

**ELASTİK ORTAMDAKİ VE NANO ÖLÇEKTEKİ  
ÇUBUKLARIN RAYLEIGH VE YEREL OLMAYAN  
ELASTİSİTE TEORİSİNE GÖRE SERBEST EKSENEL  
TİTREŞİM ANALİZİ**

**Togay KÜPELİ**



T.C.  
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ELASTİK ORTAMDAKİ VE NANO ÖLÇEKTEKİ ÇUBUKLARIN RAYLEIGH VE  
YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİNE GÖRE SERBEST EKSENEL  
TİTREŞİM ANALİZİ**

**Togay KÜPELİ**  
0000-0002-5921-8667

Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI  
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2020  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ ONAYI

Togay KÜPELİ tarafından hazırlanan “ELASTİK ORTAMDAKİ VE NANO ÖLÇEKTEKİ ÇUBUKLARIN RAYLEIGH VE YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİNE GÖRE SERBEST EKSENEL TİTREŞİM ANALİZİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** :Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI

**Başkan:** Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI  
0000-0003-2231-170X  
Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza  


**Üye** : Prof. Dr. Babür DELİKTAŞ  
0000-0002-4035-4642  
Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza  

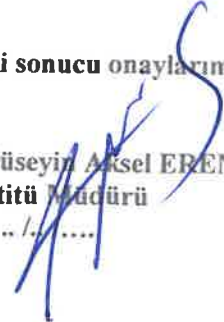

**Üye** : Prof. Dr. Süheyla Yerel KANDEMİR  
0000-0003-4056-5383  
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi,  
Mühendislik Fakültesi,  
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza  


Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN  
Enstitü Müdürü

.. / .. / ..



**U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

06.07.2020  
.....

**Togay KÜPELİ**



## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### ELASTİK ORTAMDAKİ VE NANO ÖLÇEKTEKİ ÇUBUKLARIN RAYLEIGH VE YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİNE GÖRE SERBEST EKSENEL TİTREŞİM ANALİZİ

**Togay KÜPELİ**

Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

**Danışman:** Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI

Bu tez çalışmasında, farklı mesnetlenme koşulları altında elastik ortam içindeki Rayleigh nanoçubuğunun aksenal titreşim analizi incelenmiştir. Bilindiği gibi rijit sınır koşulları sadece özel durumlar için geçerlidir. Bu çalışma kapsamında son yıllarda gelişme gösteren ve gelişmeyi sürdüren nanoteknoloji alanında, pratik uygulaması da yapılabilen sınır koşullarıyla ilgili bir analitik yöntem incelemesi gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada, Eringen tarafından önerilen, yerel olmayan elastisite teorisine göre aksenal lineer yüklenmiş kirişin aksenal statik analizi ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile bir mikrokirişin eğilme analizi yapılmıştır. Bu analizler sırasında ağırlıklı artık yöntemlerinden yararlanılmıştır.

Bu incelemeler sağlanırken; analiz sonuçlarına etki edebileceği düşünülen parametrelerde, sınır koşullarında ve yükleme durumlarında birbirinden farklı değerler alınıp, oluşan analiz sonuçlarının farklılıkları ve yapılan değişikliklerin oluşturduğu etkiler gözlemlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Rayleigh nanoçubuğu, yerel olmayan elastisite, aksenal titreşim, aksenal statik analiz, değiştirilmiş gerilme çifti teorisi, eğilme analizi

**2020, ix + 81 sayfa.**

## ABSTRACT

MSc Thesis

FREE AXIAL VIBRATION ANALYSIS OF NANOSCALED RODS EMBEDDED IN AN ELASTIC MEDIUM VIA RAYLEIGH AND NONLOCAL ELASTICITY THEORY

**Togay KÜPELİ**

Bursa Uludağ University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Civil Engineering

**Supervisor:** Assoc. Prof. Mustafa Özgür YAYLI

This thesis, examined the axial vibration analysis of the Rayleigh nanorods in an elastic medium under different support conditions. As known, rigid boundary conditions are valid only for special cases. Within the scope of this study; in the field of nanotechnology, which has developed and continues to develop in recent years, an analytical method analysis of boundary conditions, which can also be practiced, has been carried out. This thesis study performed an axial static analysis of the axially linear loaded beam and a bending analysis of a microbeam, as recommended by Eringen, in accordance with the theory of the nonlocal elasticity. The weighted residual methods were utilized during these analyzes.

In providing these reviews, the effects generated by the differences and changes of the analysis results are observed, by receiving different values in parameters, boundary conditions and loading states, which are considered to have an impact on the analysis results.

**Keywords:** Rayleigh nanorod, nonlocal elasticity theory, axial vibration, axial static analysis, modified couple stress theory , bending analysis

**2020, ix + 81 pages.**

## TEŞEKKÜR

Tez alıőmamın her aőamasında tecrübelerini, bilgilerini ve değerli zamanını esirgemeyerek bana her fırsatta yardımcı olan , her zaman destekleyen , çalıőmaktan sonsuz gurur duyduğum değerli hocam Doç. Dr. M. Özgür YAYLI'ya , çalıőmalarımızı birlikte sürdürdüğümüz, çalışma boyunca beni destekleyen değerli arkadaşım Yakup Harun ÇAVUŐ'a , hayatım boyunca desteklerini hissettiğim, hayatımın her alanında yardımlarını bir an olsun bırakmayan, varlıklarıyla hayatımı güzelleőtiren çok sevdiğim sevgili aileme teőekkürlerimi sunarım.

Togay KÜPELİ

06/07/2020



# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Nanoteknoloji.....	1
1.1.1 Nanoteknolojinin Amaçları.....	1
1.1.2 Nanoteknolojinin Yapı Sektöründeki Yeri.....	1
1.2 Mikro Kirişler.....	2
1.3 Nanokirişler.....	2
1.4 Karbon Nanotüpler.....	3
1.5 Karbon Nanotüplerin Mekanik Özellikleri.....	4
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	5
2.1 Kuramsal Temeller.....	5
2.1.1 Gerilme çifti teorisi.....	5
2.1.2 Gradyan elastisite teorisi.....	6
2.1.3 Yerel olmayan elastisite teorisi.....	6
2.2 Kaynak Araştırması.....	9
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	12
3.1 Mikrokirişin Eksenel Statik Analizi.....	12
3.2. Ağırlıklı Artıklar Yöntemleri.....	13
3.2.1 En küçük kareler yöntemi.....	13
3.2.2 Galerkin yöntemi.....	15
3.2.3 Alt alan yöntemi.....	16
3.2.4 İki parametre çözümü.....	17
3.3 Elastik Ortamda Rayleigh Modelindeki Nanoçubuğun Serbest Titreşim Analizi.....	19
3.3.1 Mekanik model.....	19
3.3.2 Serbest titreşim.....	23
3.3.3 Harmonik Titreşim Analizi.....	25
3.4. Bir Mikrokirişin Eğilme Analizi.....	32
3.4.1. Mikrokirişin Eğilme Analizinin Alt Alan yöntemiyle çözümü.....	37
3.4.2. En küçük kareler yöntemiyle çözüm.....	39
3.4.3. Galerkin yöntemiyle çözüm.....	41
3.4.4. İki parametre çözümü.....	43
4. BULGULAR.....	45
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	71
KAYNAKLAR.....	74
ÖZGEÇMİŞ.....	81



## SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
I	Atalet momenti
$\theta_L$	Dönmeyi sınırlayan yay sabiti
$\theta_0$	Dönmeyi sınırlayan yay sabiti
$\omega$	Doğal frekans, Açısal frekans
$a_1, a_2, a_3$	Bilinmeyen katsayılar
$c_1, c_2, c_3$	Bilinmeyen katsayılar
EI	Eğilme rijitliği
E	Elastisite modülü
$\lambda$	Frekans parametresi
$\sigma$	Gerilme
K	Elastik ortam parametresi
A	Mikrokirişin enine kesit alanı
L	Mikrokirişin uzunluğu
$l_2$	Dönme değişimi malzeme parametresi
$\rho$	Yoğunluk
U	Yer değiştirme fonksiyonu
$\nu$	Poisson oranı
W	Eğilme fonksiyonu
x,y,z	Koordinat sistemi takımları
M	Moment
$\mu$	Lame sabiti
q	Yayı yük
R	Artık fonksiyonu
r	Mikrokirişin yarıçapı
$S_L$	Ötelemeyi sınırlayan yay sabiti
$S_0$	Ötelemeyi sınırlayan yay sabiti
G	Kayma modülü
N	Normal kuvvet

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. Çok duvarlı karbon nanotüp .....	3
Şekil 1.1. Karbon nanotüp örneği .....	3
Şekil 3.1. Eksenel lineer yük etkisindeki mikrokiriş .....	12
Şekil 3.2. İki ucu yayla sabitlenmiş elastik ortamdaki nanoçubuk .....	19
Şekil 3.3. Düzgün yayılı yüklenmiş konsol bir mikrokiriş .....	32
Şekil 4.1. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=1$ ).....	46
Şekil 4.2. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=2$ ).....	47
Şekil 4.3. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=3$ ).....	48
Şekil 4.4. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=4$ ).....	49
Şekil 4.5. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=5$ ).....	50
Şekil 4.6. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=6$ ).....	51
Şekil 4.7. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=7$ ).....	52
Şekil 4.8. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=8$ ).....	53
Şekil 4.9. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=9$ ).....	54
Şekil 4.10. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=10$ ).....	55
Şekil 4.11. Yerel olmayan parametrenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=1$ ve $S_L=1$ ).....	56
Şekil 4.12. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=1$ ).....	57
Şekil 4.13. Yerel olmayan parametrenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=5$ ve $S_L=5$ ).....	58
Şekil 4.14. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=5$ ).....	59
Şekil 4.15. Yerel olmayan parametrenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=8$ ve $S_L=8$ ).....	60
Şekil 4.16. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=8$ ).....	61
Şekil 4.17. Yerel olmayan parametrenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=10$ ve $S_L=10$ ).....	62
Şekil 4.18. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=10$ ).....	63
Şekil 4.19. Mikrokirişin uzunluk değişiminin titreşim frekansına etkisi .....	64
Şekil 4.20. Yerel olmayan parametrenin ve mesnet koşullarının değişiminin titreşim frekansına etkisi .....	65
Şekil 4.21. Elastik ortam parametre değişiminin titreşim frekansına etkisi.....	66
Şekil 4.22. Elastik ortam parametre değişiminin yerel olmayan elastisite teorisi kullanıldığında titreşim frekansına etkisi .....	67
Şekil 4.23. Üç parametrelili çözümün ağırlıklı artık fonksiyon çözüm yöntemleri ile karşılaştırılması .....	68
Şekil 4.24. İki parametrelili çözümün ağırlıklı artık fonksiyon çözüm yöntemleri ile karşılaştırılması .....	69
Şekil 4.25. Her iki ucu sabit olarak mesnetlenmiş nanokirişin titreşim grafiği .....	70

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. Çalışmada kullanmış olan karbon nanotüpün mekanik özellikleri.....	45
Çizelge 4.2. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=1$ ) .....	46
Çizelge 4.3. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=2$ ) .....	47
Çizelge 4.4. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=3$ ) .....	48
Çizelge 4.5. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=4$ ) .....	49
Çizelge 4.6. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=5$ ) .....	50
Çizelge 4.7. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=6$ ) .....	51
Çizelge 4.8. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=7$ ) .....	52
Çizelge 4.9. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=8$ ) .....	53
Çizelge 4.10. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=9$ ) .....	54
Çizelge 4.11. Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=10$ ) .....	55
Çizelge 4.12. Yerel olmayan parametre değişiminin titreşim frekansına olan etkisi ( $S_0=1$ ve $S_L=1$ ) .....	56
Çizelge 4.13. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=S_L=1$ ).....	57
Çizelge 4.14. Yerel olmayan parametre değişiminin titreşim frekansına olan etkisi ( $S_0=5$ ve $S_L=5$ ) .....	58
Çizelge 4.15. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=S_L=5$ ).....	59
Çizelge 4.16. Yerel olmayan parametre değişiminin titreşim frekansına olan etkisi ( $S_0=8$ ve $S_L=8$ ) .....	60
Çizelge 4.17. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=S_L=8$ ).....	61
Çizelge 4.18. Yerel olmayan parametre değişiminin titreşim frekansına olan etkisi ( $S_0=10$ ve $S_L=10$ ) .....	62
Çizelge 4.19. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=S_L=10$ ).....	63
Çizelge 4.20. Mikrokiriş uzunluk değişiminin titreşim frekansına olan etkisi..... .....	64

Çizelge 4.21. Yerel olmayan parametrenin ve mesnet koşullarının değişiminin titreşim frekansına etkisi.....	65
Çizelge 4.22. Elastik ortam parametresinin değişiminin titreşim frekansına olan etkisi .....	66
Çizelge 4.23 Elastik ortam parametresinin değişiminin titreşim frekansına olan etkisi .....	67
Çizelge 4.24. Çalışmada kullanmış olduğumuz üç parametrelili çözümün ağırlıklı artık yöntemleri ile hesaplanmış değerlerin karşılaştırılması.....	68
Çizelge 4.25. İki parametrelili çözümün ağırlıklı artık yöntemleri ile hesaplanmış değerlerinin karşılaştırılması .....	69

# 1.GİRİŞ

## 1.1 Nanoteknoloji

Nanoteknoloji, materyalleri ve cihazları maddeyi atomik seviyede kontrol ederek malzemelerin yeniden yapılandırılmasıdır. Tasarım dahil olmak üzere pek çok inşaat mühendisliği dalı ve inşaat süreçleri nanoteknolojiden faydalanıyor. Örnek vermek gerekirse, benzersiz özellikleri olan yeni yapı malzemeleri, daha hafif ve daha güçlü kompozitler, az bakım gerektiren kaplamalar, kendi kendini dezenfekte eden yüzeyler, nano boy sensörler örnek verilebilir. Bilim adamları ve mühendisler nanoteknoloji ve mikroteknolojideki gelişmelerle beraber her tür mikro/nanoyapıyı, atomik kuvvet mikroskobu, konsol uçları, nanoteller ve nanokapütatörler örnek olarak verilebilir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve Timoshenko kiriş teorisi bu küçük kiriş yapılarında uygulandıklarında, yetersiz oldukları görüldü. Ölçeksiz olması, bu klasik kiriş teorilerinin küçük ölçek etkilerini mekanik özelliklerde tam olarak sağlayamadı. Örnek olarak, Wang ve Hu (2005) bu konuyla ilgili yaptıkları çalışmada, klasik kiriş teorilerinin karbon nanotüpdeki dalga yayılımlarının faz hızları azalıklarını tahmin etmekte yetersiz olduklarını ve dalga sayısı fazla olduğunda mikro yapının eğilme dalgası yayılımında önemli bir etkisi olduğunu göstermişlerdir.

### 1.1.1 Nanoteknolojinin Amaçları

Nanometre ölçekli yapıların analizinin yapılmasında ve nanometre boyutunda yapıların fiziksel özelliklerinin anlaşılmasını nanoteknolojinin amaçları arasındadır. Nano ölçekli cihazların geliştirilmesi ve alışıldan farklı üstün malzeme özelliklerinin geliştirilmesini bu amaçlar arasında gösterebiliriz.

### 1.1.2 Nanoteknolojinin Yapı Sektöründeki Yeri

Çok yüksek performanslı beton (UHPC) nanoteknolojinin yapı sektöründeki önemli çalışmalarından biri olarak örnek gösterilebilir. Ham madde kullanımını azaltıp daha hafif

yapılar üretilmesi ve bununla beraber yapıların dayanıklılıklarının daha yüksek yüzdelere çıkabilmesi nanoteknolojinin yapı ve inşaat konusundaki önemli çalışma konularındandır.

## **1.2 Mikro Kirişler**

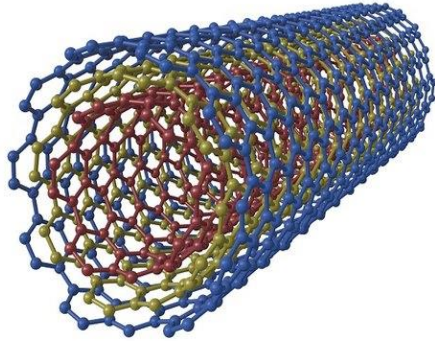
Elektro statik olarak görev yapan ve bu doğrultuda çalıştırılan mikro-kirişler çoğunlukla Mikro elektro-mekanik sistemler (MEMS) olarak kullanılır. Mikro sistemlerin dinamik analizi, elektro statik sistemin içine giren kuvvetlerin dışarıya dönük tepkisiyle ortaya çıkar. Dinamik mikro sistemlerin davranış biçimleri şimdiye kadar birkaç araştırmacı tarafından araştırılmıştır. Düzensiz döngüsel elektrostatik mikro kiriş dinamikleri Tow-fighian tarafından çalışılmıştır. Çatallanma diyagramlarını ac voltaj ve genliklerini geniş kapsamlı olarak sundular. Xu ve Sun (2010), elektro-mekanik olan mikro plak sisteminin doğrusal olmayan serbest titreşimlerin incelenmesi ve sistemin doğrusal olmayan zorlamalı tepkisini araştırmışlardır. Mikro ve nano elektro mekanik rezonans sensörlerinin büyük genlikli doğrusal olmayan titreşimleri Kacem tarafından çalışılmıştır.

## **1.3 Nanokirişler**

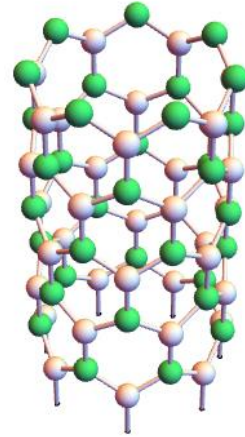
Esneklik destekli piezoelektrik nanokirişler konusunda çok çeşitli uygulamalar ve araştırmalar vardır. Özellikle otomobil, uçaklar, elektronik, biyomedikal sektörler ve çeşitli mühendislik yapılarında kullanılmaktadır. Nano yapıların eğilme, titreşim ve burkulma analizi (nano teller, nanoplakalar, nanohalkalar ve nanokirişler) çeşitli mühendislik uygulamalarında hayati rol oynamaktadır. Piezoelektrik nano yapılar araştırma toplulukları tarafından büyük dikkat çekmektedir. Piezoelektrik nanokirişlerin doğrusal ve doğrusal olmayan titreşimleri Timoshenko kiriş teoremi üzerine diferansiyel kuadratür yöntemi kullanılarak Ebrahimi tarafından araştırılmıştır. Kompozit lamine Timoshenko kirişi'nin (CLTB) mikro ölçekli serbest titreşim analizi yeni modlanmış çift gerilme teorisi Chen tarafından geliştirildi. Biosensör baz alınarak karbon nanotüp'ün titreşimi ve aynı şekilde biosensör baz alınarak karbon nanotüp Timoshenko kirişi gibi Shen tarafından modellenmiştir.

#### 1.4 Karbon Nanotüpler

Karbon nanotüpler grafenden oluşturulmuş çok küçük yapılardır. İsimlerini çaplarından alırlar çünkü çapları yaklaşık olarak bir nanometre kalınlığındadır (Şekil 1.1). Karbon nanotüpler küçük boyutlarına rağmen oldukça dayanıklıdırlar. Nanoteknoloji kullanılarak imal edilen malzemelerin büyük bir çoğunluğunda karbon nanotüpler kullanılmıştır (Şekil 1.2). Karbon nanotüplerin diğer malzemelere göre avantajları sağlamlıkları, ısı ve elektrik iletkenlikleridir. Çoğu zaman kimyasal madde kullanımları endüstri alanlarına yardımcı olmaktadır. Karbon nanotüp kullanımı malzemenin dayanıklılığı ve sağlamlığından dolayı yapı elemanlarının çatlamalarına önlem olarak ve dayanıklılığını arttırmak amacıyla kullanılmaktadır. Bağlayıcılık özelliği bakımından önemli bir yere sahiptir.



Şekil 1.1 Çok duvarlı karbon nanotüp



Şekil 1.2 Karbon nanotüp örneği

## **1.5 Karbon Nanotüplerin Mekanik Özellikleri**

Küçük çaplı karbon nanotüpler önemli özelliklere sahiplerdir. Bunların başlıcaları yüksek esneklik, yüksek dayanıklılık ve yüksek sertlik özelliklerin sahip olmalarıdır. Bu özellikler performans olarak daha yüksek kompozitler için olanak sağlamaktadır. Bu özelliklerle beraber hafif olması, yüksek elastik modülüne sahip olmasında karbon nanotüplerin kullanımları sırasında büyük avantaj sağlamaktadır. Karbon nanotüpler aynı zamanda güçlü çekme dayanımına sahiplerdir. Bireysel MWCNT'ler için 1 TPa'ya yaklaşan bir elastik modül ve 100 GPa'lık bir gerilme kuvvetine ulaşabilirler. Karbon nanotüpler sıkıştırma altında güçlü değillerdir bu durumun sebebi ise iinin boş olması ve yüksek boy oranına sahip olmalarındandır.



## 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1 Kuramsal Temeller

#### 2.1.1 Gerilme çifti teorisi

1960'larda çift stres teorisi Mindlin ve Tiersten (1962), Mindlin (1964, 1965), Toupin (1962) ve Koiter (1964) tarafından önerildi. Bu teoride, İki Lamé sabitine ek olarak iki yüksek dereceli malzeme uzunluk ölçeği parametresi sunuldu. Bu teorinin iyi yönlerinden biri, mikropolar teorideki dört ek parametrenin ve gerilme gradyan teorisindeki ek beş parametrelerin iki ek parametreye indirgenmiş olmasıdır.

Bazı araştırmacılar dairesel silindirlerin davranışlarını çift gerilme teorisine dayandırarak araştırdılar. (Zhou ve Li, 2001; Anthoine, 2000). Yukarıda bahsedildiği gibi, bu teori diğer teorilerden farklı olarak en düşük ek parametrelere sahiptir. Ancak, yüksek dereceli malzemelerin yönetilmesindeki zorluklardan dolayı, deneyler ve malzemeler için malzeme uzunluğu ölçek parametreleri için, Yang, Chong, Lam ve Tong (2002) yeni bir ek denge denklemi kullanarak, çiftlerin moment dengesi, klasik denge denklemlerine ek olarak kuvvetler ve kuvvet momentleri, iki Lamé sabitine ek olarak daha yüksek dereceli bir malzeme uzunluk ölçeği parametreleri içeren değiştirilmiş bir çift gerilme teorisi geliştirmiştir. Park ve Gao (2006) ve Kong, Zhou, Nie ve Wang (2008), modifiye çift stres teorisine dayanan Euler-Bernoulli kirişlerini inceledi ve Modifiye çift stres teorisine dayanan isteğe bağlı, şekilli doğrusal olmayan mikro plakalar Asghari (2012) tarafından geliştirilmiştir.

