buradan $a_n \leq \frac{1-\alpha}{[2n-(\alpha+1)]b_n}$ elde edilir.

Buradaki eşitlik

$$f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{[2n-(\alpha+1)]b_n} z^n \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$$

fonksiyonu için sağlanır.

3.3.7. Teorem. $f \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ ise

$$r - \frac{1-\alpha}{\min\{[2n-(\alpha+1)]b_n\}} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{min\{[2n-(\alpha+1)]b_n\}} r^2$$

dir.

Burada $|z| = r < 1$ dir ve $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{min\{[2n-(\alpha+1)]b_n\}} z^n$ fonksiyonu için sonuç kesindir.

İspat. $|z| = r < 1$ olsun.

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonu için

$$|f(z)| \leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^n = r + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^2 = r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n \quad (3.17)$$

olur. Dolayısıyla

$\min\{[2n - (\alpha + 1)]b_n\} \leq [2n - (\alpha + 1)]b_n$ olduğundan ve Teorem 3.3.4 ten

$$\min\{[2n - (\alpha + 1)]b_n\} \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=2}^{\infty} [2n - (\alpha + 1)]\, a_n b_n \leq 1 - \alpha$$

elde edilir.

Böylece

$$|f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{min\{[2n-(\alpha+1)]b_n\}} r^2$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$|f(z)| \geq r - \frac{1-\alpha}{min\{[2n-(\alpha+1)]b_n\}} r^2$$

olduğu gösterilebilir.

3.3.8. Tanım.

$$f_1(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \ , a_n \geq 0$$

ve

$$f_2(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \ , b_n > 0$$

olsun. f_1 ve f_2 için Quasi Hadamard Çarpımı

$$(f_1 * f_2) = \ f_1(z) * f_2(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır.

3.3.9. Teorem. $f \in \boldsymbol{TS_p^{k_1}(\alpha)}$, $g \in \boldsymbol{TS_p^{k_2}(\beta)}$ olsun. Bu takdirde $z \in E$ için

$$k_i(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_{in} z^n , \qquad b_{in} > 0 , i = 1,2$$

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} h_n z^n , \qquad h_n > 0$$

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n , \qquad f_n > 0$$

$$g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} g_n z^n , \qquad g_n > 0$$

ise $b_{1n} b_{2n} > (2n-1) h_n$ için

$$(f * g) \in TS_p^h(\gamma), \qquad \gamma = \min_{n \geq 2} G(n)$$

dır. Burada

$$G(n) = \frac{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)] b_{1n} b_{2n} - (2n-1) h_n (1-\alpha)(1-\beta)}{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)] b_{1n} b_{2n} - h_n (1-\alpha)(1-\beta)}$$

dır.

İspat. $f \in \boldsymbol{TS_p^{k_1}}(\boldsymbol{\alpha})$ ise

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2n-(\alpha+1)]}{1-\alpha} f_n b_{1n} \leq 1 \tag{3.18}$$

yazılabilir. Ayrıca $g \in \boldsymbol{TS_p^{k_2}}(\boldsymbol{\beta})$ ise

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2n-(\beta+1)]}{1-\beta} g_n b_{2n} \leq 1 \tag{3.19}$$

olur.

$$f * g = z - \sum_{n=2}^{\infty} f_n g_n z^n \in \boldsymbol{TS_p^{h}}(\boldsymbol{\gamma})$$

olduğunu göstermek için

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2n-(\gamma+1)]}{1-\gamma} f_n g_n h_n \leq 1 \tag{3.20}$$

olduğu gösterilmelidir.

