



**METALLERDE SICAKLIK TABANLI GEVREK – SÜNEK  
GEÇİŞ KIRILMASININ MODELLENMESİ İÇİN SÜREKLİ  
ORTAMLAR HASAR MEKANİĞİ İLE BÜTÜNLEŞİK  
GÖZENEKLİ PLASTİSİTE TEORİSİ ÜZERİNE  
YAKLAŞIMLAR**

**İSMAİL CEM TÜRTÜK**



T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**METALLERDE SICAKLIK TABANLI GEVREK – SÜNEK GEÇİŞ  
KIRILMASININ MODELLENMESİ İÇİN SÜREKLİ ORTAMLAR HASAR  
MEKANİĞİ İLE BÜTÜNLEŞİK GÖZENEKLİ PLASTİSİTE TEORİSİ  
ÜZERİNE YAKLAŞIMLAR**

**İsmail Cem TÜRTÜK**

Prof.Dr. Babür DELİKTAŞ  
(Danışman)

DOKTORA TEZİ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA - 2018

## TEZ ONAYI

İsmail Cem TÜRTÜK tarafından hazırlanan “Metallerde Sıcaklık Tabanlı Gevrek-Sünek Geçiş Kırılmasının Modellenmesi için Sürekli Ortamlar Hasar Mekaniği ile Bütünleşik Gözenekli Plastisite Teorisi Üzerine Yaklaşımlar” adlı tez çalışması aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Prof.Dr. Babür DELİKTAŞ

**Başkan :** Prof.Dr. Babür DELİKTAŞ  
Uludağ Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi  
İnşaat Mühendisliği A.B.D.

İmza



**Üye :** Prof.Dr. Mehmet Ali GÜLER  
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi  
Makina Mühendisliği A.B.D.

İmza



**Üye :** Doç.Dr. Mustafa Özgür YAYLI  
Uludağ Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi  
İnşaat Mühendisliği A.B.D.

İmza



**Üye :** Doç.Dr. Hakan TÜRKER  
Uludağ Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi  
İnşaat Mühendisliği A.B.D.

İmza



**Üye :** Doç.Dr. Hüseyin LEKESİZ  
Bursa Teknik Üniversitesi  
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi  
Makina Mühendisliği A.B.D.

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım



Prof. Dr. Ali BAYRAM  
Enstitü Müdürü

13 / 08 / 2018

**U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**07/08/2018**  
**İsmail Cem TÜRTÜK**

## ÖZET

Doktora Tezi

### METALLERDE SICAKLIK TABANLI GEVREK-SÜNEK GEÇİŞ KIRILMASININ MODELLENMESİ İÇİN SÜREKLİ ORTAMLAR HASAR MEKANİĞİ İLE BÜTÜNLEŞİK GÖZENEKLİ PLASTİSİTE TEORİSİ ÜZERİNE YAKLAŞIMLAR

**İsmail Cem TÜRTÜK**

Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof.Dr. Babür DELİKTAŞ

Metalik malzemelerdeki kırılma iki farklı karakterde olabilmektedir. Sünek ve gevrek olarak tanımlanan bu kırılma tipleri, birim şekil değiştirme hızı, ortam sıcaklığı ve gerilme üç eksenli etkisi altında ortaya çıkmaktadır. Sıcaklık artışı sünekliği arttırırken, gerilme üç eksenli ve birim şekil değiştirme hızının artması gevrekliği arttırmaktadır. Bu çevresel durumlara bağlı olarak sünek ve gevrek bölgeler arasında kalan kırılma tipi geçiş kırılması olarak adlandırılmaktadır.

Bu çalışma dahilinde, metal malzemelerdeki sıcaklığa bağlı geçiş kırılmasının teorik ve sayısal olarak modellenmesi için iki farklı yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşımların her ikisinde de, sünek kırılma, Gurson-Tvergaard-Needleman gözenekli plastik potansiyeli üzerinden modellenirken, gevrek kırılma için sürekli ortam hasar mekaniği dahilinde tanımlanmış hasar mekaniği modelleri kullanılmıştır. Gevrek kırılma için Leckie-Hayhurst tipi sürünme modeli modifiye edilerek hasar modeli olarak önerilmiştir. Gevrek kırılma için önerilen bir başka modelde Lemaitre tipi plastik hasar modeli olmuştur. Önerilen ilk model, sürekli ortamlar mekaniği tabanlı hipoeplastik çerçeveyi baz almaktadır. Bu model ABAQUS Sonlu Elemanlar yazılımına kodlanmış ve Turba ve arkadaşları (2011) tarafından yayınlanmış olan deneysel küçük zımba deneyleri ile nümerik sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırma sonucunda gevrek ve sünek kırılmanın model tarafından doğru olarak hesaplandığı görül müştür. Model ayrıca geçiş kırılması bölgesindeki hasarı da deneysel çalışmalarla uyumlu olarak öngörmektedir. Diğer taraftan, deneylerden elde edilen yükleme eğrileri ile nümerik sonuçlar oldukça tutarlı elde edilmiştir. Önerilen ikinci modelde, yine sürekli ortamlar mekaniği tabanlı hiperelastik formülasyonu baz almıştır. Bu formülasyon dahilinde gevrek hasarın anizotrop koşullarda tanımlanması için gerekli teorik altyapı formülize edilmiştir. Ayrıca hiperelastik model ile termodinamik uyumluluk prensibi tam olarak sağlanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Sürekli ortamlar mekaniği, termoplastisite, hesaplamalı mekanik, geçiş kırılması, gözenekli plastisite, hasar mekaniği, küçük zımba deneyleri