Gerilme çifti teorisinin içeriğinde, şekil değiştirmiş lineer elastik bir materyal için şekil değiştirme enerjisini tanımlayan fonksiyon hem şekil değiştirmenin hem de eğriliğin bir fonksiyonu şeklinde tanımlanmaktadır. (Yang vd 2002):

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} (\sigma_{ij} * \epsilon_{ij} + m_{ij} * \chi_{ij}) dv. \quad (2.1)$$

Bu denklemde  $m_{ij}$  gerilme çifti tensörüne bağlı deviatorik parçasını,  $\sigma_{ij}$  gerilme tensörünü,  $\epsilon_{ij}$  şekil değiştirme tensörünü ve  $\chi_{ij}$  eğrilik tensörünü ifade etmektedir.

$$\sigma_{ij} = \lambda * \epsilon_{kk} * \delta_{ij} + 2 * \mu * \epsilon_{ij} \quad (2.2)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3)$$

$$m_{ij} = 2 * \ell_2^2 * \mu * \chi_{ij} \quad (2.4)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (2.5)$$

Yukarıdaki denklemlerde,  $u$  deplasman vektörünü,  $\theta$  dönme vektörünü,  $\ell_2$  malzeme boyut ölçek parametresini,  $\lambda$  ve  $\mu$  Lamé sabitlerini ifade eder.

### 2.1.2 Gradyan elastisite teorisi

Karbon nanotüplerdeki bükülme dalgalarının modellenmesi CNT'ler tarafından, diğer tartışmalara göre, ilgili moleküler dinamikler MD simülasyonlarına uygun olarak, kendi içsel nano ölçekli heterojenliklerinden kaynaklanmaktadır.

Klasik elastisite teorisi, kiriş ve shell teorisi ile birlikte oldukça başarılı olmuştur ve aynı zamanda MD simülasyonları ile uyumludur. Aifantis'in çalışmaları ile başlayarak, üst düzey gradyan ve savunulan tipteki yerel olmayan elastikiyet teorileri Mindlin, Kröner ve Eringen tarafından tekrar revize edildi ve bu şekilde sınır değer problemlerini çözmek amacıyla daha basit ve daha güçlü formatlar ortaya çıkarılmak istendi.

### 2.1.3 Yerel olmayan elastisite teorisi

Nano-mekanik alanındaki yeniliklerle birlikte, nano boyutlardaki kirişler, sensörler ve aktüatörler gibi elemanlar nanoteknoloji alanında sürekli kullanılmaya başlanılan yapılar haline gelmişlerdir. Boyuta bağlı ortam sürekli ortam teorileri, yakın geçmişte nano ve mikro teknolojinin sürekli gelişmesi sayesinde çok küçük boyutlardaki mekanik yapıların

analiz ve tasarımında kullanılmaya başlanmıştır. Yerel olmayan elastisite teorisinin içeriği ilk olarak Eringen tarafından ileri sürülmüştür. Yerel olmayan elastisite teorisi çok küçük boyutlardaki nano elemanlara uygulanabilmesi nedeniyle nanoteknoloji komiteleri tarafından yoğun bir ilgiye maruz kalmıştır.

Klasik elastisite teorisinde elemanın üzerindeki bir  $x$  noktasındaki gerilme yalnızca o  $x$  noktasının şekil değiştirme fonksiyonunu tanımlamaktadır. Eringen'in ileri sürdüğü yerel olmayan elastisite teorisine göre ise sürekli bir ortam içinde bulunan bir  $x$  noktasının gerilmesi, yalnızca  $x$  noktasının şekil değiştirmesinin değil ortamda bulunan tüm  $x$  noktalarının şekil değiştirmesinin bir fonksiyonudur. İleri sürülen bu teori bu özelliğinin sayesinde çok küçük boyutlardaki nano elemanları inceleyebilmektedir. Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisini nanoteknoloji alanında kullanan ilk bilim insanı olan Peddieson ve diğerlerinin yaptığı çalışma bu alanda daha sonra yapılacak çalışmalara öncü olarak kabul edilmiştir. Bu çalışmadan sonraki çalışmaların birçoğunda araştırmacılar nano yapıları analiz ederken Eringen'in tasarladığı yerel olmayan modeli kullanmışlardır.

Wang (2005) yerel olmayan elastisite teorisinden yararlanarak pek çok önemli araştırma yapmıştır. Bu araştırmalar; akışkan taşıyan mikro ve nano kirişlerin titreşim ve analizi, akışkan taşıyan ÇDKNT titreşim analizi, akışkan taşıyan nano tüpün serbest titreşimleri, akışkan taşıyan nano tüpün serbest titreşimleri, akışkan taşıyan nano tüpün titreşim ve kararlılık analizidir. Yerel olmayan elastisite teorisi, klasik elastisite teorisinin açıklamakta yetersiz kaldığı durumları ortadan kaldırmak için geliştirilen bir teori olmakla birlikte sürekli ortam mekaniğinde yeni kullanılmaya başlanmış bir yaklaşımdır.

Elastik katılar için, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi aşağıdaki denklemler ile tanımlanmıştır.

$$\sigma_{kl,l} + \rho \left( \ddot{u}_l - \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$\sigma_{kl}(x) = \int_V \alpha(|x - x'|, X) T_{kl}(x') dV(x') \quad (2.7)$$

$$T_{kl}(x') = \lambda \epsilon_{mm}(x') \delta_{kl} + 2\mu \epsilon_{kl}(x') \quad (2.8)$$

$$\epsilon_{kl}(x') = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k(x')}{\partial x'_l} + \frac{\partial u_l(x')}{\partial x'_k} \right) \quad (2.9)$$

Denklemlerde tanımlanan ifadelerden  $\rho$  kütle yoğunluğunu,  $\sigma_{kl}$  yerel olmayan gerilme tensörü,  $u_l$  yer değiştirme vektörü,  $\alpha|x|$  doğrusal diferansiyel bir operatörü,  $f_l$  uygulanmış kuvvet yoğunluğu,  $T_{kl}(x')$  herhangi bir  $x'$  noktasındaki Cauchy gerilme tensörünü,  $\epsilon_{kl}(x')$  yük tensörünü,  $t$  zamanı temsil eder ve  $\alpha|x - x'|$  Öklid'in uzaklık formunu tanımlar. Aşağıda verilmiş olan bağıntı yerel olmayan elastisite teorisinde kullanılabilir:

$$\mathfrak{R}\alpha(|x - x'|) = \delta(|x - x'|) \quad (2.10)$$

(2.2) numaralı eşitlikten aşağıdaki denklem türetilmiştir:

$$\mathfrak{R}\sigma_{kl} = T_{kl} \quad (2.11)$$

Ayrıca (1) numaralı eşitlikten aşağıdaki denklem türetilir:

$$T_{kl,l} + \mathfrak{R}(f_l - \rho \ddot{u}_k) = 0 \quad (2.12)$$

Diferansiyel operatör aşağıdaki şekliyle ifade edilmiştir:

$$\mathfrak{R} = (1 - (e_0\alpha)^2 \nabla^2) = 0 \quad (2.13)$$

Burada,  $e_0\alpha$  yerel olmayan parametre ve  $\nabla^2$  Laplasyen'dir. O halde Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisindeki kurucu eşitlik yerel olmayan parametre koşullarında ifade edilebilmektedir:

$$[1 - (e_0\alpha)^2 \nabla^2] \sigma_{kl} = T_{kl} \quad (2.14)$$

## 2.2 Kaynak Araştırması

Sitemlerin mikro ve nano boyuttaki modellerin mekanik etkiler altındaki davranışları incelenirken yerel olmayan elastisite teorisi ile çözümler yapılmak istenmektedir. Yapının boyuttan kaynaklı karakteristik özelliği büyük önem taşır. Elastisite teorisi ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Örneklendirmek gerekirse; Berg (1958) elastik düzlemdeki kirişlerin rijitlik katsayı hesaplamak amacıyla bir yöntem üzerinde çalışmıştır.

Chang(1965) elastik zemin üzerindeki sonsuz uzunluktaki bir kirişin davranış Őekillerini incelemiştir. Ray (1966), Carrol(1969) ve Meshgin'de (1974) aynı konu üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Alberti ve Tuma(1970) elastik zemine oturan kirişlerin davranışlarını incelemişlerdir ve statik değer hesaplamalarını yapmışlardır. Buldukları değerler kapsamında karşılaştırmalar bu çalışmada sunulmuştur.

Nakamoto (1976) elastik zemindeki kirişlerin yer değiştirme değerlerini incelemiş ve hangi koşullarda değerlerdeki değişiklerin yaşandığını gözlemlemiştir.

Sujith (1997) farklı özelliklerdeki kirişlerin aksenal titreşim analizlerini hesaplamış ve mutlak hesap çözümlerini incelemiştir.

Ren ve Truskinovsky (2000) sonlu ölçekli mikroyapıların yerel olmayan elastisite üzerine araştırmalarını yapmıştır.

Yoon ve Ru (2005) Timoshenko Kirişleri olarak modellenen karbon nanotüplerin titreşim analizlerini incelemişlerdir.

Tepe (2007) nano ölçekli yapıları Hooke Kanunu ve yerel olmayan elastisite teorisi kapsamında başlangıç değer yöntemi ile araştırmıştır.

Karbon nanotüplerde gradyan elastisite ve eğilme dalgası dispersiyonu araştırmaları ve incelenmesi Askas (2009) tarafından sunulmuştur.

Aydoğdu (2009), Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ile nanokirişlerin eğilme ve serbest titreşimini incelemiştir. Bu alışmasında Euler-Bernoulli, Timoshenko, Aydoğdu kiriş teorilerine ait sonuçları çeşitli parametre değerleri ile sunmuştur.

Lim, Li ve Yun (2010) nanokirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine dayalı olarak serbest titreşim analizlerini araştırmışlar ve sonuçlarını sunmuşlardır.

Phadikar ve Pradhan (2010), yerel olmayan elastik nanokiriş ve nanoplakları sonlu elemanlar yöntemiyle analiz etmiş ve incelemiştir.

Yerel olmayan elastisite teorisine göre nano ölçekteki kirişlerin doğrusal olmayan teoriye göre incelenmesi Yaylı (2010) tarafından sunulmuştur.

Alshorbagy ve Eltaher (2011) tarafından sonlu elemanlar yöntemi ile fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir kirişin serbest titreşim özellikleri sunulmuştur. Bu çalışmada fonksiyonel dereceli kirişin kalınlık ve malzeme özellikleri baz alınarak dinamik özelliklerinin karşılaştırmaları yapılmıştır.

Euler – Bernoulli ve Timoşenko kirişlerinin burkulma analizleri gerilme çifti teorisine ait çalışmalar ve sonuçları Abadi ve Daneshmehr (2013) tarafından yapılmıştır.

Gül ve Aydoğlu (2015) alışmalarında, kirişlerin Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri ile dalga sayısı yönünden titreşimlerini incelemiştir.

Nejad ve Hadi (2016) ift yönlü fonksiyonel olarak derecelendirilmiş Euler-Bernoulli nanokirişlerinin serbest titreşim analizlerini araştırmıştır.

Rakrak, Zidour, Heireche ve Chemi (2016) yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak çift duvarlı karbon nanotüpün serbest titreşim analizini araştırmışlar ve hesaplamalarını sunmuşlardır.

Yerel olmayan elastisite teorisine göre nanokirişlerin serbest titreşim analizleri Togun ve Bagdatlı (2016) tarafından sunulmuştur.

Bir ve iki boyutlu mikro yapıların yüksek mertebeden elastisite teorileri ile analizleri Akgöz (2016) tarafından yapılmıştır.

Demir(2016), nanokirişlerin yerel olmayan titreşim analizini yapmıştır. Çalışmada boyutsuz yerel olmayan parametre ve sınır şartlarının etkileri incelenmiştir.

Hashemi ve Khaniki (2016), değişken kesitli yerel olmayan elastik nanokirişin serbest titreşimi için analitik çözümünü araştırmışlardır.

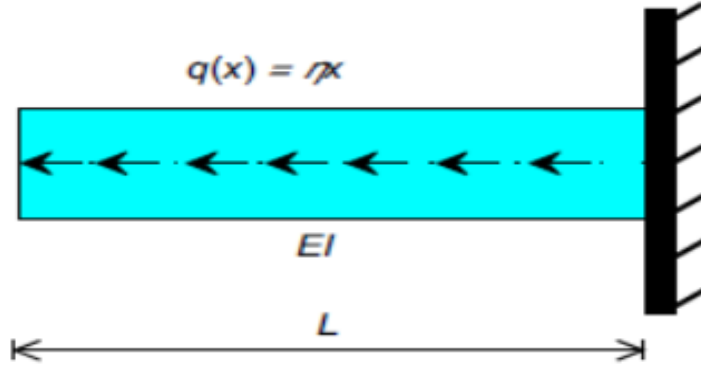
Romano ve Baretta (2017) nanokirişlerdeki küçük ölçekli etkileri yerel olmayan elastisite teorisi ile araştırmışlardır.

Ecsedi ve Baksa (2017) nano kirişlerin serbest titreşim analizlerini incelemiş ve hesaplamalarını incelemişlerdir.

Uzun (2019), fonksiyonel derecelendirilmiş bir nano ölçekteki kirişin farklı sınır koşullarında sonlu elemanlar yöntemiyle titreşim analizini sunmuştur. Çalışmada nano ölçek seviyesinde önemli hale gelen boyut etkisi, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi temelinde anlatılmıştır.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1 Mikrokirişin Eksenel Statik Analizi



Şekil 3.1 Eksenel lineer yük etkisindeki mikrokiriş

Bu bölümde Şekil 3.1’de verilmiş olan eksenel yüklenmiş konsol mikrokirişin statik analizi yapılmıştır. (2.14) numaralı denklemdeki ilişkiyi kullanarak, eksenel yer değiştirme koşulları için yönetici denklem aşağıdaki gibidir:

$$EA \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + q(x) - \mu \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$(e_0 \alpha)^2 = \mu, \quad (3.2)$$

Burada  $u(x)$  eksenel sapmayı belirtir, E elastisite modülünü temsil eder, A ise kesit alanıdır.

Denklem (3.1) nanoçubuğun statik sapma için geçerli olan diferansiyel denklemdir. Yukarıdaki denklemin x’e göre integralini alırsak:



$$EA \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \int_0^L q(x) - \mu \frac{\partial q(x)}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

bulunur.

Bu çalışmada, yukarıda verilmiş olan şekildeki konsol nanoçubuk aksenal yük taşımaktadır:

$$q(x) = \eta x, \quad (3.4)$$

Burada  $\eta$ , doğrusal yüklemenin eğimini temsil eden bir katsayıdır.

### 3.2. Ağırlıklı Artıklar Yöntemleri

Bu bölümde (3.3) numaralı denklemde verilen aksenal yüklenmiş bir nanoçubuğun ağırlıklı artıklar yöntemleriyle çözümleri incelenmiştir. Bu çalışmada kullanılacak yöntemler Galerkin, en küçük kareler, alt alan ve iki parametre yöntemleridir. Yöntemlerin temel esasları gözetilerek hesaplamalar yapılmıştır.

#### 3.2.1 En küçük kareler yöntemi

En küçük kareler yöntemi, etki alanı artık işlevi üzerinde integrali bilinmeyen terimler açısından minimize edilmek zorunda olan, bir alan artık fonksiyonuna ihtiyaç duyar.

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left( \int_0^L R^2 dx \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

Yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left( \int_0^L R \frac{\partial R}{\partial c_i} dx \right) = 0 \quad (3.6)$$

Denklem (3.6) kullanılarak aşağıdaki denklemler kurulabilir;

$$\int_0^L EA(EA(3c_3(x-L)^2 + 2c_2(x-L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) \partial x = 0, \quad (3.7)$$

$$\int_0^L EA2(x-L)(EA(3c_3(x-L)^2 + 2c_2(x-L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) \partial x = 0, \quad (3.8)$$

$$\int_0^L EA3(x-L)^2(EA(3c_3(x-L)^2 + 2c_2(x-L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) \partial x = 0 \quad (3.9)$$

İntegraller alındıktan sonra, aşağıdaki doğrusal denklem sistemleri elde edilir;

$$A^2c_3E^2L^3 - A^2c_2E^2L^2 + A^2c_1E^2L + \frac{5}{3} AEL^3 - 10AE\mu L = 0, \quad (3.10)$$

$$-\frac{3}{2}A^2c_3E^2L^4 + \frac{4}{3} A^2c_2E^2L^3 - A^2c_1E^2L^2 - \frac{5}{6} AEL^4 + 10AE\mu L^2 = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{9}{5} A^2c_3E^2L^5 - \frac{3}{2} A^2c_2E^2L^4 + A^2c_1E^2L^3 + \frac{1}{2} AEL^5 - 10AE\mu L^3 = 0. \quad (3.12)$$

Yukarıdaki denklemleri çözerek, bilinmeyen katsayıları aşağıdaki gibi elde ederiz;

$$c_1 = -\frac{5(L^2 - 2\mu)}{EA} \quad (3.13)$$

$$c_2 = -\frac{5L}{EA}, \quad (3.14)$$

$$c_3 = -\frac{5L}{3EA}, \quad (3.15)$$

Yer değiştirme fonksiyonunda verilen katsayıların sembolik değerlerinin değiştirilmesi ile aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\bar{U}_{LSM} = \frac{5(L^3 - 6\mu L - x^3 + 6\mu x)}{3EA}. \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Galerkin yöntemi

Galerkin yöntemi, bir operatör denkleminin yaklaşık çözümünün, verilen doğrusal bağımsız sistemin elemanlarının doğrusal bileşimi biçiminde bulunma yöntemidir. Galerkin yöntemi temel olarak integral ifadesinin minimize edilmesine dayanır.

$$\left( \int_0^L RW_i dx \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.17)$$

Bu tezde, ağırlık fonksiyon formülleri yer değiştirme fonksiyonunun bir parçası olarak seçilmiştir. Buradaki amaç bilinmeyen üç katsayı olan  $(c_1, c_2, c_3)$  değerlerinin bulunmasıdır, bu sebeple üç ağırlık fonksiyonu seçilmiştir.

$$W_1 = (x - L) \quad (3.18)$$

$$W_2 = (x - L)^2 \quad (3.19)$$

$$W_3 = (x - L)^3 \quad (3.20)$$

Verilmiş olan yaklaşım fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki ilişkiler elde edilmiştir:

$$\int_0^L EA(EA(3c_3(x - L)^2 + 2c_2(x - L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) * (x - L) dx = 0, \quad (3.21)$$

$$\int_0^L (EA(EA(3c_3(x - L)^2 + 2c_2(x - L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) * (x - L)^2 dx = 0, \quad (3.22)$$

$$\int_0^L (EA(EA(3c_3(x - L)^2 + 2c_2(x - L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) * (x - L)^3 dx = 0 \quad (3.23)$$

Verilen integral ifadelerin hesaplanması ile aşağıdaki denklem sistemleri türetilir:

$$-\frac{3}{4} * L^4 * EA * c_3 + \frac{2}{3} * EA * L^3 * c_2 - \frac{1}{2} * EA * L^2 * c_1 - \frac{5}{12} * L^4 + 5\mu L^2 = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{3}{5} * L^5 * EA * c_3 - \frac{1}{2} * EA * L^4 * c_2 + \frac{1}{3} * EA * L^3 * c_1 - \frac{L^5}{6} - \frac{10}{3} \mu L^3 = 0 \quad (3.25)$$

$$-\frac{1}{2} * L^6 * EA * c_3 + \frac{2}{5} * EA * L^5 * c_2 - \frac{1}{4} * EA * L^4 * c_1 - \frac{L^6}{12} + \frac{5}{2} \mu L^4 = 0 \quad (3.26)$$

Bulduğumuz ifadeleri matris formu halinde yazacak olursak:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 * L^4}{12} - 5\mu L^2 \\ -\frac{L^5}{6} + \frac{10}{3} \mu L^3 \\ \frac{L^6}{12} + \frac{5}{2} \mu L^4 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Yer değiştirme fonksiyonunda katsayılar için verilen değerleri yerine koyduğumuzda 3.28 denklemini elde etmiş oluruz:

$$\bar{U}_{GM} = \frac{5(L^3 - 6\mu L - x^3 + 6\mu x)}{3EA} \quad (3.28)$$

### 3.2.3 Alt alan yöntemi

Alt alan yöntemi sonlu farklar bağlamında Biezeno ve Koch'un (1923) çalışması ile ortaya çıkmıştır. Alt alan yöntemi örnekleri laminar sınır tabakalarını çözmek için Pallone (1961), Bartlett ve Kendall (1968) yöntemlerinde bulunabilir. Alt alan yöntemi, bazı seçilen alanların üzerindeki integralin artık fonksiyonunun sıfır olarak alınmasını gerektirir.

$$\int_0^{L/3} R dx = \int_0^{L/3} EA(3c_3(x-L)^2 + 2c_2(x-L) + c_1) - 10\mu + 5x^2 dx = 0, \quad (3.29)$$

$$\int_{L/3}^{2L/3} R dx = \int_{L/3}^{2L/3} EA(3c_3(x-L)^2 + 2c_2(x-L) + c_1) - 10\mu + 5x^2 dx = 0, \quad (3.30)$$

$$\int_{2L/3}^L R dx = \int_{2L/3}^L EA(3c_3(x-L)^2 + 2c_2(x-L) + c_1) - 10\mu + 5x^2 dx = 0, \quad (3.31)$$

Yukarıdaki integrallerin hesaplanmasıyla aşağıdaki denklem sistemlerini elde ederiz;

$$\frac{19}{27}EAc_3L^3 - \frac{5}{9}EAc_2L^2 + \frac{1}{3}EAc_1L + \frac{5L^3}{81} - \frac{10\mu L}{3} = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{7}{27}EAc_3L^3 - \frac{1}{3}EAc_2L^2 + \frac{1}{3}EAc_1L + \frac{35L^3}{81} - \frac{10\mu L}{3} = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{27}EAc_3L^3 - \frac{1}{9}EAc_2L^2 + \frac{1}{3}EAc_1L + \frac{95L^3}{81} - \frac{10\mu L}{3} = 0, \quad (3.34)$$

Yukarıdaki bu üç denklemi bir sistem olarak birleştirerek, aşağıdaki matris formunda yazabiliriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5L^3}{81} + \frac{10\mu L^3}{3} \\ -\frac{35L^3}{81} + \frac{10\mu L^3}{3} \\ -\frac{95L^3}{81} + \frac{10\mu L^3}{3} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Bu şekilde bulmuş olduğumuz (3.13), (3.14) ve (3.15) denklemlerindeki aynı bilinmeyen katsayı ifadelerini elde ettik. Bu katsayıların yer değiştirme fonksiyonuna yerleştirilmesinden sonra (3.16) denklemindeki ilişkinin aynısı elde edilir.