O halde (3.18) ve (3.19) kullanılırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]}{(1-\alpha)(1-\beta)}f_n g_n b_{1n} b_{2n}\right]^{1/2}$$
$$\leq\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-(\alpha+1)}{1-\alpha}f_n b_{1n}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-(\beta+1)}{1-\beta}g_n b_{2n}\right)^{1/2}$$
$$\leq 1 \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.20) ifadesini ispatlamak için

$$\frac{[2n-(\gamma+1)]}{1-\gamma}f_n g_n h_n \leq \left[\frac{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]}{(1-\alpha)(1-\beta)}f_n g_n b_{1n} b_{2n}\right]^{1/2}$$

olduğunu ya da bu ifadeye denk olan

$$\sqrt{f_n g_n} \leq \frac{1-\gamma}{[2n-(\gamma+1)]h_n}\left[\frac{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]}{(1-\alpha)(1-\beta)}b_{1n} b_{2n}\right]^{1/2} \tag{3.22}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

(3.21) den

$$\sqrt{f_n g_n} \leq \sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]b_{1n} b_{2n}}} \tag{3.23}$$

yazılır. (3.22) ve (3.23) e göre

$$\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]b_{1n}b_{2n}}}$$

$$\leq \frac{1-\gamma}{[2n-(\gamma+1)]h_n}\left[\frac{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]}{(1-\alpha)(1-\beta)}b_{1n}b_{2n}\right]^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-(\gamma+1)}{1-\gamma}$$

$$\leq \frac{1}{h_n}\sqrt{\frac{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]}{(1-\alpha)(1-\beta)}b_{1n}b_{2n}}$$

$$\times \sqrt{\frac{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]}{(1-\alpha)(1-\beta)}b_{1n}b_{2n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-(\gamma+1)}{1-\gamma} \leq \frac{1}{h_n}\frac{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]}{(1-\alpha)(1-\beta)}b_{1n}b_{2n}$$

$$\Leftrightarrow 2n-(\gamma+1) \leq B(1-\gamma) \tag{3.24}$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Burada

$$B = \frac{1}{h_n}\frac{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]}{(1-\alpha)(1-\beta)}b_{1n}b_{2n}$$

dir. Bu takdirde

$B \geq 2n-1 > 1$ ve (3.24) ifadesi

$$\gamma \leq \frac{B-(2n-1)}{B-1} \tag{3.25}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{2n-1}{B}}{1 - \dfrac{1}{B}} \tag{3.26}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{(2n-1)h_n(1-\alpha)(1-\beta)}{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]b_{1n}b_{2n}}}{1 - \dfrac{h_n(1-\alpha)(1-\beta)}{[2n-(\alpha+1)][2n-(\beta+1)]b_{1n}b_{2n}}} = G(n) \tag{3.27}$$

ifadesine denktir. Bu ispatı tamamlar.

3.3.10. Teorem.

$$f_1(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \,, f_2(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \quad ve \quad f_3(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + c_n^2) z^n$$

şeklinde olsun.

$f_1(z), f_2(z) \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ ise $f_3(z) \in \boldsymbol{TS_p^{g_1}(\beta)}$ dır. Burada

$$\beta = \min_n \left[\frac{[2n-(\alpha+1)]^2 - 2(2n-1)(1-\alpha)^2}{[2n-(\alpha+1)]^2 - 2(1-\alpha)^2} \right]$$

ve

$$g_1(z) = (g * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 z^n$$

dır.

İspat. $f_1(z) \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-(\alpha+1)}{1-\alpha} a_n b_n \leq 1$$

dir ve böylece

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n-(\alpha+1)}{1-\alpha}\right)^2 a_n^2 b_n^2 \leq 1 \qquad (3.28)$$

olur. Ayrıca $f_2(z) \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-(\alpha+1)}{1-\alpha} c_n b_n \leq 1$$

dir ve böylece

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n-(\alpha+1)}{1-\alpha}\right)^2 c_n^2 b_n^2 \leq 1 \qquad (3.29)$$

olur. (3.28) ve (3.29) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2n-(\alpha+1)}{1-\alpha}\right)^2 (a_n^2+c_n^2)b_n^2 \leq 1$$

elde edilir. Teorem 3.3.4 gereği

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2n-(\beta+1)}{1-\beta}\right)(a_n^2+c_n^2)b_n^2 \leq 1$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\frac{2n-(\beta+1)}{1-\beta} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2n-(\alpha+1)}{1-\alpha}\right)^2$$