**2018, ix + 83 sayfa**

## ABSTRACT

PhD Thesis

### COUPLED CONTINUUM DAMAGE MECHANICS AND POROUS PLASTICITY APPROACHES FOR MODELING TEMPERATURE DRIVEN DUCTILE TO BRITTLE TRANSITION FRACTURE IN METALS

İsmail Cem TÜRTÜK

Uludag University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Civil Engineering

**Supervisor:** Prof.Dr. Babür DELİKTAŞ

Fracture in metals is generally characterized in two different categories. Named as ductile and brittle, these fracture types heavily depend on environmental conditions such as, temperature, strain rate and stress triaxiality. Increasing temperature increases the degree of ductility while increasing strain rates and stress triaxiality ratios increase the degree of brittleness. Depending on these conditions, the mode of fracture changes from ductile to brittle and vice versa, which is called the ductile to brittle transition phenomenon.

Within the context of this work, two different theoretical constitutive models for temperature driven ductile to brittle transition fracture have been developed. In both of these approaches, Gurson-Tvergaard-Needleman porous plasticity model has been employed to represent void-growth and coalescence dependent ductile fracture. Void-Volume ratio has been utilized as main ductile fracture indicator for GTN model. For brittle fracture, two different models have been proposed. Leckie-Hayhurst creep model has been modified to represent principal stress effects on microcrack initiation and growth prior to brittle fracture. Another brittle damage model has been chosen as Lemaitre-type continuous damage model, which also represents microcrack growth driven brittle failure, while representing softening effects due to crack initiation and growth. Ductile and brittle damage effects have been coupled over classical effective stress framework. First transition fracture model has been developed based on hypoelasticity of continuum mechanics. Developed model has been implemented in ABAQUS as a user defined material model. Single element tests have been performed to validate implementation. Later, small punch fracture tests performed by Turba et.al. (2011) has been modeled and its experimental results have been compared with developed models numerical results. Second approach to transition fracture has been developed based on hyperelastic framework of continuum mechanics. This approach not only serves as a basis to further extend the brittle fracture considering anisotropy of microcracks.

**Keywords:** Continuum mechanics, thermoplasticity, computational mechanics, transition fracture, porous plasticity, damage mechanics, small punch testing

**2018, ix + 83 pages**

## TEŐEKKÖR

Bu tezin hazırlanmasında değerli katkılarında dolayı baŐta danışman hocam Prof.Dr. Babür DELİKTAŞ'a, formölasyonlara kattığı değerli yorumlar ve ilgili P91 malzeme parametrelerinin temini için Dr.Celal SOYARSLAN'a, doktora başladığım dönemlerde beni manevi yönden motive eden, destekleyen ve yönlendiren Doç.Dr.Serdar GÖKTEPE ve Doç.Dr.Ercan GÖRSES'e, manevi yönden her zaman destek olan anneme, babama, kardeŐime, eŐime ve tüm diğer yakınlarıma sonsuz teŐekkürler.