### 3.2.4 İki parametre çözümü

Bu çözümde, tüm artık yönteminin etkilerini incelemek ve değerlendirmek için uygulanmıştır.

Aşağıdaki denklemler alt alan yönteminden elde edilmiştir.

$$\int_0^{\frac{L}{2}} (EA * (2c_2 * (x - L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) dx = 0, \quad (3.36)$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L (EA * (2c_2 * (x - L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) dx = 0, \quad (3.37)$$

Yukarıdaki denklemlerden  $c_1$  ve  $c_2$  katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_1 = -\frac{5(5L^2 - 12\mu)}{6EA}, \quad (3.38)$$

$$c_2 = -\frac{5L}{2EA}. \quad (3.39)$$

Yer değiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi türetilir:

$$\bar{U}_{SDM} = -\frac{5(L - x)(-12\mu + 2L^2 + 3Lx)}{3EA}. \quad (3.40)$$

Ağırlıklı artık yöntemlerinden, artığı minimize eden Galerkin yöntemi, sınır koşullarıyla birlikte aşağıdaki iki terim için belirli integralleri tanımlar:

$$\int_0^L EA * (EA(2 * c_2 * (x - L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) * (x - L) dx = 0, \quad (3.41)$$

$$\int_0^L (EA * 2 * (x - L) * (EA(2 * c_2(x - L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) * (x - L)^2 dx = 0. \quad (3.42)$$

Verilen denklemler çözülüp bilinmeyen katsayılar  $c_1$  ve  $c_2$  denklem 3.43 ve 3.44'deki gibi bulunur.

$$c_1 = -\frac{7L^2 - 20\mu}{2EA}, \quad (3.43)$$

$$c_2 = -\frac{2L}{EA}, \quad (3.44)$$

Bulunan denklemler kullanılarak denklem 3.45'de yer değiştirme fonksiyonu yazılır:

$$\bar{U}_{GM} = -\frac{(L-x)(-20\mu + 3L^2 + 4Lx)}{2EA}. \quad (3.45)$$

En küçük kareler yönteminde ise yaklaşık fonksiyon kullanılarak denklem 3.46 ve 3.47'de yazılır:

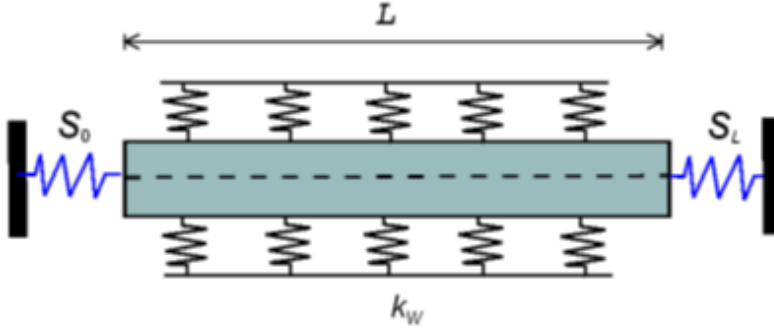
$$\int_0^L EA(EA * (2 * c_2 * (x - L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) dx = 0, \quad (3.46)$$

$$\int_0^L EA * 2 * (x - L) * (EA * (2 * c_2 * (x - L) + c_1) - 10\mu + 5x^2) dx = 0, \quad (3.47)$$

Yukarıdaki denklemlerin çözümü yapıldığında (3.38), (3.39) ve (3.40) denklemleri ile bulunan sonuçlar elde edilir.

### 3.3 Elastik Ortamda Rayleigh Modelindeki Nanoçubuğun Serbest Titreşim Analizi

#### 3.3.1 Mekanik model



**Şekil 3.2** İki ucu yayla sabitlenmiş elastik ortamdaki nanoçubuk

Nanoçubuğun boyu  $L$  ve çapı  $d$  olarak tanımlanır (Şekil 3.2). Çubuğun aksenal hareketi için yerel olmayan yapısal denklem şu şekilde formüle edilir:

$$\sigma_z - (e_0\alpha)^2 \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = E\varepsilon_z, \quad (3.48)$$

Formüle edilmiş olan denklemde E elastisite modülünü,  $\sigma_z$  yerel olmayan normal gerilmeyi,  $\varepsilon_z$  normal gerilmeyi,  $\alpha$  karakteristik uzunluğu,  $e_0$  malzemenin deneyler yardımıyla belirlenmiş bir sabitini ve z ise aksel koordinatı temsil etmektedir.

$\mu = (e_0\alpha)^2$  parametresi yerel olmayan parametre olarak tanımlanır ve karbon nanotüpler için  $\mu < 2 \text{ nm}^2$ 'dir. Ana denklemler kartezyen koordinat sisteminde  $Oxyz$  ( $0 \leq z \leq L$ ), z akseni karbon nanotüpün merkezinde olacak şekilde formüle edilir. Rayleigh modelinde x,y,z yönlerindeki yer değişimleri u, v ve w olarak ifade edilir.

$$u = -\nu \frac{\partial w}{\partial z} x, \quad v = -\nu \frac{\partial w}{\partial z} y, \quad w = w(z, t), \quad (3.49)$$

3.50'deki denklemde t zaman koordinatı  $\nu$  ise Poisson oranıdır. Nanoçubuğun kinetik enerjisi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA dz = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left[ A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \nu^2 I \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \right)^2 \right] dz \end{aligned} \quad (3.50)$$

Denklem 3.50'de A enine kesit,  $\rho$  kütle yoğunluğu, I ise kesitin enine göre polar atalet momentidir. Tanımlamaları ise eşitlik 3.51'de verilmiştir:

$$I = \int_A (x^2 + y^2) dA \quad (3.51)$$

Eksenel yük N hesaplaması ise eşitlik 3.52'deki gibi yapılır:



$$N = \int_A \sigma_z dA \quad (3.52)$$

Verilmiş olan (3.48) ve (3.52) denklemleri birlikte çözülrse:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.53)$$

Oluşan bu eşitlik bize eşitlik 3.54'ü verir:

$$N - \mu \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} = EA \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.54)$$

Mevcut olan problemin hareket denklemi ise eşitlik 3.55'deki gibi yazılır:

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.55)$$

Burada, elastik ortama bağlı aksenal kuvvet tanımlanmıştır. Denklemden verilen  $k$  nanoçubuğu çevreleyen elastik ortamın sertliği olarak tanımlanır.

(3.54) ve (3.55) denklemleri yardımıyla:

$$N = EA \frac{\partial w}{\partial z} + \mu k \frac{\partial w}{\partial z} - \mu \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} \quad (3.56)$$

elde edilir. Hareket denklemi ve sınır koşulları Hamilton prensibi ile eşitlik 3.57'deki gibi yazılır:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\delta T - N \delta \varepsilon_z - k w \delta w) dz dt = 0, \quad (3.57)$$

Bu denklem  $t_1$  ve  $t_2$  anlık değerlerine karşılık gelen tüm olası değişken yollar için yazılmıştır. ( $t_1 < t_2$ ). (3.57) denklemini için detaylı bir hesaplama bize 3.58 denklemini oluşturur:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m(\mu + (\nu R)^2) \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} - (EA) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + kw = 0 \quad 0 < z < L, \quad (3.58)$$

$$\left[ m(\mu + (\nu R)^2) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} + (EA + \mu k) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \delta w = 0, \quad z = 0 \quad \text{ve} \quad z = L \quad \text{için} \quad (3.59)$$

Değerleri tanımlarsak:

$$m = \rho A, \quad R^2 = \frac{I}{A}, \quad (3.60)$$

(3.59) denklemindeki sabit uç mesnet koşullarından:

$$w = 0, \quad (3.61)$$

(3.59) denklemindeki serbest uç mesnet koşullarından ise:

$$m(\mu + (\nu R)^2) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} + (EA + \mu k) \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.62)$$

Burada, Hamilton prensibinde  $\nu = 0$  değeri baz alınarak oluşturulan denklemle aynı hareket denkleminin oluşturulduğu belirtilmiştir. Elastik ortamda bulunan yerel olmayan kirişin eksenel rijitliği denklem 3.63'de verilmiştir:

$$S = EA + k. \quad (3.63)$$

### 3.3.2 Serbest titreşim

Serbest titreşim için  $w(z,t)$  fonksiyonu denklem 3.64'deki gibi ifade edilebilir:

$$w(z,t) = W(z)\text{Cos}\omega t, \quad (3.64)$$

Denklemden verilen  $\omega$  dairesel frekansı ifade eder. (3.64)'deki denklemi (3.58), (3.61) ve (3.62) denklemler için kullanırsak (Ecsedi 2017):

$$[\omega^2 m(\mu + (\nu R)^2) - (EA + \mu k)] \frac{d^2 W}{dz^2} - (k - \omega^2 m)W = 0 \quad 0 < z < L \quad (3.65)$$

-Sabit uç için:

$$W = 0, \quad (3.66)$$

-Serbest uç için:

$$[-\omega^2 m(\mu + (\nu R)^2) + (EA + \mu k)] \frac{dW}{dz} = 0, \quad (3.67)$$

Denklemleri oluşturulur.

(3.65)'deki denklemin şu şekilde tekrar yazılabilir:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \alpha^2 W = 0 \quad 0 < z < L \quad (3.68)$$

Denklemden  $\alpha$  şu şekilde ifade edilir:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 m - k}{EA + \mu k - \omega^2 m(\mu + (\nu R)^2)}, \quad (3.69)$$

Burada, boyutsuz frekans parametresi  $\Omega$  ve boyutsuz sertlik parametresi  $K$ , (3.69) nolu denklemde yerine koyulursa:

$$\alpha^2 = \frac{\Omega^2 - K^2}{1 + \left(\frac{\mu}{L^2} K\right) - \Omega^2 \left(\mu + \frac{(\nu R)^2}{L^2}\right)} \quad (3.70)$$

bulunur.

Boyutsuz frekans parametresi ve boyutsuz sertlik parametresi şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\Omega^2 = \frac{m\omega^2 L^2}{EA}, K = \frac{kL^2}{EA} \quad (3.71)$$

Diferansiyel denklemin (3.68) genel çözümü aşağıdaki gibidir (Ecsedi 2017):

$$W(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z, \quad (3.72)$$

Her iki ucu sabit mesnetlenmiş sınır koşulları için (3.66), (3.70) ve (3.72) denklemleri kullanılarak şu tanımlı yapabiliriz:

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{(i\pi)^2 \left[1 + \frac{K\mu}{L^2}\right] + K}{(i\pi)^2 \left(\mu + \frac{(\nu R)^2}{L^2}\right) + 1}} \quad i = (1, 2, 3 \dots \dots) \quad (3.73)$$

Sabit sınır koşulları söz konusu olduğunda:

$$W(0) = 0, \quad (3.74)$$

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_{z=L} = 0 \text{ ya da } -\omega^2 m \left(\mu + \frac{(\nu R)^2}{L^2}\right) + EA + \mu k = 0 \quad (3.75)$$

(3.74) ve (3.75) denklemlerinden boyutsuz öz frekans için aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{[(2i-1)(\pi/2)]^2 + K[(2i-1)(\pi/2)]^2 \frac{\mu}{L^2} + K}{(\mu + (\nu R)^2/L^2)[(2i-1)(\pi/2)]^2 + 1}} \quad i = (1,2,3,\dots) \quad (3.76)$$

(3.74) ve (3.75) denklemleri kullanılarak yeni öz frekans parametresi elde edilmiştir:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{(\mu + (\nu R)^2)/L^2}}, \quad (3.77)$$

Yanal hareketin eylemsizliği gözardı edildiğinde ( $\nu = 0$ ), boyutsuz titreşimin 1. mod değeri  $\bar{\Omega}_i$  olarak kabul edilir. Enine kesitin yanal hareketinin boyutsuz titreşimin 1. mod değerine etkisi bir sonraki denklemde verilmiştir.

- iki ucu sabit mesnet durumu için

$$\frac{\Omega_i}{\bar{\Omega}_i} = \sqrt{\frac{1 + (i\pi/L)^2 \mu}{1 + (i\pi/L)^2 (\mu + (\nu R)^2)}} \quad i = (1,2,3,\dots), \quad (3.78)$$

### 3.3.3 Harmonik Titreşim Analizi

Nanoçubuğun harmonik titreşim analizi için  $w(z,t)$  fonksiyonu şu şekilde tanımlanmıştır:

$$w(z,t) = W(z)\text{Cos}\omega t \quad (3.79)$$

(3.58) ve (3.79) denklemleri arasındaki ilişki kullanılarak, yerel olmayan elastisite teorisi genelinde aksenal sapma denklemi şu şekilde ifade edilir:

$$[\omega^2 m(\mu + (\nu R)^2) - (EA + \mu k)] \frac{d^2 W}{dz^2} - (k - \omega^2 m)W = 0 \quad 0 < z < L \quad (3.80)$$

Burada  $W$  aksel sapma fonksiyonunu temsil eder. Benzer şekilde (3.59) denkleminde aşağıda verilen sınır koşulları ilişkileri türetilir:

$$-\omega^2 m[\mu + (\nu R)^2] \frac{dW}{dz} + [EA + \mu k_w] \frac{dW}{dz} = S_0, z = 0 \quad (3.81)$$

$$-\omega^2 m[\mu + (\nu R)^2] \frac{dW}{dz} + [EA + \mu k_w] \frac{dW}{dz} = S_L, z = L \quad (3.82)$$

$S_0$  ve  $S_L$  sınır kuvvetlerini ifade etmektedir. Yukarıda verilmiş olan ilişkiler aksel yay katsayıları ve uçlardaki aksel yer değiştirmeler ile temsil edilebilir.

$$s_0 W_0 = -\omega^2 m[\mu + (\nu R)^2] \frac{dW}{dz} + [EA + \mu k_w] \frac{dW}{dz}, z = 0 \quad (3.83)$$

$$s_L W_L = -\omega^2 m[\mu + (\nu R)^2] \frac{dW}{dz} + [EA + \mu k_w] \frac{dW}{dz}, z = L \quad (3.84)$$

$s_0$  ve  $s_L$  ifadeleri ise uçlardaki yay katsayılarını ifade eder.  $W_0$  ve  $W_L$  sınır noktalarındaki aksel sapmaları temsil eder.

### 3.3.4 Aksel Sınırlar Altındaki Nanokiriş

Nano boyutlu sensörler Fe (III) iyonlarının ve hidrojen gazını algılama konusunda yararlıdır. Nanokirişler kullanışlı olması açısından deforme olabilen sınır koşulları altında modellenmiştir. Rayleigh nanokirişlerinin yansıtıcılık özellikleri aksel sınırlamalarla değiştirilebilir, nanokirişin yöneliminin elektrik alanıyla değiştirilmesi halinde mükemmel görüntüler elde edilebilir. Bu bölümde iki ucu yaylar ile tutulu nanokirişin aksel titreşim

analizi Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ve Rayleigh modeli baz alınarak yapılmıştır. Önerilen analitik yöntemin ana fikri, burulma yayı katsayıları dahil olmak üzere bir özdeğer problemi ortaya çıkarmaktır.

### 3.3.5 Çözüm Yöntemi

Eksenel yer değiştirme fonksiyonu (3.80) numaralı denklemde aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & z = 0 \\ W_L & z = L \\ \sum_{N=1}^{\infty} A_N \sin(\beta_N z) & 0 < z < L \end{cases} \quad (3.85)$$

Burada;

$$\beta_N = \frac{N\pi}{L} \quad (3.86)$$

### 3.3.6 Stokes Dönüşümü

Bu çalışmada Stoke dönüşümünden yararlanılmıştır. (Yayli 2016, Yayli ve ark. 2015).

(3.85)'da verilmiş olan  $A_N$  katsayısı şu şekilde ifade edilir:

$$A_N = \frac{2}{L} \int_0^L W(z) \sin(\beta_N z) dz \quad (3.87)$$

(3.85)'deki ifadenin  $z$ 'ye göre türevini alırsak:

$$W'(x) = \sum_{N=1}^{\infty} \beta_N A_N \cos(\beta_N z) \quad (3.88)$$

bulunur.

Denklem (3.88) Fourier kosinüs serisi ile temsil edilirse:

$$W'(x) = \frac{f_0}{L} + \sum_{N=1}^{\infty} f_N \cos(\beta_N z) \quad (3.89)$$

elde edilir.

Burada;

$$f_0 = \frac{2}{L} \int_0^L W'(z) dz = \frac{2}{L} [W(L) - W(0)] \quad (3.90)$$

$$f_N = \frac{2}{L} \int_0^L W'(z) \cos(\beta_N z) dx (N = 1, 2, \dots) \quad (3.91)$$

Bulmuş olduğumuz denklemin integralini alıp denklem (3.91) 'de yerine yazarsak:

$$f_N = \frac{2}{L} [W(x) \cos(\beta_N z)]_0^L + \frac{2}{L} [\beta_N \int_0^L W(z) \sin(\beta_N z) dz] \quad (3.92)$$

$$f_N = \frac{2}{L} [(-1)^N W(L) - W(0)] + \beta_N A_N \quad (3.93)$$

denklemleri elde edilmiş olur.

Benzer şekilde yüksek mertebeden türevler aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{W_L - W_0}{L} + \sum_{N=1}^{\infty} \cos(\beta_N z) \left( \frac{2((-1)^N W_L - W_0)}{L} + \beta_N A_N \right) \quad (3.94)$$



$$\frac{d^2W(z)}{dz^2} = - \sum_{N=1}^{\infty} \beta_N \sin(\beta_N x) \left( \frac{2((-1)^N W_L - W_0)}{L} + \beta_N A_N \right) \quad (3.95)$$

(3.85) ve (3.95) denklemlerini (3.80) denkleminde yerine yazacak olursak,  $A_N$  katsayısı ve açısız dönme fonksiyonu  $w(x,t)$   $W_0$  ve  $W_L$  cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$A_N = \frac{2\beta_N((-1)^{n+1}W_L + W_0)\psi_N}{L(\beta_N^2\psi_N + k_W - \omega^2m)} \quad (3.96)$$

Burada,

$$\psi_N = (AE + k_W\mu - \omega^2m(\mu + (\nu R)^2)) \quad (3.97)$$

Yukarıda verilen iki denklemdeki ilişkiyi kullanarak, eksenel sapma fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir:

$$W(z) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{2\beta_N((-1)^{n+1}W_L + W_0)\psi_N}{L(\beta_N^2\psi_N + k_W - \omega^2m)} \sin(\beta_N z) \quad (3.98)$$

### 3.3.6 Elastik Ortam Altındaki Rayleigh Nanoçubuk İçin Özdeğer Problemi

(3.94) ve (3.96) denklemleri (3.83) ve (3.84) denklemlerinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
& (S_1(\Omega^2 - K) + \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} - S_0 - 1 \\
& + \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(K - \Omega^2)(S_1 L^2(K - \Omega^2) + S_2(L - \nu R \Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(K - \Omega^2) + K + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) W_0(S_1(K - \Omega^2)) \\
& - \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} + 1 \\
& - \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^n(K - \Omega^2)(S_1 L^2(K - \Omega^2) + S_2(L - \nu R \Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(K - \Omega^2) + K + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) W_L \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.99}$$

$$\begin{aligned}
& (S_1(K - \Omega^2) - \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} + 1 \\
& - \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^n(K - \Omega^2)(S_1 L^2(K - \Omega^2) + S_2(L - \nu R \Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(K - \Omega^2) + K + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) W_0 + (S_1(\Omega^2 \\
& - K) + \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} - S_L - 1 \\
& + \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(K - \Omega^2)(S_1 L^2(K - \Omega^2) + S_2(L - \nu R \Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(K - \Omega^2) + K + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) W_L \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Burada;

$$S_1 = \frac{\mu}{L^2} \tag{3.101}$$

$$S_2 = L + \nu R \Omega \tag{3.102}$$

$$S_n = L^2 + \pi^2 \nu^2 n^2 R^2 \tag{3.103}$$

$$K = \frac{k_W L}{EA} \tag{3.104}$$

$$\Omega^2 = \frac{m \Omega^2 L^2}{EA} \tag{3.105}$$

$$S_0 = \frac{s_0 L}{EA} \tag{3.106}$$

$$S_L = \frac{S_L L}{EA} \quad (3.107)$$

(3.99) ve (3.100) numaralı denklemler matris formunda yazılacak olursa:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_L \end{bmatrix} = 0 \quad (3.108)$$

Buradan;

$$c_{11} = (S_1(\Omega^2 - K) + \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} - S_0 - 1) + \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(K - \Omega^2)(S_1 L^2 (K - \Omega^2) + S_2 (L - \nu R \Omega))}{L^2 (\pi^2 S_1 n^2 (K - \Omega^2) + K + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) \quad (3.109)$$

$$c_{12} = \left( S_1(K - \Omega^2) - \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} + 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^n (K - \Omega^2)(S_1 L^2 (K - \Omega^2) + S_2 (L - \nu R \Omega))}{L^2 (\pi^2 S_1 n^2 (K - \Omega^2) + K + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) \right) \quad (3.110)$$