ise son eşitsizlik sağlanır. Buradan

$$\beta \leq \frac{[2n-(\alpha+1)]^2-2(2n-1)(1-\alpha)^2}{[2n-(\alpha+1)]^2-2(1-\alpha)^2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.3.11. Teorem. $f_1(z)=z$, $f_n(z)=z-\frac{1-\alpha}{[2n-(\alpha+1)]b_n}z^n$, $n=2,3,\ldots$ olsun. Bu takdirde

$f \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n f_n(z) \tag{3.30}$$

formunda yazılabilmesidir. Burada $\mu_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n = 1$ dir.

$\boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ sınıfının ekstrem noktaları $f_1(z)=z$ ve

$$f_n(z)=z-\frac{1-\alpha}{[2n-(\alpha+1)]b_n}z^n \,, n=2,3,\ldots$$

fonksiyonlarıdır.

İspat. f fonksiyonu (3.30) daki gibi ifade edilsin. Bu demektir ki

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n f_n(z)= \ z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1-\alpha)\mu_n}{[2n-(\alpha+1)]b_n}z^n=z-\sum_{n=2}^{\infty}t_n z^n$$

yazılabilir. Böylece $f\in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-(\alpha+1)}{1-\alpha}t_n b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n=1-\mu_1<1$$

olur.

Diğer taraftan $f \in \boldsymbol{TS_p^g(\alpha)}$ ise Teorem 3.3.4 e göre

$$a_n \leq \frac{1-\alpha}{[2n-(\alpha+1)]b_n}$$

yazılabilir. Buradan

$\mu_n = \frac{[2n-(\alpha+1)]a_n b_n}{1-\alpha}$ ve $\mu_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n$ olarak seçilir. Bu takdirde

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha)\mu_n}{[2n-(\alpha+1)]b_n} z^n$$

$$= z - \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n \, [z - f_n(z)]$$

$$= \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n\right) z + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n \, f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \, f_n(z)$$

elde edilir.

3.4. $\boldsymbol{S_\gamma(f, g; \alpha, \beta)}$ ve $\boldsymbol{TS_\gamma(f, g; \alpha, \beta)}$ Sınıfları

3.4.1. Tanım.

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \qquad a_k \geq 0 \tag{3.31}$$

formundaki f fonksiyonları

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right\}>\beta\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\ ,z\in E,-1\leq\alpha<1,\beta\geq 0 \qquad (3.32)$$

şartını sağlıyor ise f fonksiyonu düzgün β-yıldızıl fonksiyonların $\boldsymbol{S_p(\alpha,\beta)}$ sınıfına aittir denir.

f fonksiyonu, (3.31) formunda olsun.

$$Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\alpha\right\}>\beta\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-1\right|\ ,z\epsilon E,-1\leq\alpha<1,\beta\geq 0 \qquad (3.33)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonu düzgün β-konveks fonksiyonların $\boldsymbol{UCV(\alpha,\beta)}$ sınıfındadır denir.

(3.32) ve (3.33) ifadelerinden

$$f(z)\in\boldsymbol{UCV(\alpha,\beta)}\Leftrightarrow zf'(z)\in\boldsymbol{S_p(\alpha,\beta)} \qquad (3.34)$$

olduğu söylenir.

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$$

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k, \qquad b_k \geq 0$$

şeklindeki f ve g fonksiyonları

$$Re\left\{\frac{z(f*g)'(z) + \gamma z^2 (f*g)''(z)}{(1-\gamma)(f*g)(z) + \gamma z (f*g)'(z)} - \alpha\right\} > \beta \left|\frac{z(f*g)'(z) + \gamma z^2 (f*g)''(z)}{(1-\gamma)(f*g)(z) + \gamma z (f*g)'(z)} - 1\right| \qquad (3.35)$$

$-1 \leq \alpha < 1, 0 \leq \gamma \leq 1$ ve $\beta \geq 0$

şartlarını sağlıyor ise f fonksiyonu $\boldsymbol{S_\gamma(f, g; \alpha, \beta)}$ sınıfına aittir denir.

$$f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \qquad a_k \geq 0 \qquad (3.36)$$

şeklinde tanımlanmış E de analitik ve yalınkat fonksiyonların sınıfının, $\boldsymbol{S}$ nin alt sınıfı olan $\boldsymbol{T}$ olduğu biliniyor.