İsmail Cem TÜRTÖK  
07.08.2018



# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	ix
1. GİRİŞ .....	1
2. KURAMSAL TEMELLER .....	8
2.1. Temel Tanımlar .....	8
2.1.1. Doğrusal olmayan deformasyon kinematığı .....	8
2.1.2. Temel gerinim tensörleri.....	8
2.1.3. Termo-elastik-plastik deformasyon kinematığı.....	9
2.1.4. Temel gerilme tensörleri.....	11
2.1.5. Sürekli ortamlar mekaniğinin temel prensipleri.....	13
2.1.6. Malzeme teorisi temel prensipleri.....	18
2.1.7. Sonlu deformasyon bünye denklemleri.....	22
2.2. Malzeme Bünye Modelleri.....	24
2.2.1. Boşluk büyümesi modelleri.....	24
2.2.2. Plastik deformasyonun termodinamığı.....	26
2.2.3. Hasar mekaniği modelleri.....	28
2.2.4. Hasar mekaniğinin termodinamığı.....	30
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	33
3.1. Hipoelastik Yaklaşım.....	33
3.1.1. Hipoelastik geçiş kırılması modelleri.....	36
3.1.2. Nümerik uygulama – Abaqus Vumat.....	44
3.2. Hiperelastik Yaklaşım.....	52
3.2.1. Temel kinematik denklemler.....	54
3.2.2. Termodinamik formülasyon.....	55
4. BULGULAR.....	63
4.1. Hipoelastik Yaklaşım.....	63



4.1.1. Küçük zımba deneylerine uygulama.....	63
4.2. Hiperelastik Yaklaşım.....	69
4.1.2. Tekeksenli yükleme durumu.....	69
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	73
KAYNAKLAR.....	76
ÖZGEÇMİŞ .....	83



## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\alpha$	Genelleştirilmiş skalar malzeme iç değişkeni
$\beta$	Genelleştirilmiş skalar malzeme iç değişkeni eşlenik kuvveti
$\alpha$	Genelleştirilmiş tensörel malzeme iç değişkeni
$\beta$	Genelleştirilmiş tensörel malzeme iç değişkeni eşlenik kuvveti
$\gamma$	Kütle bağıntılı hacimsel bünye kuvvetleri
$\varepsilon^p$	Plastik birim şekil değişim tensörü
$\eta$	Birim kütleli spesifik entropi
$\mathbf{F}$	Deformasyon gradyanı
$\mathbf{F}^e$	Deformasyon gradyanı elastik kısmı
$\mathbf{F}^p$	Deformasyon gradyanı plastik kısmı
$\mathbf{F}^r$	Deformasyon gradyanı geri çevrilebilir kısmı
$\mathbf{F}^\theta$	Deformasyon gradyanı termal kısmı
$\phi^p$	Sünek plastik potansiyel fonksiyonu
$\tau$	Kirchhoff gerilme tensörü
$\bar{\tau}$	Efektif Kirchhoff gerilme tensörü
$\lambda$	Lagrange tipi plastik parametresi
$\phi^d$	Gevrek hasar potansiyel fonksiyonu
$\Sigma$	Ara konumda tanımlanan Mandel gerilme tensörü
$\bar{\Sigma}$	Ara konumda tanımlanan efektif Mandel gerilme tensörü
$\mathbf{C}$	4üncü derece tanjant elastisite tensörü
$\mathbf{E}$	Toplam içsel enerji
$\mathbf{I}$	4üncü derece birim tensör
$\mathbf{K}$	Toplam kinetik enerji
$\mathbf{P}_e$	Toplam dış etki kaynaklı mekanik enerji
$\mathbf{Q}$	Toplam birim kütleli ısı üretim enerjisi
$\mathbf{b}$	Sol Cauchy Green şekil değişimi tensörü
$\mathbf{D}$	Gevrek anizotrop hasar oluşumu tensörü
$\mathbf{d}$	Simetrik deformasyon hızı değişimi tensörü
$\mathbf{E}$	Green Lagrange birim şekil değişimi tensörü
$\mathbf{e}$	Euler Almansi birim şekil değişimi tensörü
$\mathbf{e}_i$	x,y ve z yönlerindeki ortogonal birim vektörler
$\mathbf{l}$	Deformasyon değişimi hızı tensörü
$\mathbf{P}$	1nci Piola Kirchhoff gerilme tensörü
$\mathbf{R}$	Ortogonal rotasyon tensörü
$\mathbf{S}$	2nci Piola Kirchhoff gerilme tensörü
$\mathbf{U}$	Sağ gerilme tensörü
$\mathbf{V}$	Sol gerilme tensörü
$\mathbf{w}$	Antisimetrik deformasyon hızı değişimi tensörü
$\mathbf{Y}$	Birim şekil değiştirme enerjisi açığa çıkma hızı tensörü
$\nabla$	Gradyan operatörü
$\otimes$	Diadik (tensörel) çarpım ifadesi