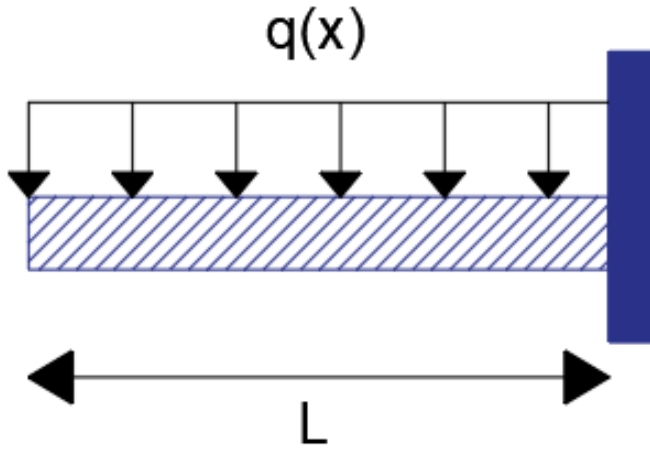
$$c_{21} = (S_1(K - \Omega^2) - \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} + 1) - \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^n (K - \Omega^2)(S_1 L^2 (K - \Omega^2) + S_2 (L - \nu R \Omega))}{L^2 (\pi^2 S_1 n^2 (K - \Omega^2) + K + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) \quad (3.111)$$

$$c_{22} = \left( S_1(\Omega^2 - K) + \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} - S_L - 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(K - \Omega^2)(S_1 L^2 (K - \Omega^2) + S_2 (L - \nu R \Omega))}{L^2 (\pi^2 S_1 n^2 (K - \Omega^2) + K + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) \right) \quad (3.112)$$

Rayleigh nanoçubuğun aksel titreşim frekans değerleri katsayı matrisinin sıfıra eşitlenmesi ile hesaplanabilir.

$$|c_{ij}| = 0, (i, j = 1, 2) \quad (3.113)$$

### 3.4. Bir Mikrokirişin Eğilme Analizi



Şekil 3.3. Düzgün yayılı yüklenmiş konsol bir mikrokiriş

Bu bölümde Şekil 3.3'te görülen düzgün yayılı yüklenmiş konsol mikrokirişin eğilme analizi yapılmıştır. Bu analizler yapılırken ağırlıklı artık fonksiyon yöntemleri kullanılmıştır. Bernoulli-Euler kirişinin yer değiştirme için bileşenleri şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$u = -z\psi(x), \quad v = 0, \quad w = w(x) \quad (3.114)$$

$u, v, w$  sırasıyla  $x, y, z$ 'nin yer değiştirme vektörlerinin  $u$  bileşenleri ve  $\psi$  merkez ekseninin dönme açısıdır.

$$\psi \approx \frac{dw(x)}{dx} \quad (3.115)$$

(3.114) ve (3.115) denklemlerini kullanarak:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (3.116)$$

elde edilir. (Akgöz,2010):

Yukarıda verilmiş olan (3.114) ve (3.115) denklemlerinden:

$$\theta_y = \frac{dw(x)}{dx}, \quad \theta_x = \theta_z = 0 \quad (3.117)$$

elde edilmiştir. (Akgöz,2010)

Yukarıda verilmiş olan (3.117) denkleminde aşağıdaki bağıntı elde edilmiştir:

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = 0 \quad (3.118)$$

Yukarıda elde edilmiş olan denklemler kullanılarak:

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( -z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( -z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (3.119)$$

elde edilmiştir

Yukarıda elde edilen denklemde E Young modülünü,  $\nu$  Poisson oranını temsil eder. E ve  $\nu$  lame sabitleri olan  $\lambda$  ve  $\mu$  ile ilişkilidir.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.120)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.121)$$

Denklem (3.121)'da tanımlanmış olan  $\mu$  malzeme sabiti olarak bilinir. Bu ifade aynı zamanda kayma modülü (G) olarak da bilinir. En/boy oranı açısından yüksek bir kirişte Poisson etkisi basit kiriş teorisi formülasyonunu daha kolay şekilde ifade edebilmek için ihmal edilebilir. Ve bu şekilde oluşturulan denklem şu şekildedir:

$$\sigma_{xx} = -Ez \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (3.122)$$

(3.83) denklemi ilgili bağıntılarda yerine yazılırsa:

$$m_{xy} = \mu I_2^2 \frac{d^2w(x)}{dx^2}, m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} = m_{yz} = m_{zx} = 0 \quad (3.123)$$

elde edilir. (Akgöz,2010)

(3.116), (3.119), (3.122) ve (3.123) numaralı denklemler kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$U = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^L M_x \frac{d^2w(x)}{dx^2} dx - \frac{1}{2} \int_{x=0}^L Y_{xy} \frac{d^2w(x)}{dx^2} dx \quad (3.124)$$

Bileşke moment olarak ifade edilen  $M_x$  ve çift moment olan  $Y_{xy}$  aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$M_x = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (3.125)$$

$$Y_{xy} = \int_A m_{xy} dA \quad (3.126)$$

Dış kuvvetlerin yaptığı iş  $q(x)$  formunda (yüzey çifti olmadığı durumda) cisim çifti ve cisim kuvveti göz ardı edilerek şu şekilde bir denklem oluşturulabilir:

$$W = \int_{x=0}^L q(x)w(x) dx \quad (3.127)$$

Denklem (3.124) ve (3.127) denklemleri yardımıyla düzgün yayılı yüklü bir kirişteki potansiyel enerji  $\Pi$  şu şekilde ifade edilir:

$$\Pi = U - W = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^L (M_x + Y_{xy}) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dx - \int_{x=0}^L q(x)w(x) dx \quad (3.128)$$

$\Pi$ 'nin birinci varyasyonu alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & -(M_x + Y_{xy})\delta w'(x)|_0^L + \left( \frac{dM_x}{dx} + \frac{dY_{xy}}{dx} \right) \delta w(x)|_0^L \\ & - \int_0^L \left( \frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{d^2 Y_{xy}}{dx^2} + q \right) \delta w(x) dx \end{aligned} \quad (3.129)$$

Minimum toplam potansiyel enerji prensibi kullanılarak kararlı denge durumu için  $\delta\Pi=0$  ve varyasyon hesaplanması amacı ile kullanılmış olan yardımcı teoremler ile denklem (3.129) ile denge denklemi şu şekilde elde edilmiştir:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{d^2 Y_{xy}}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (3.130)$$

(3.122), (3.123), (3.125) ve (3.126) numaralı denklemlerden aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$M_x = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3.131)$$

$$Y_{xy} = -\mu A I_2^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3.132)$$

I en kesit alanının atalet momentini ifade eder. Ve şu şekilde ifade edilmiştir:

$$I = \int_A z^2 dA \quad (3.133)$$

(3.131) ve (3.132) numaralı denklemler (3.133) numaralı denklemde yerine yazıldığında şu bağıntı elde edilmiş olur:

$$(EI + \mu A I_2^2) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (3.134)$$

Bulunmuş olan bu denklem mikrokirişin  $w(x)$  cinsinden eğilme denklemdir. (3.132) ve (3.133) denklemleri toplanırsa aşağıdaki denklem elde edilmiş olur:

$$M_x + Y_{xy} = -(EI + \mu A I_2^2) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3.135)$$

Yukarıda (3.134) denklemine bakıldığında kirişin eğilme denkleminde iki önemli faktörün olduğu görülmektedir. Bu etkenlerden ilk olan normal gerilme bileşeni olan  $\sigma_{xx}$ , diğer etken ise gerilme çifti bileşeni  $m_{xy}$  ile bağlantılıdır. Yukarıda verilmiş bu denklem ayrıca



mikrokirişin eğilme rijitliğinin  $(EI + \mu AI_2^2)$  açıkça  $I_2$  bağlı olduğunu göstermektedir.  $I_2$  değeri mikrokiriş yapısıyla ilgilidir.

Şekil 3.3'te verilmiş olan mikrokirişin eğilme denklemi, yukarıda ifade edilmiş olan (3.134) denkleminin dört kez integralinin alınmasıyla denklem 3.136'daki gibi elde edilir:

$$w(x) = \frac{1}{(EI + \mu AI_2^2)} \left[ -\frac{qx^4}{72} + c_1x + c_2 \right] \quad (3.136)$$

### 3.4.1. Mikrokirişin Eğilme Analizinin Alt Alan yöntemiyle çözümü

Bu yöntemin uygulaması, seçilen alanların üzerindeki integralin artık fonksiyonunun sıfır olarak alınması ile sağlanır.

Ağırlıklı artık yöntemlerinde kullanılacak olan artık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$R = (EI + \mu * A * I_2^2) * \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{q * x^2}{2} = 0 \quad (3.137)$$

$W$  fonksiyonunun iki kez türevi alındıktan sonra denklemde yerine yazıldığında elde edilen denklem 3.138'deki gibidir:

$$W = a_1 * (x - L)^2 + a_2 * (x - L)^3 + a_3 * (x - L)^4 \quad (3.138)$$

$$R = (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{2} \quad (3.139)$$

$$\int_0^{\frac{L}{3}} ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{2}) dx = 0 \quad (3.140)$$

$$\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{2}) dx = 0 \quad (3.141)$$

$$\int_{\frac{2L}{3}}^L ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{2}) dx = 0 \quad (3.142)$$

İntegraller alındığında aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{1}{162} L (L^2 q + 6(EI + \mu * A * I_2^2)(18a_1 + L(-45a_2 + 76La_3))) = 0 \quad (3.143)$$

$$\frac{1}{162} L (7L^2 q + 6(EI + \mu * A * I_2^2)(18a_1 + L(-27a_2 + 28La_3))) = 0 \quad (3.144)$$

$$\frac{1}{162} L (19L^2 q + 6(EI + \mu * A * I_2^2)(18a_1 + L(-9a_2 + 4La_3))) = 0 \quad (3.145)$$

Bu denklem sistemi çözüldüğünde bilinmeyen katsayılar şu şekilde bulunur:

$$a_1 = -\frac{L^2 q}{4(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.146)$$

$$a_2 = -\frac{Lq}{6(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.147)$$

$$a_3 = -\frac{q}{24(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.148)$$

Bulunan bu katsayılar denklemde yerlerine yazıldığında oluşan W fonksiyonu eşitlik 3.149'daki gibi olur:

$$W = -\frac{L^2 q}{4(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^2 - \frac{Lq}{6(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^3 - \frac{q}{24(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^4 \quad (3.149)$$

### 3.4.2. En küçük kareler yöntemiyle çözüm

En küçük kareler yöntemi uygulanırken yöntemin temelini aşağıdaki eşitlik oluşturmaktadır.

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \int_0^L R^2 dx \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.150)$$

Bu denklemi 3.151 denklemindeki haliyle tekrar yazabiliriz:

$$\left( \int_0^L R \frac{\partial R}{\partial a_i} dx \right) = 0. \quad (3.151)$$

(3.151) numaralı denklem kullanılarak aşağı verilen bağıntıları elde ederiz:

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{2} \right) * 2 * (EI + \mu * A * I_2^2) dx = 0 \quad (3.152)$$

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{2} \right) * 6 * (EI + \mu * A * I_2^2) * (x - L) dx = 0 \quad (3.153)$$

$$\int_0^L ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6}) * 12 * (EI + \mu * A * I_2^2) * (x - L)^2 dx = 0 \quad (3.154)$$

Yukarıdaki bağıntıların integralleri alınırsa aşağıdaki denklem takımı elde edilir:

$$2(EI + \mu * A * I_2^2) \left( \frac{L^3 q}{6} + L(EI + \mu * A * I_2^2)(2a_1 + L(-3a_2 + 4La_3)) \right) = 0 \quad (3.155)$$

$$6(EI + \mu * A * I_2^2) \left( -\frac{L^4 q}{24} - L^2(EI + \mu * A * I_2^2)(a_1 + L(-2a_2 + 3La_3)) \right) = 0 \quad (3.156)$$

$$\frac{1}{5} L(EI + \mu * A * I_2^2) \left( L^4 q + 6L^2(EI + \mu * A * I_2^2)(20a_1 + 9L(-5a_2 + 8La_3)) \right) = 0 \quad (3.157)$$

Yukarıda verilmiş olan denklem takımı çözüldüğünde bilinmeyen katsayılar şu şekilde bulunur:

$$a_1 = -\frac{L^2 q}{4(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.158)$$

$$a_2 = -\frac{Lq}{6(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.159)$$

$$a_3 = -\frac{q}{24(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.160)$$

Bulunan bilinmeyen katsayı değerleri ilgili denklemde yerine yazıldığında ise aşağıdaki denklem oluşur:

$$W = -\frac{L^2 q}{4(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^2 - \frac{Lq}{6(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^3 - \frac{q}{24(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^4 \quad (3.161)$$

### 3.4.3. Galerkin yöntemiyle çözüm

Galerkin metoduyla çözüm yaparken üç bilinmeyen katsayı için üç sınır koşulu bağıntısı seçilir:

$$\int_0^L R * W_i dx = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.162)$$

$$W_1 = (x - L) \quad (3.163)$$

$$W_2 = (x - L)^2 \quad (3.164)$$

$$W_3 = (x - L)^3 \quad (3.165)$$

Yukarıda verilmiş olan yaklaşım fonksiyonlarını kullanarak (3.162) denkleminde sırasıyla yerine yazıldığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{2} \right) * (x - L) dx = 0 \quad (3.166)$$

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{2} \right) * (x - L)^2 dx = 0 \quad (3.167)$$

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{2} \right) * (x - L)^3 dx = 0 \quad (3.168)$$

Yukarıda vermiş olan integraller hesaplanıldığında aşağıdaki denklem sistemi oluşur:

$$-\frac{L^4 q}{24} - L^2 (EI + \mu * A * I_2^2) (a_1 + L(-2a_2 + 3La_3)) = 0 \quad (3.169)$$

$$\frac{1}{60} L \left( L^4 q + 6L^2 (EI + \mu * A * I_2^2) (20a_1 + 9L(-5a_2 + 8La_3)) \right) = 0 \quad (3.170)$$

$$\frac{1}{120} L^4 \left( -L^2 q - 36(EI + \mu * A * I_2^2) (5a_1 + 4L(-3a_2 + 5La_3)) \right) = 0 \quad (3.171)$$

Denklem sistemi çözüldüğünde ise  $a_1, a_2, a_3$  bilinmeyenleri şu şekilde bulunur:

$$a_1 = -\frac{L^2 q}{4(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.172)$$

$$a_2 = -\frac{Lq}{6(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.173)$$

$$a_3 = -\frac{q}{24(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.174)$$

Bulunan bilinmeyen katsayılar W fonksiyonunda yerine yazıldığında oluşacak denklem şu şekildedir:

$$W = -\frac{L^2 q}{4(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^2 - \frac{Lq}{6(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^3 - \frac{q}{24(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^4 \quad (3.175)$$

### 3.4.4. İki parametre çözümü

İki parametre çözümünün amacı önceki yöntemlerde bulmuş olduğumuz bilinmeyen denklemlerin katsayılarının kontrolünü sağlamak olacaktır.

$$\int_0^{\frac{L}{2}} ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L)) + \frac{q * x^2}{6}) dx = 0 \quad (3.176)$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L)) + \frac{q * x^2}{6}) dx = 0 \quad (3.177)$$

Yukarıda verilen integraller hesaplandığında ise:

$$\frac{L^3 q}{48} + EILa_1 + AL\mu I_2^2 a_1 - \frac{9}{4} EIL^2 a_2 - \frac{9}{4} AL^2 \mu I_2^2 a_2 = 0 \quad (3.178)$$

$$\frac{7L^3 q}{48} + EILa_1 + AL\mu I_2^2 a_1 - \frac{3}{4} EIL^2 a_2 - \frac{3}{4} AL^2 \mu I_2^2 a_2 = 0 \quad (3.179)$$

denklemleri oluşur.

Bulmuş olduğumuz denklemler çözüldüğünde bilinmeyen katsayılar şu şekilde hesaplanır:

$$a_1 = -\frac{5L^2 q}{24(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.180)$$

$$a_2 = -\frac{Lq}{12(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.181)$$

Bulduğumuz katsayılar W fonksiyonunda yerine konulduğunda ise:

$$W = -\frac{5L^2q}{24(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^2 - \frac{Lq}{12(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^3 \quad (3.182)$$

elde ederiz.



#### 4. BULGULAR

Bu bölümde Çizelge 4.1’de mekanik özellikleri verilmiş olan Rayleigh Modeli’ndeki bir nanoçubuğun elastik ortamda ve farklı koşullar altındaki aksenal hareketi incelenmiştir. Bu çalışmada nanoçubuğun farklı mesnetlenme koşulları,  $L$ ,  $r$ ,  $\nu$ ,  $\mu$  değerlerinin değişimi sırasında aksenal hareketin mod değerlerine olan etkileri incelenmiştir. Analizler oluşturulurken Mathematica programı kullanılmış olup grafik haline getirilmiştir. Bu sonuçlar Eringen’in Yerel Olmayan Elastisite teorisini ve Rayleigh Modeli’ni baz alarak oluşturulmuştur. Bulgular bölümünde yapılmış olan çalışmalarda  $S_0$  ve  $S_L$  ifadeleri yay kuvvetlerini temsil etmektedir. Alınan değerlerin birimleri nanonewton/nanometre’dir.

**Çizelge 4.1** Çalışmada kullanmış olan karbon nanotüpün mekanik özellikleri

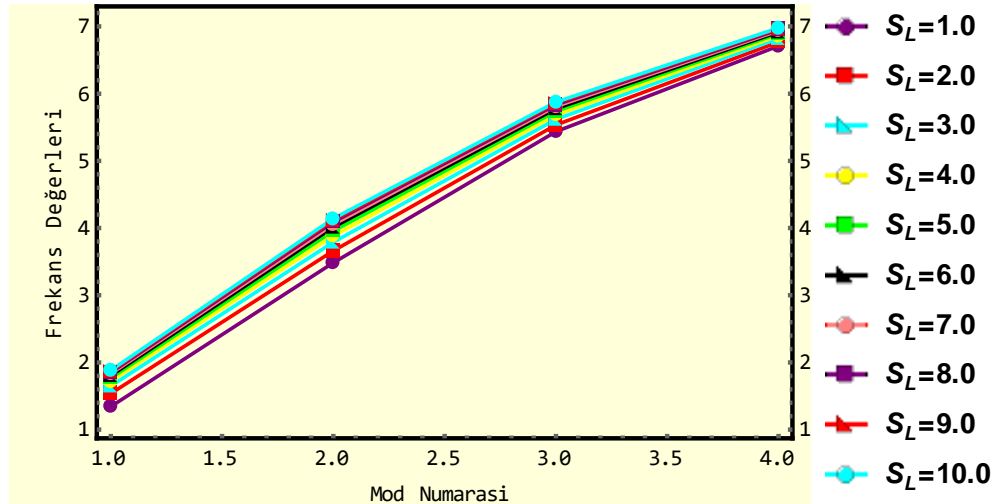
$\rho$ (Yoğunluk)	0,8 Mg.m-3
$\mu$ (Lame Sabiti)	1,2
$\nu$ (Poisson Oranı)	0,3
A (Enkesit Alanı)	3 nm <sup>2</sup>
E (Elastisite Modülü)	1 GPa

Elastik ortam altındaki nanoçubuğun frekans değerlerinin verilmiş olduğu Çizelge 4.2’de bir mesnet koşulu ( $S_0=1$ ) değeri olarak sabit tutulurken, diğer mesnet koşulu olan  $S_L$  değeri 1 ile 10 değerleri arasında değiştirilmiş ve oluşan değerlerin farklılığı gözlemlenmiştir. Aşağıda verilen Çizelge 4.2 ve Şekil 4.1 oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.2** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=1$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,343	3,485	5,435	6,710
$S_L = 2$	1,538	3,661	5,536	6,770
$S_L = 3$	1,649	3,790	5,619	6,821
$S_L = 4$	1,720	3,885	5,685	6,861
$S_L = 5$	1,768	3,957	5,736	6,892
$S_L = 6$	1,804	4,012	5,777	6,917
$S_L = 7$	1,831	4,055	5,809	6,937
$S_L = 8$	1,852	4,089	5,835	6,954
$S_L = 9$	1,869	4,117	5,857	6,967
$S_L = 10$	1,882	4,141	5,875	6,978

Aşağıdaki Şekil 4.1’de yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerin karşılaştırılması yapılmıştır.