Ayrıca $\boldsymbol{TS_\gamma(f, g; \alpha, \beta)}$ sınıfı

$$\boldsymbol{TS_\gamma(f, g; \alpha, \beta) = S_\gamma(f, g; \alpha, \beta) \cap T} \qquad (3.37)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu sınıflar (Goodman 1991) ve (Ronning 1992,1993) tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır.

Değişkenlerin özel halleri incelenirse, daha önce çalışılan sınıflar elde edilir:

i. $\boldsymbol{TS_0}\left(f,\frac{z}{1-z};\alpha,1\right)=\boldsymbol{S_pT(\alpha)}$ ve

$\boldsymbol{TS_0}\left(f,\frac{z}{(1-z)^2};\alpha,1\right)=\boldsymbol{TS_1}\left(f,\frac{z}{1-z};\alpha,1\right)=\boldsymbol{UCT(\alpha)},(-1\leq\alpha<1)$ (Bharati 1997)

ii. $\boldsymbol{TS_1}\left(f,\frac{z}{1-z};0,\beta\right)=\boldsymbol{UCT(\beta)},(\beta\geq 0)$ (Subramanian 1995)

iii. $\boldsymbol{TS_0}(f,z+\sum_{k=2}^{\infty}k^n z^k;\alpha,\beta)=\boldsymbol{TS(n,\alpha,\beta)},(-1\leq\alpha<1,\beta\geq 0,n\in N_0=N\cup\{0\},N=\{1,2,\dots\})$ (Rosy ve Murugusundaramoorthy 2004)

iv. $\boldsymbol{TS_0}(f,z+\sum_{k=2}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n z^k;\alpha,\beta)=\boldsymbol{TS_\lambda}(n,\alpha,\beta),(-1\leq\alpha<1,\ \beta\geq 0,\lambda\geq 0,n\in N_0)$ (Aouf ve Mostafa 2008)

3.4.2. Teorem. (3.31) formundaki f fonksiyonları

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]|a_k|b_k\leq 1-\alpha \tag{3.38}$$

$-1\leq\alpha<1,\beta\geq 0,0\leq\gamma\leq 1$ şartlarını sağlıyor ise $\boldsymbol{TS_\gamma(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfına aittir.

İspat. (3.31) formundaki f fonksiyonunun $\boldsymbol{TS_\gamma(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfına ait olduğunu göstermek için

$$\beta\left|\frac{z(f*g)'(z)+\gamma z^2(f*g)''(z)}{(1-\gamma)(f*g)(z)+\gamma z(f*g)'(z)}-1\right| \\ -Re\left\{\frac{z(f*g)'(z)+\gamma z^2(f*g)''(z)}{(1-\gamma)(f*g)(z)+\gamma z(f*g)'(z)}-1\right\}\leq 1-\alpha$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}\beta&\left|\frac{z(f*g)'(z)+\gamma z^2(f*g)''(z)}{(1-\gamma)(f*g)(z)+\gamma z(f*g)'(z)}-1\right| \\ &-Re\left\{\frac{z(f*g)'(z)+\gamma z^2(f*g)''(z)}{(1-\gamma)(f*g)(z)+\gamma z(f*g)'(z)}-1\right\} \\ &\leq(1+\beta)\left|\frac{z(f*g)'(z)+\gamma z^2(f*g)''(z)}{(1-\gamma)(f*g)(z)+\gamma z(f*g)'(z)}-1\right| \\ &\leq\frac{(1+\beta)\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)[1+\gamma(k-1)]|a_k|b_k}{1-\sum_{k=2}^{\infty}[1+\gamma(k-1)]|a_k|b_k}\end{aligned}$$

dir.