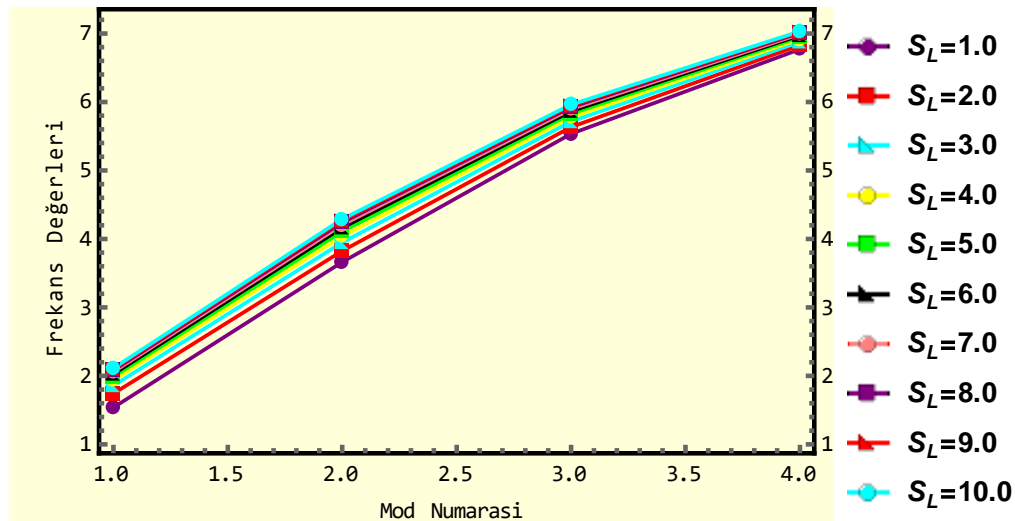
**Şekil 4.1** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=1$ )

Aşağıda oluşturulmuş olan Çizelge 4.3’de bir mesnet koşulu ( $S_0=2$ ) değeri olarak sabit tutulurken, diğer mesnet koşulu olan  $S_L$  değeri 1 ile 10 değerleri arasında değiştirilmiş ve oluşan değerlerin farklılığı gözlemlenmiştir. Aşağıda verilen Çizelge 4.3 ve Şekil 4.2 oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.3** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=2$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,538	3,661	5,536	6,770
$S_L = 2$	1,742	3,825	5,634	6,829
$S_L = 3$	1,860	3,948	5,714	6,878
$S_L = 4$	1,937	4,040	5,777	6,917
$S_L = 5$	1,990	4,109	5,827	6,948
$S_L = 6$	2,028	4,163	5,866	6,972
$S_L = 7$	2,058	4,205	5,897	6,992
$S_L = 8$	2,081	4,239	5,923	7,007
$S_L = 9$	2,099	4,266	5,944	7,020
$S_L = 10$	2,114	4,289	5,961	7,031

Aşağıdaki Şekil 4.2’de yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



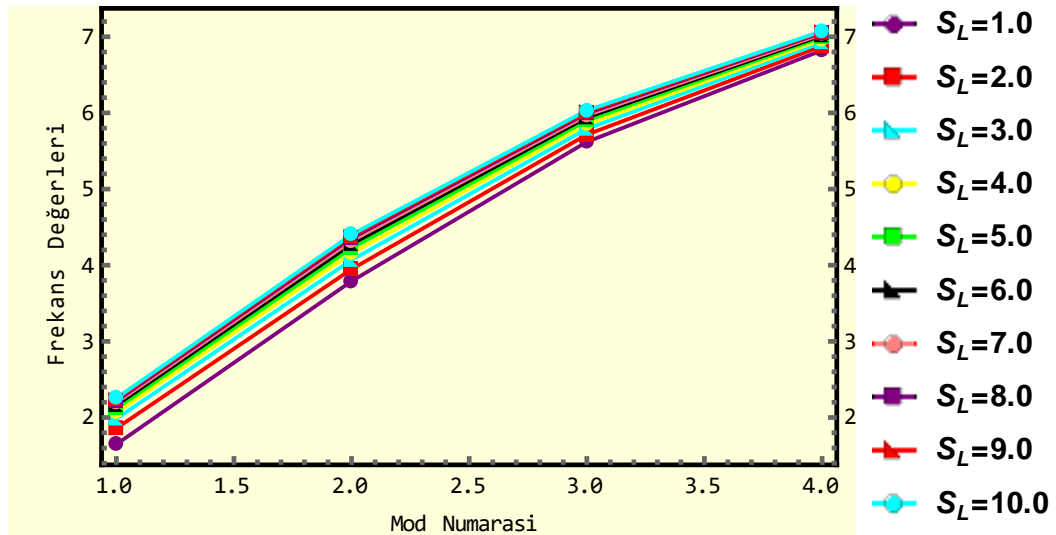
**Şekil 4.2** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=2$ )

Çizelge 4.4’de nanoçubuğun bir mesnet koşulu ( $S_0=3$ ) değeri olarak sabit tutulurken, diğer mesnet koşulu olan  $S_L$  değeri 1 ile 10 değerleri arasında değiştirilmiş ve oluşan değerlerin farklılığı gözlemlenmiştir. Aşağıda verilen Çizelge 4.4 ve Şekil 4.3 oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.4** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=3$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,649	3,790	5,619	6,821
$S_L = 2$	1,860	3,948	5,714	6,878
$S_L = 3$	1,985	4,068	5,791	6,926
$S_L = 4$	2,066	4,158	5,853	6,964
$S_L = 5$	2,122	4,226	5,901	6,994
$S_L = 6$	2,164	4,279	5,940	7,018
$S_L = 7$	2,195	4,320	5,970	7,036
$S_L = 8$	2,220	4,353	5,995	7,052
$S_L = 9$	2,239	4,381	6,016	7,064
$S_L = 10$	2,256	4,403	6,033	7,074

Aşağıdaki Şekil 4.3’de yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



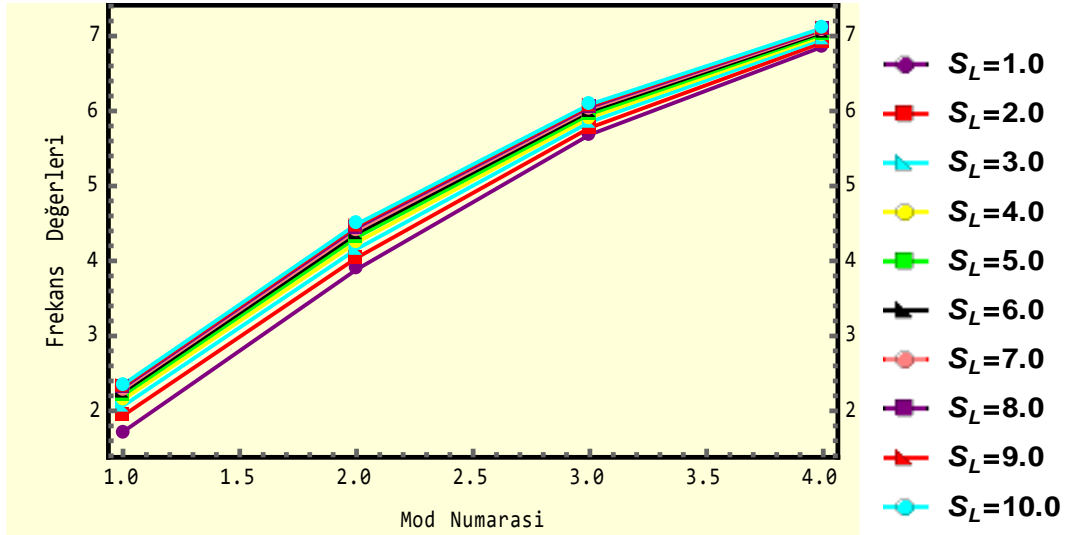
**Şekil 4.3** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=3$ )

Aşağıda verilmiş olan Çizelge 4.5’deki değerler nanoçubuğun bir mesnet koşulunu ( $S_0=4$ ) sabit tutulup diğer mesnet koşulunu ise 1 ile 10 değerleri verilerek oluşturulan değerlerdir. Yapılan bu işlemde  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.5** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=4$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,720	3,885	5,685	6,861
$S_L = 2$	1,937	4,040	5,777	6,917
$S_L = 3$	2,066	4,158	5,853	6,964
$S_L = 4$	2,151	4,247	5,913	7,001
$S_L = 5$	2,209	4,314	5,960	7,031
$S_L = 6$	2,253	4,366	5,998	7,054
$S_L = 7$	2,286	4,407	6,028	7,072
$S_L = 8$	2,312	4,441	6,053	7,087
$S_L = 9$	2,332	4,468	6,073	7,099
$S_L = 10$	2,349	4,490	6,089	7,109

Aşağıdaki Şekil 4.4’de yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



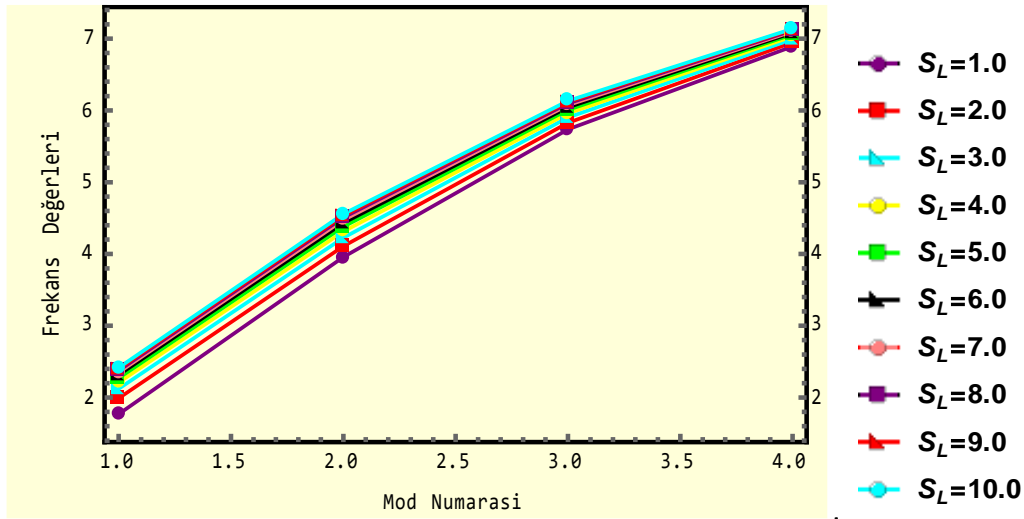
**Şekil 4.4** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=4$ )

Nanoçubuğun bir mesnet koşulunu ( $S_0=5$ ) sabit tutup diğer mesnet koşulunu 1 ile 10 arasındaki değerler vererek oluşturulmuş Çizelge 4.6 aşağıdaki gibidir. Çizelge 4.6 oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.6** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=5$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,768	3,957	5,736	6,892
$S_L = 2$	1,990	4,109	5,827	6,948
$S_L = 3$	2,122	4,226	5,901	6,994
$S_L = 4$	2,209	4,314	5,960	7,031
$S_L = 5$	2,270	4,381	6,007	7,059
$S_L = 6$	2,315	4,433	6,044	7,082
$S_L = 7$	2,349	4,474	6,074	7,100
$S_L = 8$	2,376	4,507	6,098	7,115
$S_L = 9$	2,398	4,534	6,118	7,127
$S_L = 10$	2,415	4,557	6,134	7,137

Aşağıdaki Şekil 4.5’de yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



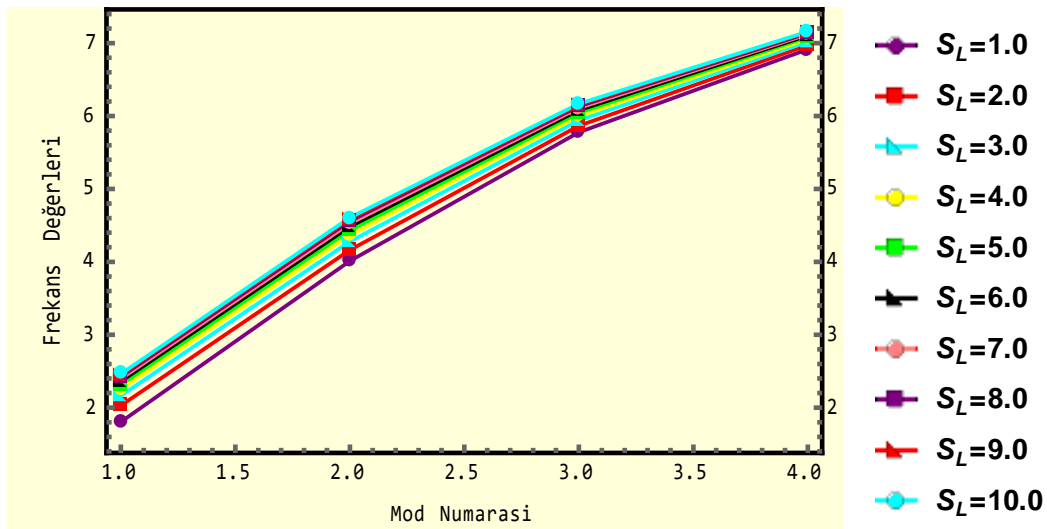
**Şekil 4.5** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=2$ )

Aşağıda oluşturulmuş olan Çizelge 4.7’de bir mesnet koşulu ( $S_0=6$ ) değeri olarak sabit tutulurken, diğer mesnet koşulu olan  $S_L$  değeri 1 ile 10 değerleri arasında değiştirilmiş ve oluşan değerlerin farklılığı gözlemlenmiştir. Aşağıda verilen Çizelge 4.7 ve Şekil 4.6 oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.7** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=6$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,804	4,012	5,777	6,917
$S_L = 2$	2,028	4,163	5,866	6,972
$S_L = 3$	2,164	4,279	5,940	7,018
$S_L = 4$	2,253	4,366	5,998	7,054
$S_L = 5$	2,315	4,433	6,044	7,082
$S_L = 6$	2,361	4,485	6,081	7,104
$S_L = 7$	2,396	4,526	6,110	7,122
$S_L = 8$	2,424	4,559	6,134	7,137
$S_L = 9$	2,446	4,586	6,153	7,148
$S_L = 10$	2,464	4,608	6,169	7,158

Aşağıdaki Şekil 4.6’da yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



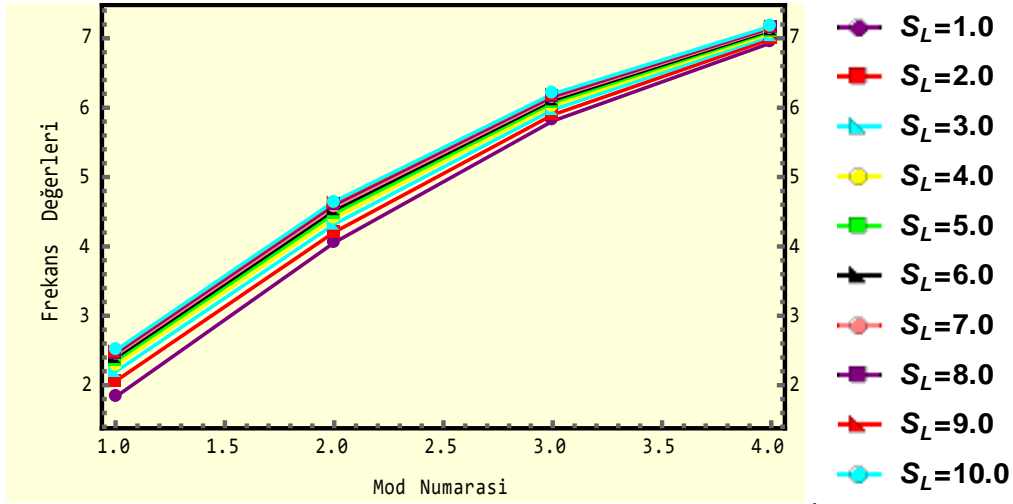
**Şekil 4.6** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=6$ )

Nanoçubuğun bir mesnet koşulunu ( $S_0=7$ ) sabit tutup diğer mesnet koşulunu 1 ile 10 arasındaki değerler vererek oluşturulmuş Çizelge 4.8 aşağıdaki gibidir. Çizelge 4.8 oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.8** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=7$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,831	4,055	5,809	6,937
$S_L = 2$	2,058	4,205	5,897	6,992
$S_L = 3$	2,195	4,320	5,970	7,036
$S_L = 4$	2,286	4,407	6,028	7,072
$S_L = 5$	2,349	4,474	6,074	7,100
$S_L = 6$	2,396	4,526	6,110	7,122
$S_L = 7$	2,432	4,567	6,139	7,140
$S_L = 8$	2,460	4,600	6,162	7,154
$S_L = 9$	2,483	4,627	6,182	7,166
$S_L = 10$	2,501	4,649	6,198	7,175

Aşağıdaki Şekil 4.7’de yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



**Şekil 4.7** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=7$ )

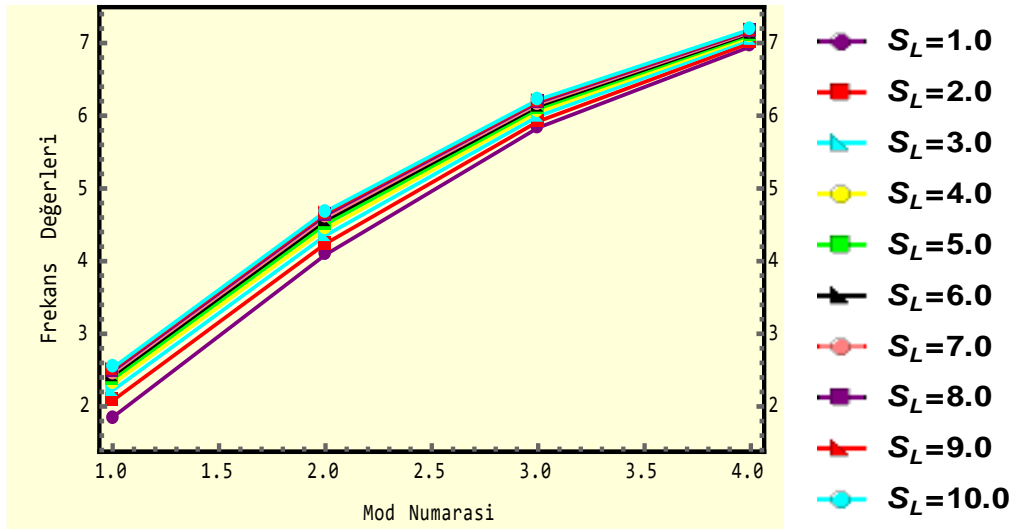


Aşağıda verilmiş olan Çizelge 4.9’da bir mesnet koşulu ( $S_0=8$ ) değeri olarak sabit tutulurken, diğer mesnet koşulu olan  $S_L$  değeri 1 ile 10 değerleri arasında değiştirilmiş ve oluşan değerlerin farklılığı gözlemlenmiştir. Aşağıda verilen Çizelge 4.9 ve Şekil 4.8 oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.9** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=8$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,852	4,089	5,835	6,954
$S_L = 2$	2,081	4,239	5,923	7,007
$S_L = 3$	2,220	4,353	5,995	7,052
$S_L = 4$	2,312	4,441	6,053	7,087
$S_L = 5$	2,376	4,507	6,098	7,115
$S_L = 6$	2,424	4,559	6,134	7,137
$S_L = 7$	2,460	4,600	6,162	7,154
$S_L = 8$	2,489	4,633	6,186	7,168
$S_L = 9$	2,512	4,660	6,205	7,180
$S_L = 10$	2,531	4,682	6,221	7,189

Aşağıdaki Şekil 4.8’de yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



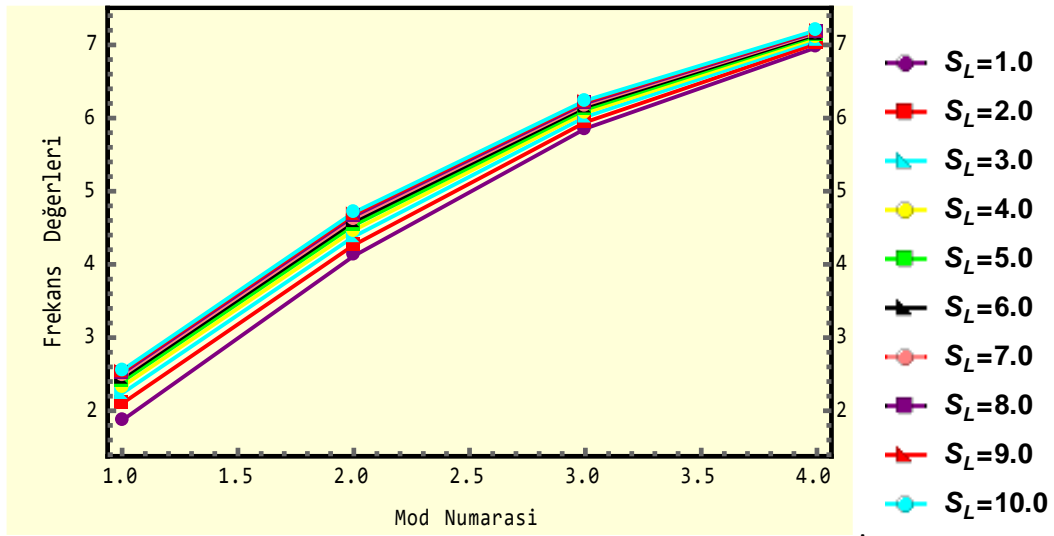
**Şekil 4.8** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=8$ )

Nanoçubuğun bir mesnet koşulunu ( $S_0=9$ ) sabit tutup diğer mesnet koşulunu 1 ile 10 arasındaki değerler vererek oluşturulmuş Çizelge 4.10 aşağıdaki gibidir. Çizelge 4.10 oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.10** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=9$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,869	4,117	5,857	6,967
$S_L = 2$	2,099	4,266	5,944	7,020
$S_L = 3$	2,239	4,381	6,016	7,064
$S_L = 4$	2,332	4,468	6,073	7,099
$S_L = 5$	2,398	4,534	6,118	7,127
$S_L = 6$	2,446	4,586	6,153	7,148
$S_L = 7$	2,483	4,627	6,182	7,166
$S_L = 8$	2,512	4,660	6,205	7,180
$S_L = 9$	2,535	4,686	6,224	7,191
$S_L = 10$	2,554	4,709	6,240	7,201

Aşağıdaki Şekil 4.9’da yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



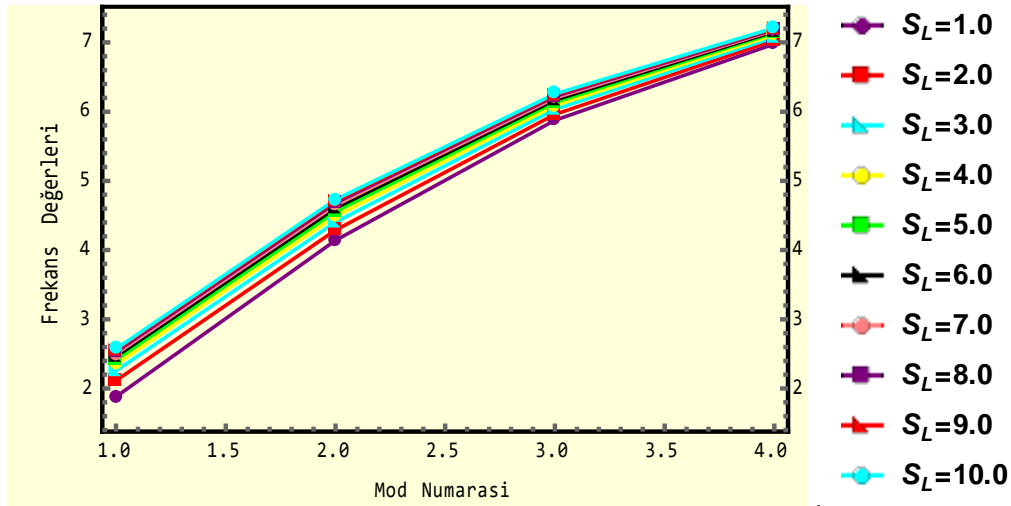
**Şekil 4.9** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=9$ )

Aşağıda oluşturulmuş olan Çizelge 4.11’de bir mesnet koşulu ( $S_0=10$ ) değeri olarak sabit tutulurken, diğer mesnet koşulu olan  $S_L$  değeri 1 ile 10 değerleri arasında değiştirilmiş ve oluşan değerlerin farklılığı gözlemlenmiştir. Aşağıda verilen Çizelge 4.11 ve Şekil 4.10 oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.11** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=10$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,882	4,141	5,875	6,978
$S_L = 2$	2,114	4,289	5,961	7,031
$S_L = 3$	2,256	4,403	6,033	7,074
$S_L = 4$	2,349	4,490	6,089	7,109
$S_L = 5$	2,415	4,557	6,134	7,137
$S_L = 6$	2,464	4,608	6,169	7,158
$S_L = 7$	2,501	4,649	6,198	7,175
$S_L = 8$	2,531	4,682	6,221	7,189
$S_L = 9$	2,554	4,709	6,240	7,201
$S_L = 10$	2,574	4,731	6,255	7,210

Aşağıdaki Şekil 4.10 yukarıdaki tabloda verilen mod değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



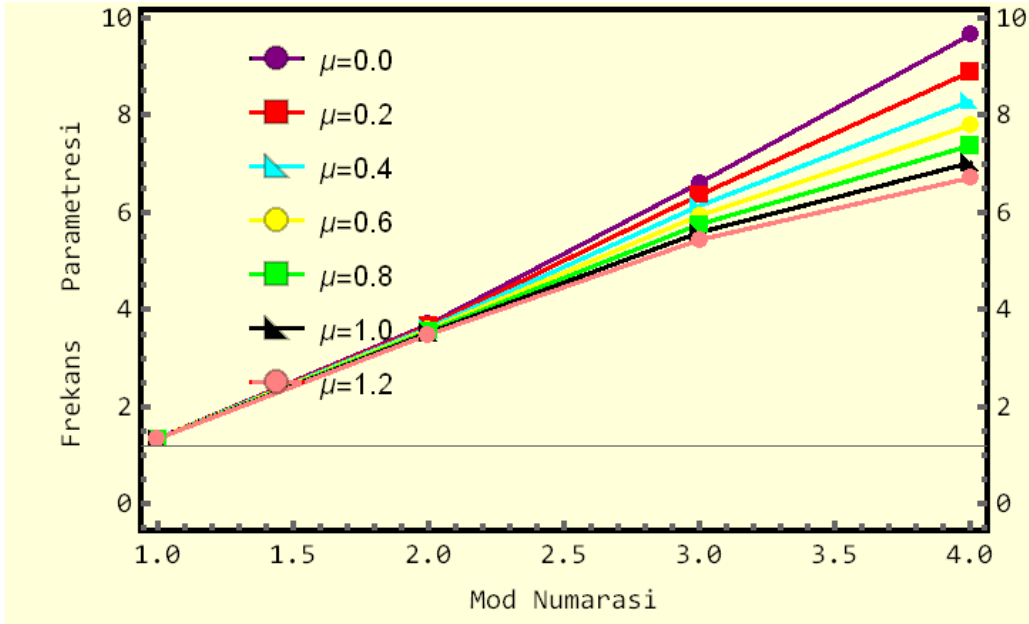
**Şekil 4.10** Mesnet koşullarının titreşim frekansına etkisi ( $S_0=10$ )

Çizelge 4.12’de verilmiş olan tablo değerleri nanoçubuğun mesnet koşullarını ( $S_0=1$ ) ve ( $S_L=1$ ) kabul edilerek hesaplanmıştır. Bu çalışmada  $\mu$  parametresi belirli aralıklarla değiştirilmiş ve bu değişimin aksel hareketin mod değerlerine etkisi Çizelge 4.12 ve Şekil 4.11’deki değerlere olan etkisi gözlemlenmiştir. Bu değerler oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.12** Yerel olmayan parametre değişiminin titreşim frekansına olan etkisi ( $S_0=1$  ve  $S_L=1$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu=0.0$	1,345	3,693	6,605	9,652
$\mu=0.2$	1,345	3,656	6,357	8,892
$\mu=0.4$	1,344	3,620	6,135	8,288
$\mu=0.6$	1,344	3,585	5,935	7,792
$\mu=0.8$	1,344	3,551	5,753	7,375
$\mu=1.0$	1,343	3,518	5,587	7,019
$\mu=1.2$	1,343	3,485	5,435	6,710

Hesaplanmış olan değerler için karşılaştırma şekli aşağıdaki gibidir.



**Şekil 4.11** Yerel olmayan parametrenin titreşim frekansına etkisi

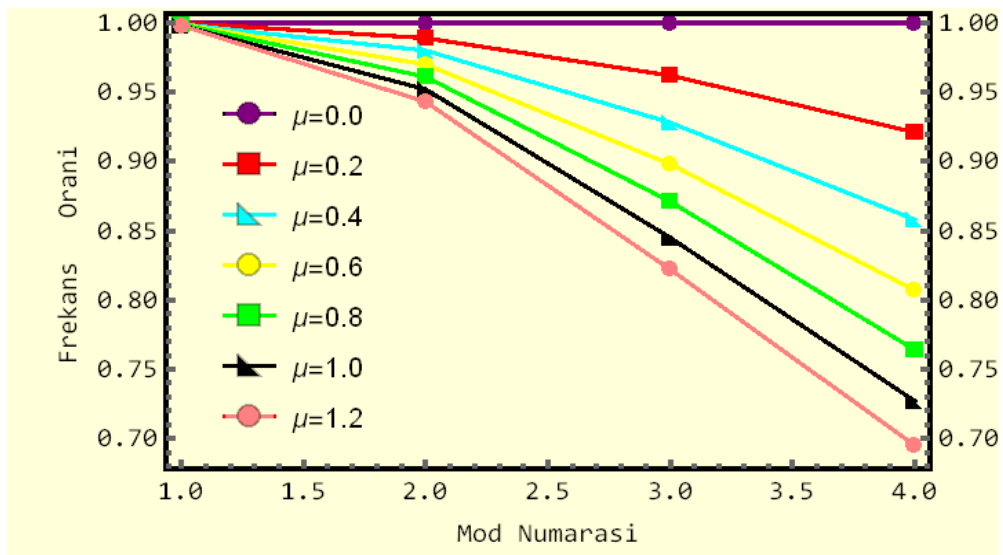
Çizelge 4.13 ve Şekil 4.12’de verilmiş olan çalışmanın yerel olmayan elastisite parametresi ile klasik elastisite parametresi oranlaması sonucu ortaya çıkan değerleri aşağıdaki Çizelge 4.13 ve Şekil 4.12’de verilmiştir.  $\mu$  parametresi belirli aralıklarla değiştirilmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi kullanıldığında yüksek modlarda düşük frekans değerleri elde edilmektedir.

$$\frac{\lambda(\text{non - lokal})}{\lambda(\text{lokal})}$$

**Çizelge 4.13** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0 = S_L = 1$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	1	1	1	1
$\mu = 0,2$	1	0,989	0,962	0,921
$\mu = 0,4$	0,999	0,980	0,928	0,858
$\mu = 0,6$	0,999	0,970	0,898	0,807
$\mu = 0,8$	0,999	0,961	0,871	0,764
$\mu = 1$	0,998	0,952	0,845	0,727
$\mu = 1,2$	0,998	0,943	0,822	0,695

Hesaplanan değerler için oluşturulan grafik şu şekildedir:



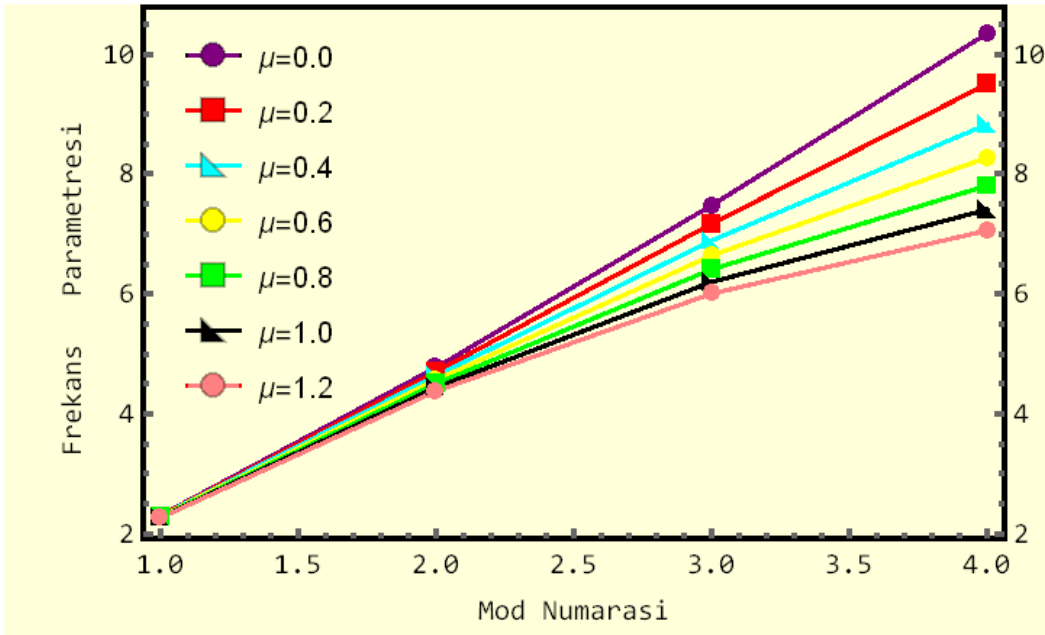
**Şekil 4.12** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi

Aşağıda verilmiş olan Çizelge 4.14 ve Şekil 4.13'deki değerler hesaplanırken nanoçubuğun mesnet koşulları sırasıyla ( $S_0 = 5$ ), ( $S_L = 5$ ) olarak alınmıştır.  $\mu$  parametresi belirli aralıklarla değiştirilmiş ve değişim gözlemlenilmiştir. Bu değerler oluşturulurken  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.14** Yerel olmayan parametre değişiminin titreşim frekansına olan etkisi ( $S_0=5$  ve  $S_L=5$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu=0,0$	2,306	4,775	7,478	10,343
$\mu=0,2$	2,300	4,705	7,170	9,501
$\mu=0,4$	2,294	4,637	6,892	8,828
$\mu=0,6$	2,288	4,571	6,641	8,274
$\mu=0,8$	2,282	4,506	6,411	7,807
$\mu=1,0$	2,276	4,443	6,201	7,407
$\mu=1,2$	2,270	4,381	6,007	7,059

Hesaplanmış olan değerler için karşılaştırma grafiği aşağıdaki gibidir.



**Şekil 4.13** Yerel olmayan parametrenin titreşim frekansına etkisi

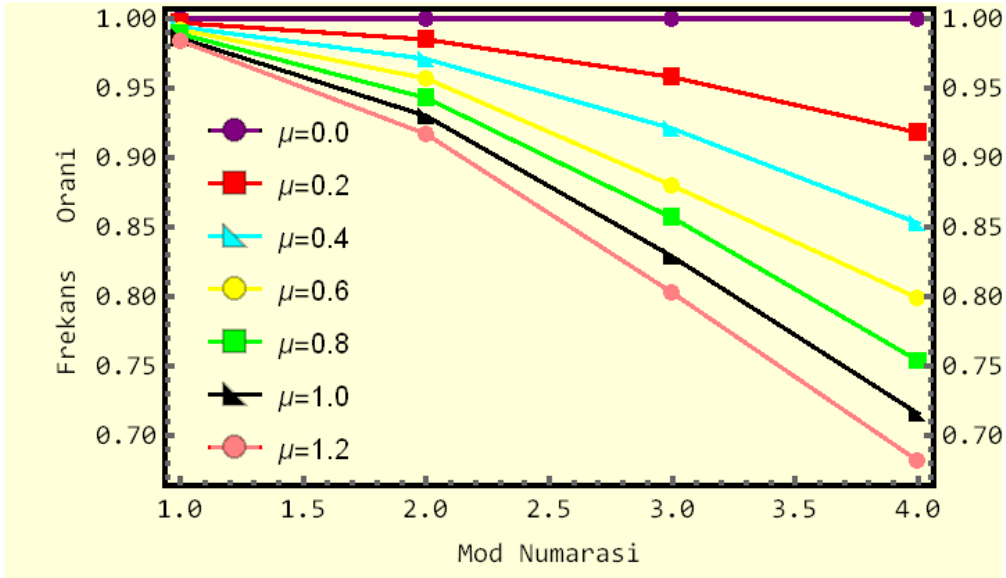
Çizelge 4.15 ve Şekil 4.14’de verilmiş olan çalışmanın yerel olmayan elastisite parametresi ile klasik elastisite parametresi oranlaması sonucu ortaya çıkan değerler aşağıdaki Çizelge 4.15 ve Şekil 4.14’de verilmiştir.  $\mu$  parametresi belirli aralıklarla değiştirilmiş oluşan değerlerin farklılığı gözlemlenilmiştir.

$$\frac{\lambda(\text{non - lokal})}{\lambda(\text{lokal})}$$

**Çizelge 4.15** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0 = S_L = 5$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	1	1	1	1
$\mu = 0,2$	0,997	0,985	0,958	0,918
$\mu = 0,4$	0,994	0,971	0,921	0,853
$\mu = 0,6$	0,992	0,957	0,880	0,799
$\mu = 0,8$	0,989	0,943	0,857	0,754
$\mu = 1$	0,986	0,930	0,829	0,716
$\mu = 1,2$	0,984	0,917	0,803	0,682

Hesaplanmış olan değerler için karşılaştırma grafiği aşağıdaki gibidir.



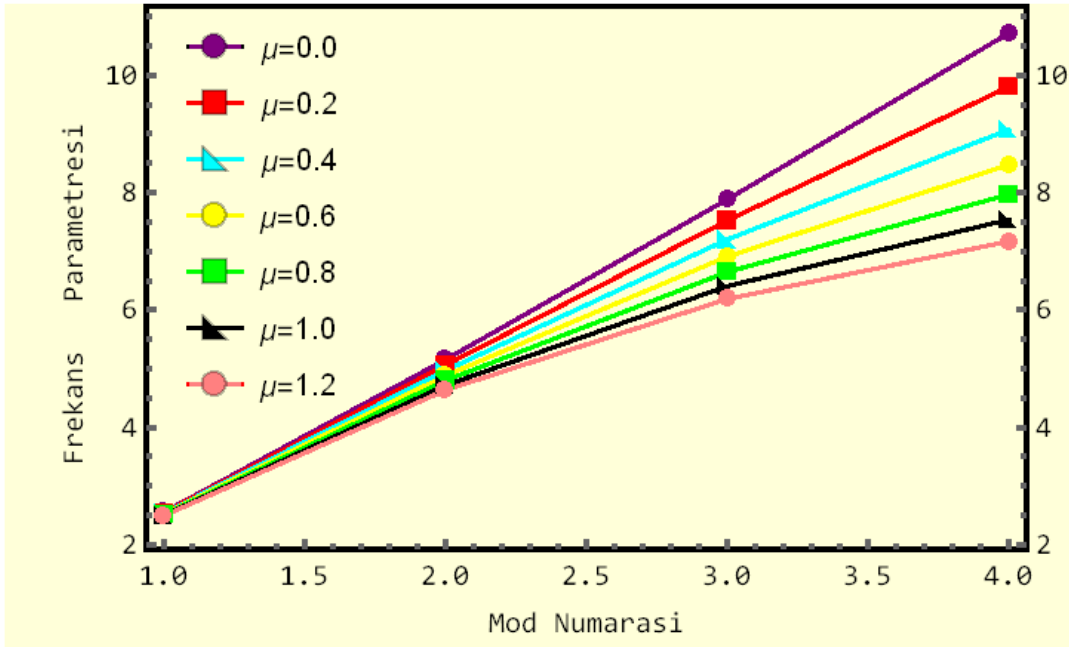
**Şekil 4.14** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi

Aşağıdaki Çizelge 4.16 ve Şekil 4.15’de değerleri oluşturulurken nanoçubuğun mesnet koşulları ( $S_0 = 8$ ) ve ( $S_L = 8$ ) olarak kabul edilmiştir. Verilerin hesaplanması sırasında  $r = 1$  nm ,  $K=0,1$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri baz alınmıştır.  $\mu$  parametresi belirli sabit aralıklarla değiştirilmiştir.

**Çizelge 4.16** Yerel olmayan parametre değişiminin titreşim frekansına olan etkisi ( $S_0=8$  ve  $S_L=8$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu=0,0$	2,549	5,152	7,882	10,720
$\mu=0,2$	2,539	5,059	7,523	9,806
$\mu=0,4$	2,529	4,968	7,200	9,075
$\mu=0,6$	2,519	4,880	6,909	8,474
$\mu=0,8$	2,508	4,795	6,645	7,969
$\mu=1,0$	2,498	4,712	6,405	7,539
$\mu=1,2$	2,489	4,633	6,186	7,168

Hesaplanmış olan değerler için karşılaştırma grafiği aşağıdaki gibidir.



**Şekil 4.15** Yerel olmayan parametrenin titreşim frekansına etkisi



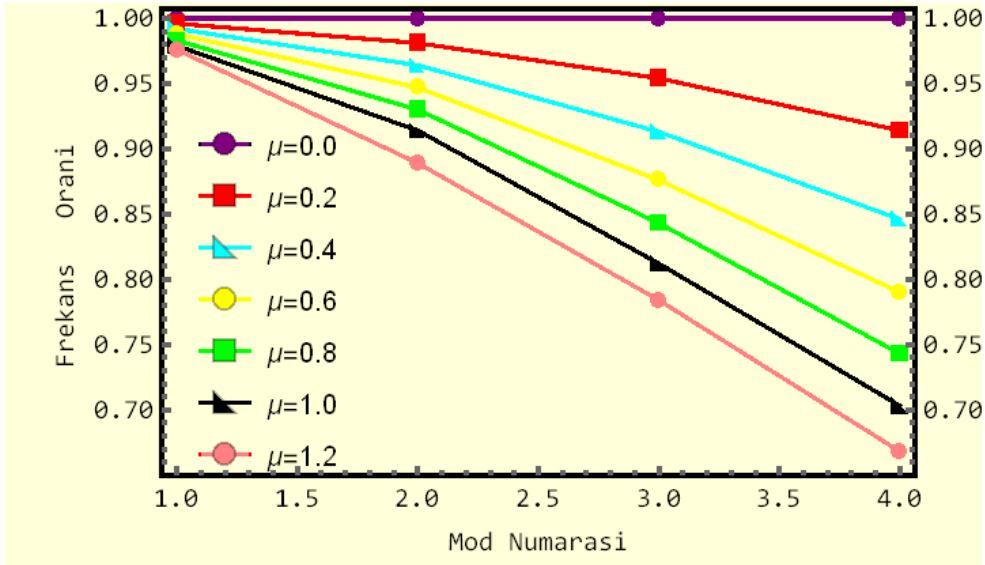
Aşağıda verilen Çizelge 4.17 ve Şekil 4.16 yerel olmayan elastisite teorisi ve klasik elastisite teorisi kullanılarak oluşturulmuştur. Yapılan bu çalışmada  $\mu$  parametresi belirli sabit aralıklarla değiştirilmiş olup oluşan değerlerin farklılığı gözlemlenmiştir.

$$\frac{\lambda(\text{non - lokal})}{\lambda(\text{lokal})}$$

**Çizelge 4.17** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0 = S_L = 8$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	1	1	1	1
$\mu = 0,2$	0,996	0,981	0,954	0,914
$\mu = 0,4$	0,992	0,964	0,913	0,846
$\mu = 0,6$	0,988	0,947	0,876	0,790
$\mu = 0,8$	0,983	0,930	0,843	0,743
$\mu = 1$	0,979	0,914	0,812	0,703
$\mu = 1,2$	0,976	0,889	0,784	0,668

Hesaplanmış olan değerler için karşılaştırma grafiği aşağıdaki gibidir.



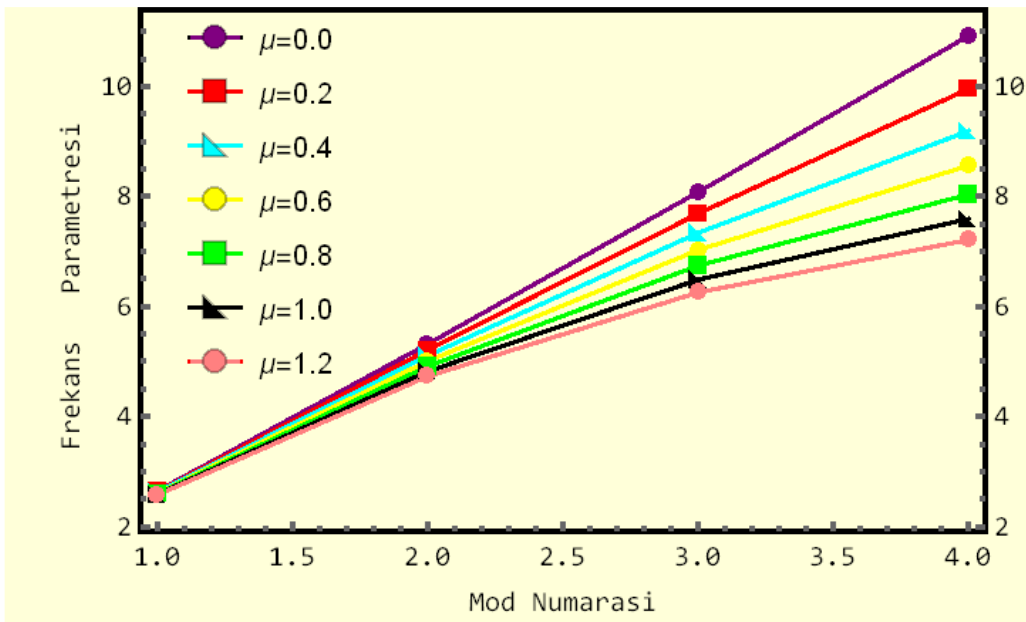
**Şekil 4.16** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi

$\mu$  parametresinin belirli sabit aralıklarla değişimi kullanılarak yapılan bu çalışmada ise nanoçubuğun mesnet koşulları ( $S_0 = 10$ ) ve ( $S_L = 10$ ) olarak kabul edilmiştir. Ortaya çıkan bu değerlerin hesaplanmasında  $r = 1$  nm,  $K=0,1$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri kabul olarak alınmıştır.