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]|a_k|b_k\leq 1-\alpha$$

ise yukarıdaki son ifade $(1-\alpha)$ ile sınırlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

3.4.3. Teorem. (3.36) formunda tanımlanmış f fonksiyonlarının $\boldsymbol{TS_{\gamma}(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]a_k b_k \leq 1-\alpha \tag{3.39}$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 3.4.2 ye göre sadece gerek şart ispatlanmalıdır. Eğer $f \in \boldsymbol{TS_{\gamma}(f,g;\alpha,\beta)}$ ve $z \in \mathbb{R}$ ise

$$\frac{1-\sum_{k=2}^{\infty} k[1+\gamma(k-1)]a_k b_k z^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}[1+\gamma(k-1)]a_k b_k z^{k-1}}-\alpha \geq \beta\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)[1+\gamma(k-1)]a_k b_k z^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}[1+\gamma(k-1)]a_k b_k z^{k-1}}\right|$$

dir. Reel eksen boyunca $z \to 1^{-}$ alınırsa istenilen

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]a_k b_k \leq 1-\alpha$$

eşitsizliği elde edilir.

3.4.4. Sonuç. (3.36) formunda tanımlanan f fonksiyonu $\boldsymbol{TS_{\gamma}(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$a_k \leq \frac{1-\alpha}{[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]b_k}, \qquad k \geq 2 \tag{3.40}$$

dir.

Bu sonuç

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]b_k} z^k, \qquad k \geq 2 \tag{3.41}$$

şeklindeki fonksiyon için kesindir.

3.4.5. Teorem. (3.36) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $\boldsymbol{TS_\gamma(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfında olsun. Bu takdirde $|z| = r < 1$ için

$$|f(z)| \geq r - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2} r^2 \tag{3.42}$$

ve

$$|f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2} r^2 \tag{3.43}$$

$b_k \geq b_2$ $(k \geq 2)$ iken sağlanır.

(3.42) ve (3.43) daki eşitlikler $z = r, z = re^{i(2k+1)\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$ noktalarında

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2} z^2 \tag{3.44}$$

fonksiyonu için elde edilir.

İspat. $k \geq 2$ için

$$(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2 \leq [k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]b_k$$

olduğundan Teorem 3.4.3 kullanılarak

$$(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} [k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]a_k b_k \leq 1-\alpha \tag{3.45}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \frac{1-\alpha}{(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2} \tag{3.46}$$

bulunur.

(3.36) ve (3.46) dan

$$|f(z)| \geq r - r^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k \geq r - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2} r^2 \tag{3.47}$$

ve

$$|f(z)| \leq r + r^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq r + \frac{1-\alpha}{(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2} r^2 \tag{3.48}$$

elde edilir.

3.4.6. Teorem. (3.36) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $\boldsymbol{TS_\gamma(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfında olsun. Bu takdirde $|z| = r < 1$ için

$$|f'(z)| \geq 1 - \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2} r \tag{3.49}$$

ve

$$|f'(z)| \leq 1 + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2} r \tag{3.50}$$

$b_k \geq b_2$ $(k \geq 2)$ iken sağlanır. (3.44) de verilen $f(z)$ fonksiyonu için sonuç kesindir.

İspat. Teorem 3.4.3 ve (3.46) dan

$$\sum_{k=2}^{\infty} k a_k \leq \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha+\beta)(1+\gamma)b_2} \tag{3.51}$$

olduğu biliniyor. İspatın kalan kısmı Teorem 3.4.5'in ispatı ile benzer olduğu için ayrıntıları burada verilmeyecektir.