**Çizelge 4.18** Yerel olmayan parametre değişiminin titreşim frekansına olan etkisi ( $S_0=10$  ve  $S_L = 10$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu=0,0$	2,646	5,318	8,077	10,918
$\mu=0,2$	2,634	5,211	7,687	9,956
$\mu=0,4$	2,622	5,107	7,338	9,189
$\mu=0,6$	2,610	5,008	7,025	8,561
$\mu=0,8$	2,598	4,912	6,742	8,037
$\mu=1,0$	2,586	4,820	6,487	7,592
$\mu=1,2$	2,574	4,731	6,255	7,210

Hesaplanmış olan değerler için karşılaştırma grafiği aşağıdaki gibidir.



**şekil 4.17** Yerel olmayan parametrenin titreşim frekansına etkisi

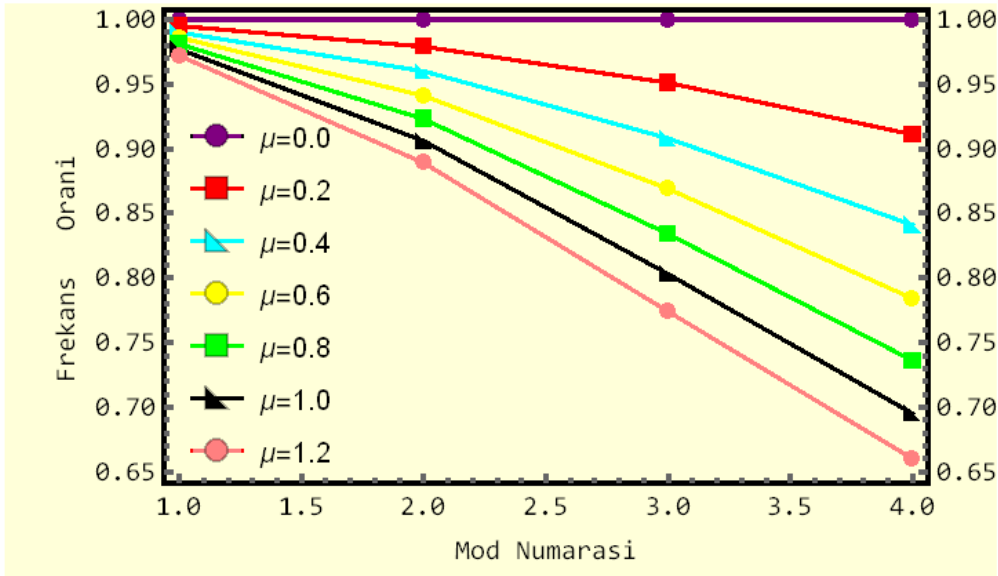
Çizelge 4.19 ve Şekil 4.18 klasik elastisite ve yerel olmayan elastisite oranlaması sonucu ortaya çıkan değerleri aşağıdaki Çizelge 4.19'daki gibidir.  $\mu$  parametresinin değişimi sabit tutulup belirli aralıklarla yapılmıştır. Önceki çalışmalarda da görüleceği üzere yüksek mod değerlerinde düşük frekans değerleri elde edilmiştir.

$$\frac{\lambda(\text{non} - \text{lokal})}{\lambda(\text{lokal})}$$

**Çizelge 4.19** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0 = S_L = 10$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	1	1	1	1
$\mu = 0,2$	0,995	0,979	0,951	0,911
$\mu = 0,4$	0,990	0,960	0,908	0,841
$\mu = 0,6$	0,986	0,941	0,869	0,784
$\mu = 0,8$	0,981	0,923	0,834	0,736
$\mu = 1$	0,977	0,906	0,803	0,695
$\mu = 1,2$	0,972	0,889	0,774	0,660

Hesaplanmış olan değerler için karşılaştırma grafiği aşağıdaki gibidir.



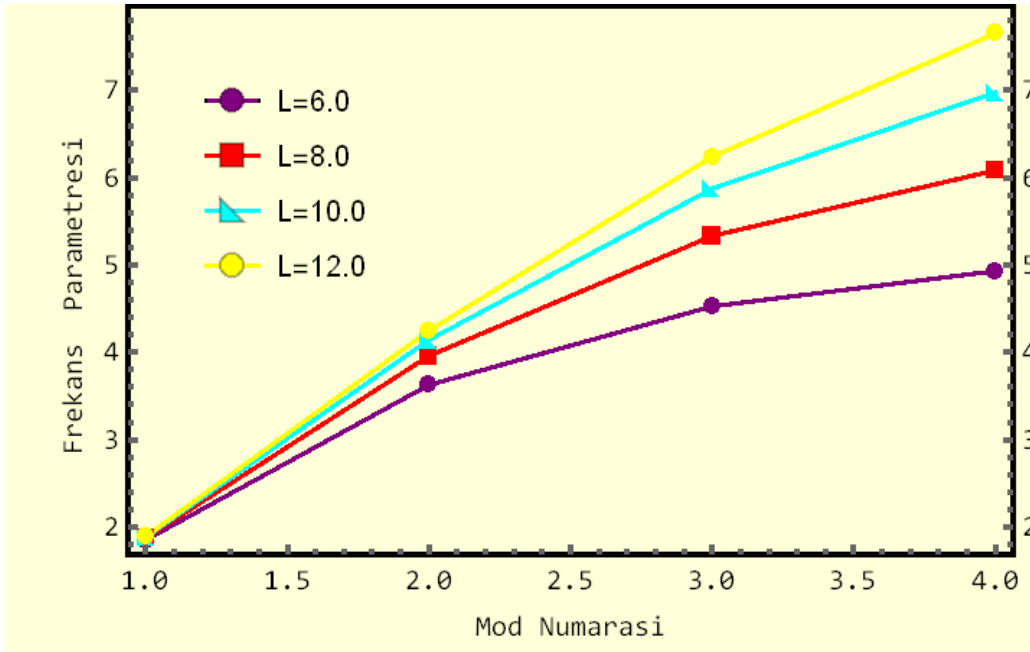
**Şekil 4.18** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi

Aşağıda Çizelge 4.20 ve Şekil 4.19’da verilmiş olan bu çalışma esnasında elastik ortamdaki nanoçubuğun boyu (L) belirli sabit aralıklarla değiştirilmiş ve bu değişim sonuçları, mod değerlerine olan etkisi gözlemlenilmiştir. Yapılan bu çalışma esnasında mesnet koşulları ( $S_0 = 1$ ) ve ( $S_L = 10$ ) olarak,  $\mu = 1,2$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $K=0,1$  parametreleri kabul edilmiştir.

**Çizelge 4.20** Mikroiriş uzunluk değişiminin titreşim frekansına olan etkisi

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
L=6 nm	1.847	3.625	4.526	4.930
L=8 nm	1.871	3.958	5.333	6.085
L=10 nm	1,882	4,141	5,875	6,978
L=12 nm	1.889	4.249	6.242	7.655

Çizelgede oluşturulan değerlerin grafiği şu şekildedir:



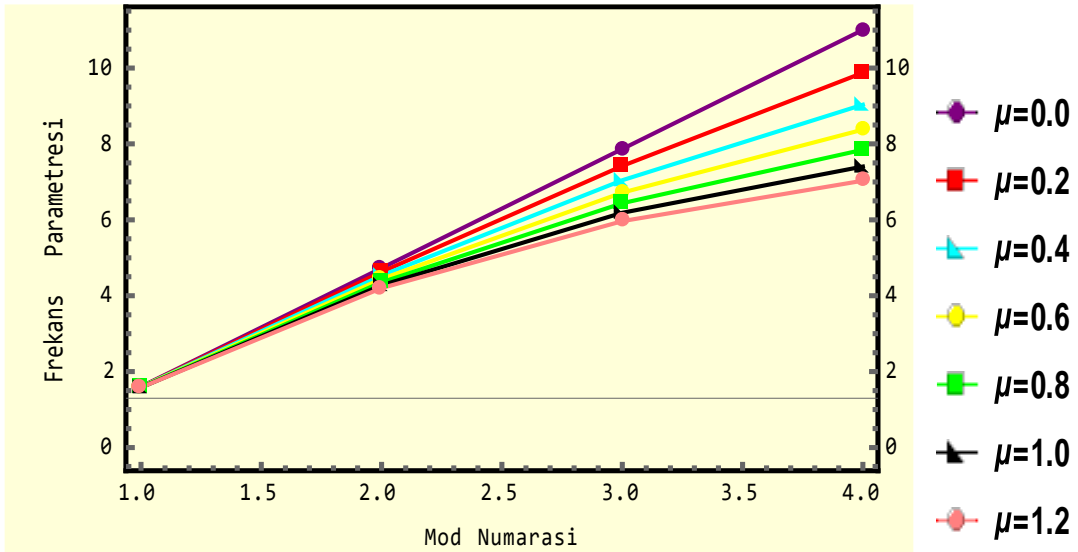
**Şekil 4.19** Mikroirişin uzunluk değişiminin titreşim frekansına etkisi

Çizelge 4.21’de verilmiş olan değerler nanoçubuğun mesnet koşullarını ( $S_0 = 1000000000$ ) ve ( $S_L = 0,000000001$ ) kabul edilerek hesaplamalar yapılmıştır. Diğer parametre değerleri  $L=10$  nm,  $\nu = 0,3$   $K=0,1$  olarak alınmıştır.  $\mu$  parametresi belirli aralıklarla değiştirilmiş olup oluşan değerler Çizelge 4.20 ve Şekil 4.19’da gösterilmiştir.

**Çizelge 4.21** Yerel olmayan parametrenin ve mesnet koşullarının değişiminin titreşim frekansına etkisi

( $S_0 = 1000000000$  ve  $S_L = 0,000000001$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu=0,0$	1,604	4,727	7,866	11,003
$\mu=0,2$	1,600	4,626	7,421	9,874
$\mu=0,4$	1,596	4,531	7,045	9,034
$\mu=0,6$	1,592	4,442	6,720	8,378
$\mu=0,8$	1,589	4,357	6,437	7,847
$\mu=1,0$	1,585	4,278	6,187	7,405
$\mu=1,2$	1,581	4,202	5,964	7,031

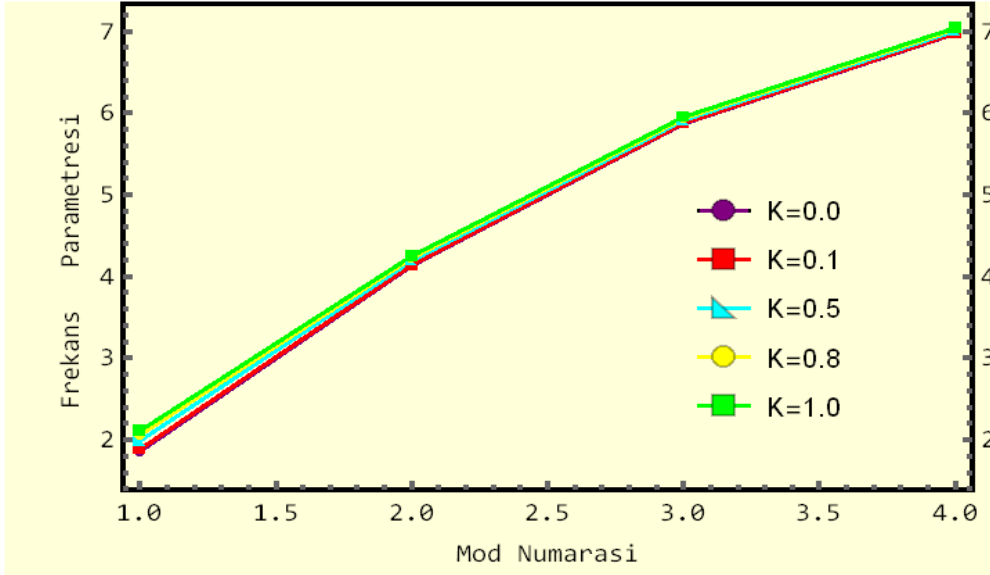


**Şekil 4.20** Yerel olmayan parametrenin ve mesnet koşullarının değişiminin titreşim frekansına etkisi

Çizelge 4.22’de verilmiş olan değerler nanoçubuğun elastik ortam parametresini belirli aralıklarla değiştirilmesiyle ortaya çıkan değerlerdir. Bu çalışmada  $S_0 = 1$ ,  $S_L = 10$   $\mu = 1,2$   $L = 10$  nm  $\nu = 0,3$  değerleri kabul edilmiştir. Elastik ortam parametresi arttıkça titreşim frekansının arttığı gözlemlenmiştir.

**Çizelge 4.22** Elastik ortam parametresinin değişiminin titreşim frekansına olan etkisi

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
K=0,0	1,856	4,129	5,867	6,971
K=0,1	1,882	4,141	5,875	6,978
K=0,5	1,986	4,189	5,909	7,006
K=0,8	2,060	4,224	5,934	7,028
K=1,0	2,108	4,248	5,951	7,042



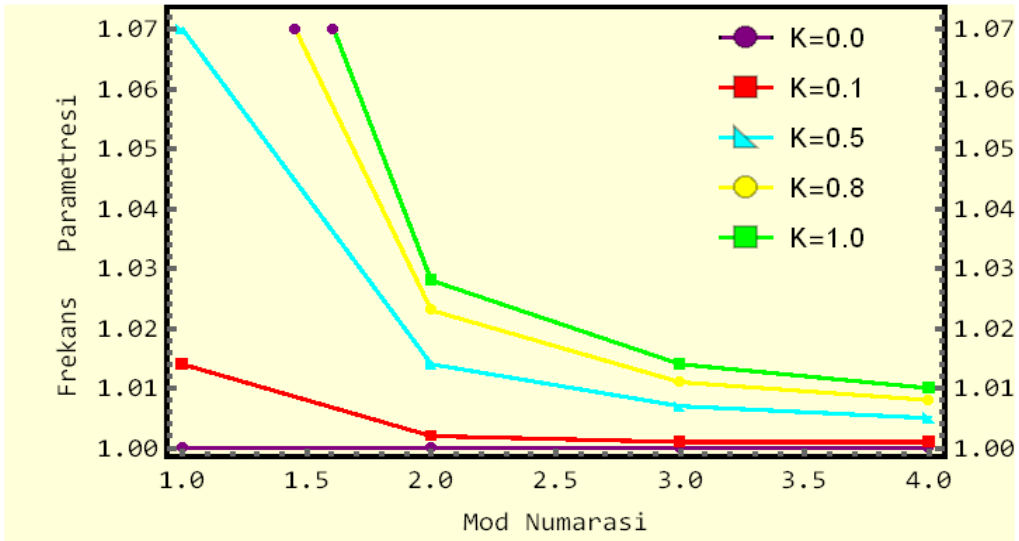
**Şekil 4.21** Elastik ortam parametre değişiminin titreşim frekansına etkisi

Çizelge 4.23 ve Şekil 4.22’de verilmiş olan çalışmada oluşturulan değerler elastik ortam parametresinin belirli aralıklarla değişimi ile hesaplanılmıştır. Elastik ortam parametresinin artışının titreşim frekans değerlerini arttırdığı gözlemlenilmiştir. Yüksek modlarda titreşim frekansı değerleri daha düşük olarak gözlemlenmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi kullanıldığında hesaplanan değerlerin klasik elastisite teorisine oranla daha yüksek olduğu gözlemlenilmiştir.

$$\frac{K(\text{non - lokal})}{K(\text{lokal})}$$

**Çizelge 4.23** Elastik ortam parametresinin değişiminin titreşim frekansına olan etkisi

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
K = 0,0	1	1	1	1
K = 0,1	1,014	1,002	1,001	1,001
K= 0,5	1,070	1,014	1,007	1,005
K = 0,8	1,109	1,023	1,011	1,008
K = 1,0	1,135	1,028	1,014	1,010

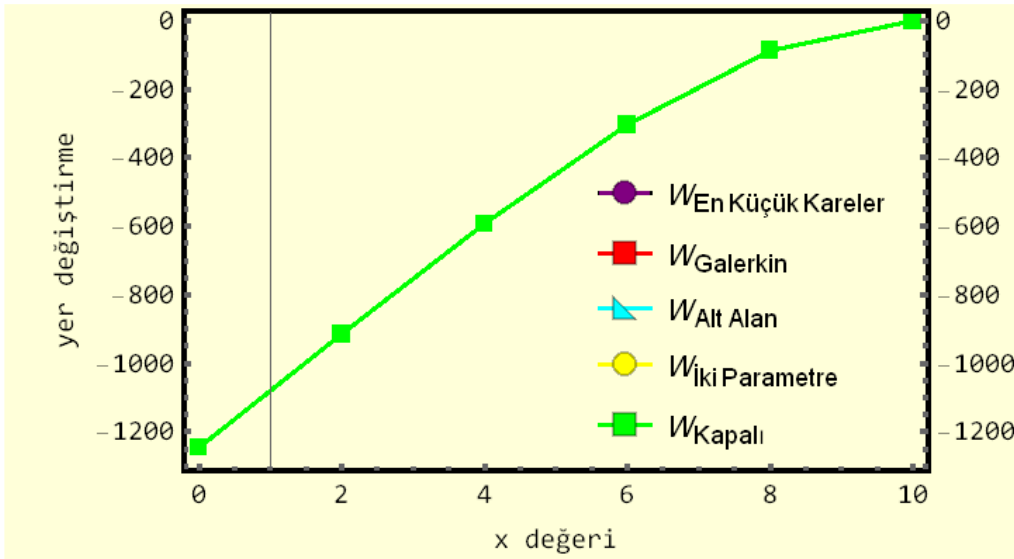


**Şekil 4.22** Elastik ortam parametre değişiminin yerel olmayan elastisite teorisi kullanıldığında titreşim frekansına etkisi

**Çizelge 4.24** Çalışmada kullanmış olduğumuz üç parametrelî çözümün ağırlıklı artık yöntemleri ile hesaplanmış değerlerin karşılaştırılması

	x=0	x=2	x=4	x=6	x=8	x=10
$W_{\text{Subdomain}}$	-1246,26	-914,59	-592,223	-303,091	-87,0721	0
$W_{\text{Galerkin}}$	-1246,26	-914,59	-592,223	-303,091	-87,0721	0
$W_{\text{Least Sq}}$	-1246,26	-914,59	-592,223	-303,091	-87,0721	0
$W_{\text{Two Paramater}}$	-1246,26	-914,59	-592,223	-303,091	-87,0721	0
$W_{\text{Kapalı}}$	-1246,26	-914,59	-592,223	-303,091	-87,0721	0

Çizelge 4.24’de verilen farklı ağırlıklı artık yöntemleri kullanılarak aksenal yüklenmiş bir nanoçubuğun yer değiştirme değerleri verilmiştir. Farklı çözüm yöntemleri uygulanarak hesaplanan değerlerin ve aynı zamanda hesaplanan kapalı çözüm değerinin aynı olduğu gösterilmiştir.



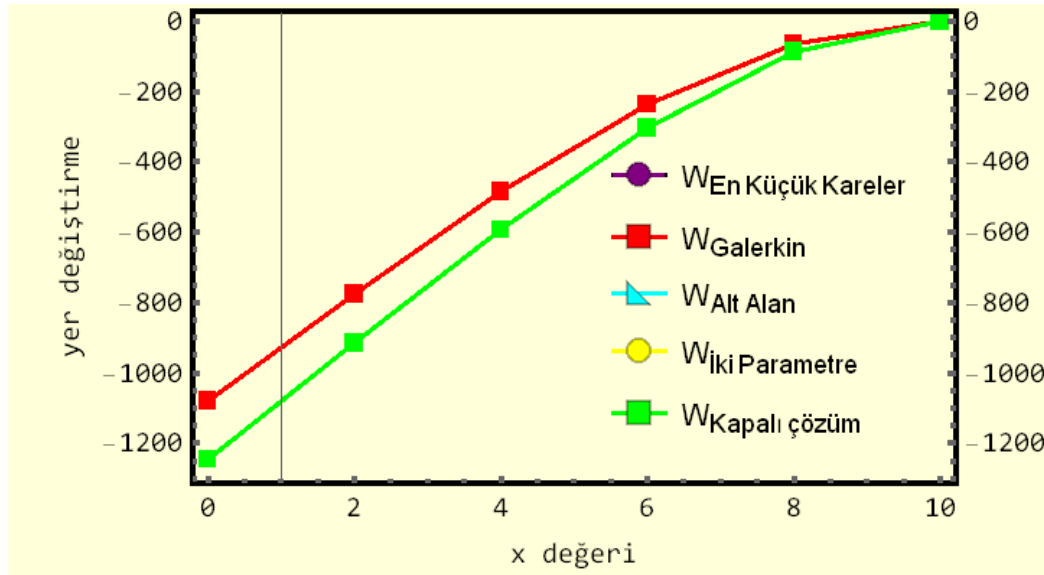
**Şekil 4.23** Üç parametrelî çözümün ağırlıklı artık fonksiyon çözüm yöntemleri ile karşılaştırılması



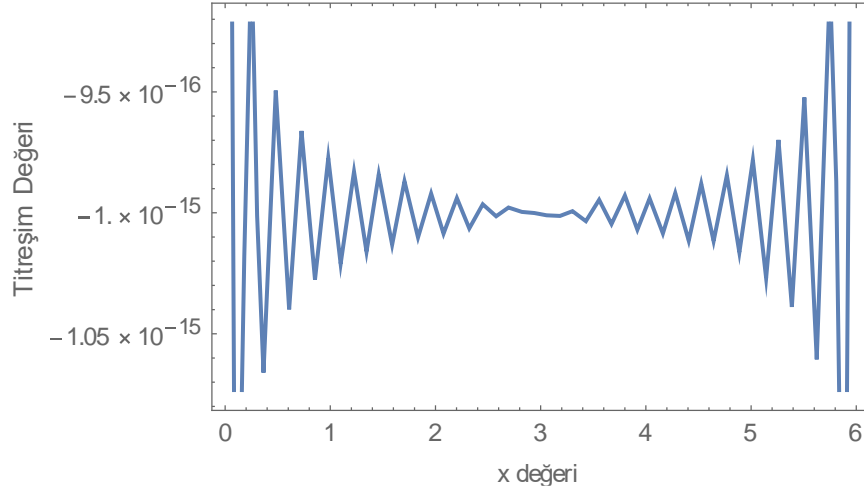
**Çizelge 4.25** İki parametrelî çözümün ağırlıklı artık yöntemleri ile hesaplanmış değerlerinin karşılaştırılması

	x=0	x=2	x=4	x=6	x=8	x=10
$W_{\text{Subdomain}}$	-1246,26	-914,59	-592,223	-303,091	-87,0721	0
$W_{\text{Galerkin}}$	-1080,09	-776,33	-484,546	-236,623	-64,473	0
$W_{\text{Least Sq}}$	-1246,26	-914,59	-592,223	-303,091	-87,0721	0
$W_{\text{Two Paramater}}$	-1246,26	-914,59	-592,223	-303,091	-87,0721	0
$W_{\text{Kapalı}}$	-1246,26	-914,59	-592,223	-303,091	-87,0721	0

Çizelge 4.25’de verilen farklı ağırlıklı artık yöntemleri kullanılarak aksenal yüklenmiş bir nanoçubuğun yer değıştirme değerleri verilmiştir. Önceki çalışmada, üç parametrelî çözüm hesaplamasında tüm değerler aynı çıkarken iki parametrelî çözümde tüm değerlerin aynı çıkmadığı gözlemlenmiştir.



**Şekil 4.24** İki parametrelî çözümün ağırlıklı artık fonksiyon çözüm yöntemleri ile karşılaştırılması



**Şekil 4.25** Eksenel yaylarla tutulmuş bir nanokirişin titreşim grafiği. Analizde kullanılmış olan parametreler:  $L=6$  nm,  $\nu = 0,3$ ,  $K=0,1$ ,  $\mu = 1,2$ . (Yay kuvvetleri sonsuz büyüklükte kabul edilmiştir.)

## 5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışma kapsamında; mikrokirişin aksel statik analizi, eğilme analizi ve yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak elastik ortam altında Rayleigh modeli ile tanımlanmış bir nanoçubuğun genel elastik sınır koşullarındaki serbest titreşim hareketi incelenmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde Eringen tarafından önerilen yerel olmayan elastisite teorisine göre, aksel lineer yüklenmiş bir kirişin aksel statik analizi ağırlıklı artıklar yöntemleriyle incelenmiştir. Bilindiği üzere literatürde birçok ağırlıklı artık yöntemi bulunmaktadır. Bu çalışma kapsamında En Küçük Kareler, Alt Alan, Galerkin ve İki Parametre çözüm yöntemleri kullanılmıştır ve bu yöntemler kullanılırken iki parametrelili ve üç parametrelili polinomlar şeklinde alınmış olup kapalı çözüme yakınsaklığı bir problem üzerinde tartışılmıştır. Kullanılan tüm ağırlıklı artık yöntemlerinde, üç parametrelili çözümde bulunan sonuçlar kapalı çözüme eşit sonuçlar vermiştir. İki parametrelili çözümde ise bazı yöntemlerin kapalı çözüme yakın fakat eşit olmayan sonuçlar verdiği görülmüştür. Bunun nedeni olarak her yöntemin kendi içinde ağırlıklı artığı problem içinde bulundurma şekli farklıdır.

Çalışmanın ikinci bölümünde ise elastik ortam altında Rayleigh modeli ile tanımlanmış nanoçubuğun hareketi incelenirken ilk olarak yerel olmayan elastisite teorisinin diferansiyel dönüşürülmüş denklemi, gerilme için literatürde bulunduğu şekliyle yazılmıştır. Bu gerilme denklemi kullanılarak Rayleigh modelindeki nanoçubuğun hareket denklemi oluşturulmuştur. Bu çalışma kapsamında oluşturulan model her bir sınır koşulu için deforme olabilen veya rijit olan herhangi bir sınır koşulu için çözüm yapılabilmektedir. Sınır koşulları deforme olabilir olduğundan bu diferansiyel denklemin kapalı çözümünün yapılabilmesi ayrı ayrı mümkündür ancak Stoke Dönüşümü kullanılarak genel bir öz değer problemi oluşturulması amaçlanmıştır ve bu elastik sınır koşullarına çok küçük değerler verilerek serbest uçlu bir nanoçubuğun titreşim frekansları bulunabilmektedir. Buna benzer olarak yay sabitlerinin büyükleri değiştirilerek, ankastre mesnetlenmiş çubuğun titreşim frekansları da bulunmuştur.

Titreşim frekansları incelenmesinde çalışma kapsamında belirli parametrelerin değerlerinde değişiklikler yapılmış ve bu değişikliklerin frekans değerlerini ne şekilde etkilediği tablo ve grafikler halinde sunulmuştur. Değiştirilen parametreler ve değiştirildiğinde oluşturulan etkiler şu şekildedir:

- Mesnet koşullarının değişiminin ( $S_0$  ve  $S_L$ ) titreşim frekanslarına etkisi incelenmiştir. Bu inceleme sırasında yay sabiti değerlerinin artması ile birlikte titreşim frekans değerlerinin de arttığı gözlemlenmiştir. Bu gözlemler ilk dört mod değeri üzerinden yapılmıştır.
- Yerel olmayan parametre ( $\mu$ ) değişiminin titreşim frekans değerlerine olan etkisi incelenmiştir. Bu incelemede ise yerel olmayan parametre ( $\mu$ ) değeri arttıkça titreşim frekans değerlerinin azaldığı ilk dört mod değeri üzerinde gözlemlenmiştir. Yerel olmayan parametre değeri belirli aralıklarla değiştirilmiştir.
- Nanoçubuğun titreşim frekans değerlerinin elastik ortam parametresi ( $K$ ) değişimi ile ne şekilde değişim göstereceği incelenmiştir. Bu incelemede ise elastik ortam parametresi ( $K$ ) arttıkça ilk dört mod değeri için titreşim frekans değerlerinin arttığı gözlemlenmiştir. Bu incelemede nanoçubuğun mesnet koşulları ( $S_0=1$  ve  $S_L=10$ ) şeklinde alınmıştır.
- Nanoçubuğun uzunluğunun belirli aralıklarla değişiminin titreşim frekans değerlerine olan etkisi ilk dört mod değeri için gözlemlenmiştir. Bu gözleme de ise uzunluk artışı olduğunda titreşim frekans değerlerinin de arttığı gözlemlenmiştir.
- Titreşim frekans değerlerine etkisi olabilecek diğer koşul olarak ise yay sabitlerine sonsuz büyüklükte ve sonsuz küçüklükte değerler verilerek ve bu değerler verildiğinde yerel olmayan parametreyi belirli aralıklarla değiştirerek oluşacak titreşim frekans değerleri gözlemlenilmiştir. Bu incelemede nanoçubuğun mesnet koşulları ( $S_0 = 1000000000$  ve  $S_L = 0,000000001$ ) olarak alınmış olup yerel olmayan parametre değeri arttıkça titreşim frekans değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise bir mikrokirişin eğilme analizi (Akgöz,2010) tarafından önerilen değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile eğilme analizi gerçekleştirilmiştir. Analiz yapılırken bir önceki kısımda tanımları verilmiş olan ağırlıklı artıklar yöntemleri ile çözümler yapılmıştır. İlk olarak değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre artık fonksiyon tanımlanmıştır. Diferansiyel denklemin derecesine uygun olarak üç bilinmeyenli ve dördüncü dereceden bir yer değiştirme fonksiyonu önerilmiş olup sınır koşullarının sağlanmasına dikkat edilmiştir. Önerilen yer değiştirme fonksiyonu kullanılıp artık fonksiyon elde edilmiştir. Her bir yöntemin artık fonksiyon hesaplamaları için yapılan kabuller dikkate alınarak problemin çözümü gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemlerin tamamında kapalı çözümü olan yer değiştirme fonksiyonları elde edilmiştir.

Bulgular bölümünde yapılmış olan çalışmalar kapsamında:

Nanoçubuğun iki ucunda bulunan yay kuvvet değerleri (mesnet koşulları) arttıkça titreşim frekans değerinin arttığı, yerel olmayan parametrenin artması ile titreşim frekans değerlerinin azaldığı, elastik ortam parametresinin değeri arttıkça titreşim frekans değerinin arttığı ve dolayısıyla rijitliğinde arttığı gözlemlenilmiştir ve bulunan bu sonuçların literatürle uyumlu olduğu görülmüştür. Çalışmada nanoçubuğun boyutunun küçük değerler ile arttırılması ile frekans değerinde artış gözlemlenilmiştir bunun nedeni olarak ise çalışmada kullanılmış olan yerel olmayan parametrenin etkide bulunduğu düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR

**Akgöz, B., Civalek, Ö. 2010a.** Analysis of microtubules based on strain gradient elasticity and modified couple stress theories. *Advances in Vibration Engineering*, in press.

**Akgöz, B., Civalek, Ö. 2010b.** Buckling analysis of Cantilever Carbon Nanotubes Using the Strain Gradient Elasticity and Modified Couple Stress Theories. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Accept for Publication.

**Akgöz, B., Civalek, Ö. 2016.** Bending analysis of embedded carbon nanotubes resting on an elastic foundation using strain gradient theory. *Acta Astronautica*, 119: 1-12.

**Anthoine, A. 2000.** Effect of couple-stresses on the elastic bending of beams. *International Journal of Solids and Structures*, 37: 1003-1018.

**Avcar, M., Mohammed, W.K.M. 2018.** Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation. *Arabian Journal of Geosciences*, 11(10): 232.

**Aydogdu, M. 2009.** a general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration. *physica e: low-dimensional systems and nanostructures*, 41(9): 1651-1655.

**Civalek, Ö., Akgöz, B. 2010.** Free vibration analysis of microtubules as cytoskeleton components: Nonlocal Euler-Bernoulli beam modeling. *Scientica Iranica, Transaction B- Mechanical Engineering*, 17(5): 367-375.

**Civalek, Ö., Demir, Ç., Akgöz, B. 2010.** Free vibration and bending analyses of cantilever microtubules based on nonlocal continuum model. *Mathematical and Computational Applications*, 15: 289-298.

**Cosserat, E., Cosserat, F. 1909.** *Theorie de Corps deformables*. Editions A. Hermann, Paris.

**I. Ecsedi, A. Baksa (2017)** Free axial vibration of nanorods with elastic medium interaction based on nonlocal elasticity

**Eringen, A.C., Şuhubi, E.S. 1964a.** Nonlinear theory of simple microelastic solid, I. *International Journal of Engineering Science*, 2: 189–203.

**Eringen, A.C., Şuhubi, E.S. 1964b.** Nonlinear theory of simple microelastic solid, II. *International Journal of Engineering Science* 2: 389–404.

**Eringen, A.C. 1966.** Linear theory of Micropolar elasticity. *Journal of Mathematical Mechanics*, 15: 909-923.

**Eringen, A.C. 1983.** On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, 54: 4703–4710.

**Fu, Y., Zhang, J. 2010.** Modeling and analysis of microtubules based on a modified couple stress theory. *Physica E*, 42: 1741-1745.

**Fung, Y. C. 1965.** Foundations of solid mechanics. Prentice-Hall Inc. New Jersey.

**Gao, X.-L., Park, S.K. 2007.** Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *International Journal of Solids and Structures* 44: 7486–7499.69

**Hao, M.J., Guo, X.M., Wang, Q. 2010.** Small-scale effect on torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29 (1): 49-55.

**Hu, Y.G., Liew, K.M., Wang, Q., He, X.Q., Yakobson, B.İ. 2008.** Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56: 3475-3485.

**Hung, E.S., Senturia, S.D. 1999.** Extending the travel range of analog-tuned electrostatic actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 8 (4): 497-505.

**Hutchinson, J.R. 2001.** Shear coefficients for Timoshenko beam theory, *Journal of Applied Mechanics*, 68: 87-92.

**Işık, Ç. 2011.** Nano ve mikro yapıların yerel olmayan elastisite teorisi ile eğilme ve titreşim hesabı, *Yüksek Lisans Tezi*, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.

**Işık, H. 2013.** Çift duvarlı karbon nanotüplerin bir ucu ankastre diğer ucu yaylı durumda çözümünün incelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

**Jr. Poole, C. P., Owens, F. J. 2003.** Introduction to nanotechnology, *John Wiley & Sons, Inc*, New York.

**Jones, G., Jones, M. 1997.** Analysis of beams on elastic foundations, *Telford*, London.

**Jones, M. 1997.** Analysis of beams on elastic foundations: Using finite difference theory, *Thomas Telford*, London.

- Kadıoğlu, H., Yaylı, M . Ö. 2017.** Buckling Analysis of Non-Local Timoshenko Beams by Using Fourier Series. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 9 (4): 89-99.
- Kadıoğlu, H. G. 2018.** Timoshenko kirişlerinin genel elastik sınır koşullarında titreşim analizi. *Yüksek Lisans Tezi*, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Bursa.
- Kao, R. K. C. 1968.** Beams on non-linear elastic foundation, *University of South Carolina*, Columbia.
- Kapoor, M. 2012.** Advances in nanotechnology, *Oxford Book Company*, Hindistan.
- Karaşin, A. H., Gülkan, P. 2008.** Elastik zeminlere oturan plakların sonlu ızgara yöntemi ile yaklaşık çözümü, *İMO Teknik Dergi*, 293: 4445-4454.
- Karkare, M. 2008.** Nanotechnology: Fundamentals and applications, *I. K International Publishing House Pvt. Ltd*, New Delhi.
- Karlıcı, D., Jovanovic D., Kozic, P., Cajic, M. 2015.** Thermal and magnetic effects on the vibration of a cracked nanobeam embedded in an elastic medium, *Journal of Mechanics of Material and Structures*, 10(1): 43-62.
- Kaya, M. O. 2006.** Free vibration analysis of a rotating Timoshenko beam by differential transform method. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 78(3): 194-203.
- Kim, H. K., Kim, M. S. 2001.** Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using Fourier series. *Journal of Sound and Vibration*, 245(5): 771-784.
- Kılıç, V. 2006.** Elastik zemine oturan dikdörtgen plakların titreşimleri, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- King, V.B. 2007.** Nanotechnology Research Advances, *Nova Science Publishers*, New York.
- Kişin, E. 2006.** Elastik zemine oturan çelik lif ve çelik hasır donatılı beton plakların mekanik davranışı, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Bilim Dalı, İstanbul.
- Kocatürk, T., Şimşek, M. 2005.** Free vibration analysis of elastically supported Timoshenko beams. *Sigma*, 3: 79-93.
- Koç, Y. 2006.** Euler Bernoulli ve Timoshenko teorileri kullanılarak basit mesnetli kirişlerin serbest titreşimlerinin incelenmesi. *Yüksek Lisans Tezi*, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, İstanbul. 53



- Kösegil, A. 2010.** Yerel olmayan elastisite teorisinde açılı ve ritz yöntemlerinin nanoteknolojiye uygulanması, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Kumar, B.M., Sujith, R.I. 1997.** Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods, *Journal of Sound and Vibration*, 207(5): 721-729.
- Kurt, E. L., Medikonda, M. 2012.** Understanding the nanotechnology revolution, *Wiley*, New York.
- Kutlu, E. 2007.** Elastik zemine oturan çelik lif donatılı beton plakların deneysel analizi ve genel bir değerlendirme, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Deprem Mühendisliği Bilim Dalı, İstanbul .
- Kutucu, B. 2010.** Nanoteknoloji ve çift duvarlı karbon nanotüplerin incelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Mühendisliği Bilim Dalı, İstanbul .
- Kuyumcu, Z. 2011.** Elastik zemine oturan kablolu köprülerin stokastik analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Bilim Dalı, Trabzon.
- Lai, Y.C. 1990.** Dynamic response of beams on elastic foundation, *University of Missouri*, Columbia.
- Leissa, A.W., Qatu, M.S. 2011.** Vibration of continuous systems, *McGraw Hill*, Yeni Delhi.
- Li, C. Y., Chou, T. W. 2003.** A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes, *Int. J. Solids Struct.*, 40: 2487-2499.
- Lin, S. C., Hsiao, K. M. 2001.** Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration*, 240(2): 303-322.
- Lin, K.K. 1970a.** Bending of a constrained circular beam on an elastic foundation, *Kansas State University*, Kansas.
- Lin, K.K. 1970b.** Beams on one-way elastic foundations, *Kansas State University*, Kansas.
- Liu, T. W. 1988.** A generalized beam on elastic foundation model for fracture studies, *University of Hong Kong*, Pok Fu Lam.
- Loya, J., Puente, J. L., Zaera, R., Sáez, J. F. 2009.** Free transverse vibrations of cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model, *Journal of Applied Physics*, 105,044309.
- Maddox, D. 2005.** Nanotechnology, *Blackbirch Press*, Woodbridge.

- Mahler, E., Seiler, D. 2011.** Carbon nanotube and nanocomposite research, *Nova Science Publishers*, New York.
- Malik, M., Dang, H. H. 1998.** Vibration analysis of continuous systems by differential Transformation, *Applied Mathematics and Computation*, 96(1): 17-26.
- Melerski, E.S. 2000.** Design analysis of beams, circular plates and cylindrical tanks on elastic foundations, *A.A.Balkema*, Rotterdam.
- Menceloğlu, Y., Kırca, M. 2008.** Uluslararası rekabet stratejileri: nanoteknoloji ve Türkiye, TÜSİAD Rekabet Stratejileri Dizisi 11, TÜSİAD, İstanbul.
- Meyyappan, M. 2004.** Carbon nanotubes: properties and applications, *CRC Press*, London.
- Mindlin R.D., 1964,1965.** Archive for Rational Mechanics and Analysis
- Mindlin R.D. ve Tiersten H.F., 1962.** Effects of couple-stresses in linear elasticity
- Morris, J.E., Iniewski, K. 2013.** Graphene, carbon nanotubes and nanostructures: techniques and applications, *CRC Press*, London.
- Nakamoto, T.A. 1976.** Deflections of a beam on an elastic foundation, *California State University*, Long Beach.
- Nugent, G. 1975.** Beams and circular plates on elastic foundation, *Trinity College*, Dublin.
- O'Connell, M.J. 2006.** Carbon nanotubes: properties and applications, *CRC Press*, London.
- Orkov, G., Saxenhofer, H. 1967.** Beams on elastic foundation, *California Department of Water Resources*, Sacramento.
- Oruçoğlu, K. 1991.** Yerel olmayan elastisite de çatlak problemi. *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Özdemir, Ö. 2009.** Elastik zemine oturan kirişlerin sonlu titreşimi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Özdemir, O. O., Kaya, M. O. 2010.** Vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam using DTM. *Meccanica*, 45(1): 33-42.
- Özgan, K., Daloğlu, A.T. 2011.** Elastik zemine oturan kalın plaklar için kayma kilitlenmesiz bir sonlu eleman modeli, *İMO Teknik Dergi*, 346: 5341-5358.

- Özgan, K., Daloğlu A.T. 2005.** Elastik zemine oturan plaklar için etkili zemin derinliği, Antalya Yöresinin İnşaat Mühendisliği Sorunları Kongresi, :635-647
- Phadikar, J.K., Pradhan, S.C. 2010.** Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Computational materials science*, 49(3): 492-499.
- Pradhan, S.C. 2012.** Nonlocal finite element analysis and small scale effects of CNTs with Timoshenko beam theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 50: 8-20.
- Pradhan, K.K., Chakraverty, S. 2013.** Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method. *Composites Part B: Engineering*, 51: 175-184.
- Rao, S.S. 2007.** Vibration of continuous systems. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 720 pp.
- Reddy, J.N. 1993.** An introduction to the finite element method (2nd ed.). McGraw-Hill, New York, 684 pp.
- Reddy, J.N. 2002.** Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics (2nd ed.). John Wiley & Sons, New York. 72
- Reddy, J.N., Pang, S.D. 2008.** Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2): 023511.
- Thai, H.T., Vo, T.P. 2012.** Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1): 57-66.
- Togun, N., Bağdath, S. 2016.** Nonlinear vibration of a nanobeam on a Pasternak elastic foundation based on non-local Euler-Bernoulli beam theory. *Mathematical and Computational Applications*, 21(1): 3.
- Tounsi, A., Benguediab, S., Adda, B., Semmah, A., Zidour, M. 2013.** Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes. *Advances in nano research*, 1(1): 1-11.
- Tounsi, A., Heireche, H., Berrabah, H.M., Benzair, A., Boumia, L. 2008.** Effect of small size on wave propagation in double-walled carbon nanotubes under temperature field. *Journal of Applied Physics*, 104(10): 104301.
- Uzun, B., Civalek, Ö. 2019a.** Nonlocal FEM Formulation for Vibration Analysis of Nanowires on Elastic Matrix with Different Materials. *Mathematical and Computational Applications*, 24(2): 38.

**Uzun, B., Civalek, O. 2019b.** Free vibration analysis Silicon nanowires surrounded by elastic matrix by nonlocal finite element method. *Advances in Nano Research*, 7(2): 99-108.

**Uzun, B., Numanoglu, H., Civalek, O. 2018.** Free vibration analysis of BNNT with different cross-Sections via nonlocal FEM. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 49(2): 252-260.

**Wang L F and Hu H Y 2005.** Flexural wave propagation in single-walled carbon nanotube Phys. Rev.

**Xu,L. and Sun,L. (2010).** Electromechanical coupled non-linear vibration of the microplate

**F Yang, ACM Chong, DCC Lam, P Tong (2002).** Couple stress based strain gradient theory for elasticity

**Yayli, M.Ö. 2015.** Buckling analysis of a rotationally restrained single walled carbon nanotube. *Acta Physica Polonica A*, 127(3): 678-683.

**Yayli, M.Ö. 2016.** Buckling Analysis of a Rotationally Restrained Single Walled Carbon Nanotube Embedded In An Elastic Medium Using Nonlocal Elasticity. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 8(2): 40-50.

**Yayli, M.Ö. 2017.** Buckling analysis of a cantilever single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium with an attached spring. *Micro & Nano Letters*, 12(4): 255-259.

**Yayli, M.Ö. 2018.** On the torsional vibrations of restrained nanotubes embedded in an elastic medium. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 40(9): 419.

**Zhang, Y.Q., Liu, G. R., Xie, X.Y. 2005.** Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity. *Physical Review B*, 71(19): 195404.

**Zhou M. ve Li Y., 2001.** Phosphorus-Sorption Characteristics of Calcareous Soils and Limestone from the Southern Everglades and Adjacent Farmlands

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Togay KÜPELİ  
Doğum Yeri ve Tarihi : Osmangazi/BURSA 21.05.1995  
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu  
Lise : Bursa Milli Piyango Anadolu Lisesi (2010-2014)  
Lisans : Uludağ Üniversitesi (2014-2018)  
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi (2018-

İletişim (e-posta) : togay-kupeli@hotmail.com