3.4.7. Teorem. $\mu_v \geq 0, v = 1,2,\dots,l$ ve $\sum_{v=1}^{l} \mu_v \leq 1$ olsun.

$$F_v(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,v} z^k \ \left(a_{k,v} \geq 0; v = 1,2,\dots,l\right) \tag{3.52}$$

şeklinde tanımlanmış $F_v(z)$ fonksiyonu her $v = 1,2,\dots,l$ için $\boldsymbol{TS_\gamma(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfına ait ise

$$f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{v=1}^{l}\mu_v a_{k,v}\right)z^k$$

biçimindeki $f(z)$ fonksiyonu $\boldsymbol{TS_{\gamma}(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfına aittir.

İspat. $F_v(z) \in \boldsymbol{TS_{\gamma}(f,g;\alpha,\beta)}$ olsun. Teorem 3.4.3'ten her $v = 1,2,\ldots,l$ için

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]a_{k,v}b_k \leq 1-\alpha \tag{3.53}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]\left(\sum_{v=1}^{l}\mu_v a_{k,v}\right)b_k \\ = \sum_{v=1}^{l}\mu_v\left(\sum_{k=2}^{\infty}[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]a_{k,v}b_k\right) \\ \leq (1-\alpha)\sum_{v=1}^{l}\mu_v \leq 1-\alpha\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.4.3 'e göre $f(z)$ fonksiyonu $\boldsymbol{TS_{\gamma}(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfına aittir.

3.4.7. Sonuç. Konveks lineer kombinasyonu altında $\boldsymbol{TS_{\gamma}(f,g;\alpha,\beta)}$ sınıfı kapalıdır.

3.4.8. Teorem.

$$f_1(z) = z$$

ve

$$f_k(z) = z - \frac{1-\alpha}{[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]b_k} z^k \ (k \geq 2) \tag{3.54}$$

$-1 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1$ ve $\beta \geq 0$ olsun.

$f(z)$ fonksiyonları

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z) \quad , \mu_k \geq 0 \ \ ve \ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = 1 \tag{3.55}$$

şeklinde yazılabiliyorsa $f(z) \in \boldsymbol{TS_\gamma(f,g;\alpha,\beta)}$ olur. Tersine $f(z) \in \boldsymbol{TS_\gamma(f,g;\alpha,\beta)}$ ise $f(z)$ fonksiyonu (3.55) şeklinde yazılır.

İspat. Kabul edelim ki

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]b_k} \mu_k z^k \tag{3.56}$$

şeklinde olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]b_k}{1-\alpha} \\
&\qquad \times \frac{1-\alpha}{[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]b_k} \mu_k \\
&\qquad = \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k = 1 - \mu_1 \leq 1
\end{aligned} \tag{3.57}$$

olur. Yani Teorem 3.4.3'e göre $f(z) \in \boldsymbol{TS_\gamma(f, g; \alpha, \beta)}$ dır.

Tersine kabul edelim ki (3.36) formundaki $f(z)$ fonksiyonları $\boldsymbol{TS_\gamma(f, g; \alpha, \beta)}$ sınıfında olsun. Buradan

$$a_k \leq \frac{1-\alpha}{[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]b_k} \quad (k \geq 2) \tag{3.58}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\mu_k = \frac{[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]a_k b_k}{1-\alpha} \quad (k \geq 2) \tag{3.59}$$

ve

$$\mu_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k \tag{3.60}$$

olur ve (3.55) formundaki $f(z)$ fonksiyonu elde edilir.

3.4.9. Sonuç. $\boldsymbol{TS_\gamma(f, g; \alpha, \beta)}$ sınıfının ekstrem noktaları

$$f_1(z) = z$$

ve

$$f_k(z) = z - \frac{1-\alpha}{[k(1+\beta)-(\alpha+\beta)][1+\gamma(k-1)]b_k} z^k \quad (k \geq 2)$$

fonksiyonlarıdır.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. 1996. Complex Analysis. Mc Graw-Hill Book Company, Tokyo, 317 pp.

Ahuja, O. P. 1992. Hadamard products of analytic functions defined by Ruscheweyh derivatives. *Current Topics in Analytic Function Theory Word Scientific.* Singapore, 13-29.

Aouf, M. K., Mostafa, A. O. 2008. Some properties of a subclass of uniformly convex functions with negative coefficients. *Demonstratio Math.* 41(2):353-370.

Aouf, M. K., El-Ashwah R. M., El-Deeb, S. M. 2010. Certain subclasses of uniformly starlike and convex functions defined by convolution. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis.* 26:55-70.

Başkan, T. 1996. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi basımevi, No:17, Bursa, 359 s.

Bharati, R., Parvatham, R., Swaminathan, A. 1997. On subclasses of uniformly convex functions and corresponding class of starlike functions. *Tamkang J. Math.* 28(1):17-32.

Bieberbach, L. 1916. Über die koeffizienten derjengien potenzreihen. *Welcheeine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteh, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.* 940-955.

Duren, P. N. 1983. Univalent Functions. Springer-Verlag, New York, 384 pp.

Goluzin, G. M. 1936. On distortion theorems in the theory of conformal mappings. *Mat. Sb.* 43:127-135.

Goodman, A. W. 1983. Univalent Functions I. Mariner Publishing Company, Inc, 246 pp.

Goodman, A. W. 1983. Univalent Functions II. Mariner Publishing Company, Inc, 311 pp.

Goodman, A. W. 1991. On uniformly convex functions. *Ann. Polon. Math.* 56(1):87-92.

Goodman, A. W. 1991. On uniformly starlike functions. *J. Math. Anal. Appl.* 155(2):364-370.

Hayman, W. K. 1994. Multivalent Functions. Cambridge University Press, pp: 230-248.

Murugusundaramoorthy, G., Frasin, B. A. 2011. Family of Analytic Functions Defined by Convolution. *Romai J.* 125-139.

Nehari, Z. 1952. Conformal Mapping. Mc Graw-Hill, New York, 396 pp.

Palka, B. P. 1991. An İntroduction to Complex Function Theory. Springer- Verlag, New York, 560 pp.

Pommerenke, C. 1975. Univalent Functions. Vandenhoesk-Ruprecht, Göttingen,376 pp.

Ronning, F. 1991. On starlike functions associated with parabolicregions. *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A.* 45:117-122.

Ronning, F. 1993. Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 118(1):189-196.

Rosy, T., Murugusundaramoorthy, G. 2004. Fractional calculus and their applications to certain subclass of uniformly convex functions. *Far East J. Math. Sci. (FJMS).* 15(2):231-242.

Ruscheweyh, St. 1975. New criteria for univalent functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 109-115.

Schober, G. 1975. Univalent Functions-Selected Topics.Springer-Verlag,Berlin, 200 pp.

Silverman, H. 1975. Univalent function with negative coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*109-116.

Silverman, H., Ponnusamys, S. 2006. Complex Variables with Applications. Birkhauser, USA, 520 pp.

Subramanian, K. G., Murugusundaramoorthy, G., Balasubrahmanyam, P., Silverman, H. 1995. Subclasses of uniformly convex and uniformly starlike functions. *Math. Japon.* 42(3):517-522.

Subramanian, K. G., Murugusundaramoorthy, G., Balasubrahmanyam, P., Silverman, H. 1995. Classes of uniformly starlike functions. *Publ. Math.* Debrecen, 309-315.

Subramanian, K. G., Sudharsan, T. V., Thirumalaisamy, R., Silverman, H. 2010. A Class of Analytic Functions Based on Convolution . *ISSN* 285-295.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Figen EBREN CİHAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 24.03.1987
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yılı)

Lise	: Bursa Ali Osman Sönmez Fen Lisesi 2001-2004
Lisans	: Uludağ Üniversitesi 2008-2012

Çalıştığı Kurum ve Yılı	: Nirvana Eğitim Danışmanlığı 2015-…
İletişim (e-posta)	: figenebren@gmail.com