Simgeler	Açıklama
$\partial$	Kısmi türevleme
$\psi$	Hacimsel serbest enerji fonksiyonu
$C$	Sağ Cauchy Green şekil değişimi tensörü
$\sigma_{eq}$	Eşdeğer gerilme
$\sigma_y$	Plastik matris akma gerilmesi
$\sigma$	Cauchy gerilme tensörü
$\theta$	Anlık sıcaklık değeri
$\times$	Vektörel çarpım sembolü
$\tilde{\epsilon}$	Nötralize edilmiş durumdaki birim şekil değişimi tensörü
$\mathbf{1}$	2nci derece birim tensör
$\zeta$	Birim kütleli entropi üretimi
$d$	Gevrek izotrop hasar oluşumu parametresi
$E$	Elastisite modülü
$f$	Birim hacimdeki boşluk oranı
$J$	Gerilme tensörü jakobyani
$Y_i$	Birim şekil değişimi açığa çıkma hızı tensörü asal değerleri

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

Şekil 1.1.	Sünek kırılma sonucu oluşan bir yüzeyin elektron mikroskobu görüntüsü.....	2
Şekil 1.2.	Gevrek kırılma sonucu oluşan bir yüzeyin elektron mikroskobu görüntüsü.....	4
Şekil 1.3.	Sünek ve gevrek kırılmanın aynı anda bulunduğu bir durum. Arada her iki kırılmanın özelliklerinin görüldüğü geçiş bölgesi ile .....	5
Şekil 2.1.	Temel deformasyon dönüşüm tensörleri .....	10
Şekil 2.2.	Cauchy gerilme teoremi, gerilme vektörleri ve yüzey normalleri.....	11
Şekil 2.3.	Gerilme tensörü tanımları ve aralarındaki dönüşümler.....	13
Şekil 3.1.	Malzeme bünyesindeki mikro gözenek ve mikro çatlak dağılım senaryoları (a) Alt ölçeğinde mikro çatlaklar bulunan gözenek oluşumu ağırlıklı durum (b) Gözenek ve çatlakların eşit oranda ve aynı boyut ölçeğinde bulunduğu durum (c) Alt ölçeğinde gözeneklerin bulunduğu çatlak oluşumu ağırlıklı durum .....	35
Şekil 3.2	Önerilen Leckie-Hayhurst gevrek hasar bazlı geçi kırılması modelinin tek eleman analizlerinde hesapladığı boşluk büyümesi hasarı $f$ ile mikro çatlak hasarı $D$ grafikleri.....	50
Şekil 3.3.	Önerilen Lemaitre gevrek hasar bazlı geçi kırılması modelinin tek eleman analizlerinde hesapladığı boşluk büyümesi hasarı $f$ ile mikro çatlak hasarı $D$ grafikleri.....	51
Şekil 3.4.	Deformasyon gradyanının geri çevrilebilir ve geri çevrilemez kısımlarına ayrılması ve ara konumun tanımlanması. Anlık konum itibarıyla bünyede oluşabilecek farklı hasar mekanizmaları; (a) boşluk büyümesi dominant olan, (b) boşluk ve çatlakların eşit oranda bulunduğu, (c) çatlak büyümesi dominant durumlar.....	55
Şekil 4.1.	Deforme olmamış durum ve sonlu elemanlar ağ örgüsü.....	65
Şekil 4.2.	Önerilen modellerin nümerik analiz sonuçlarının Turba ve ark. (2011) ile verilen deneysel sonuçlarla karşılaştırılması.....	66
Şekil 4.3.	22°C, -158°C ve -196°C sıcaklıklardaki boşluk oranı, hasar ve gerilme dağılımları.....	67

## ÇİZELGELER DİZİNİ

### Sayfa

Çizelge 3.1.	GTN plastisite modeli ve önerilen Leckie-Hayhurst hasar modeli ile geçiş kırılması modeli nümerik algoritması.....	47
Çizelge 3.2.	GTN plastisite modeli ve Lemaitre kinetik hasar modeli ile geçiş kırılması modeli nümerik algoritması .....	48
Çizelge 3.3.	P91 için termoelastik malzeme parametreleri .....	49
Çizelge 3.4.	P91 için 22°C’de Hockett-Sherby plastik pekleşme parametreleri.....	49
Çizelge 3.5.	P91 için Gurson-Tvergaard-Needleman modeli malzeme parametreleri .....	49
Çizelge 3.6.	Sünek hasar ve Leckie-Hayhurst hasar modeli parametreleri .....	49
Çizelge 3.7.	Lemaitre-tipi hasar parametreleri .....	49
Çizelge 3.8.	Hiperelastik formülasyon geçiş kırılması malzeme bünye modeli denklemleri .....	62
Çizelge 4.1.	Tek eksenli yükleme durumu için hiperelastik geçiş kırılması malzeme bünye denklemleri .....	72

## 1. GİRİŞ

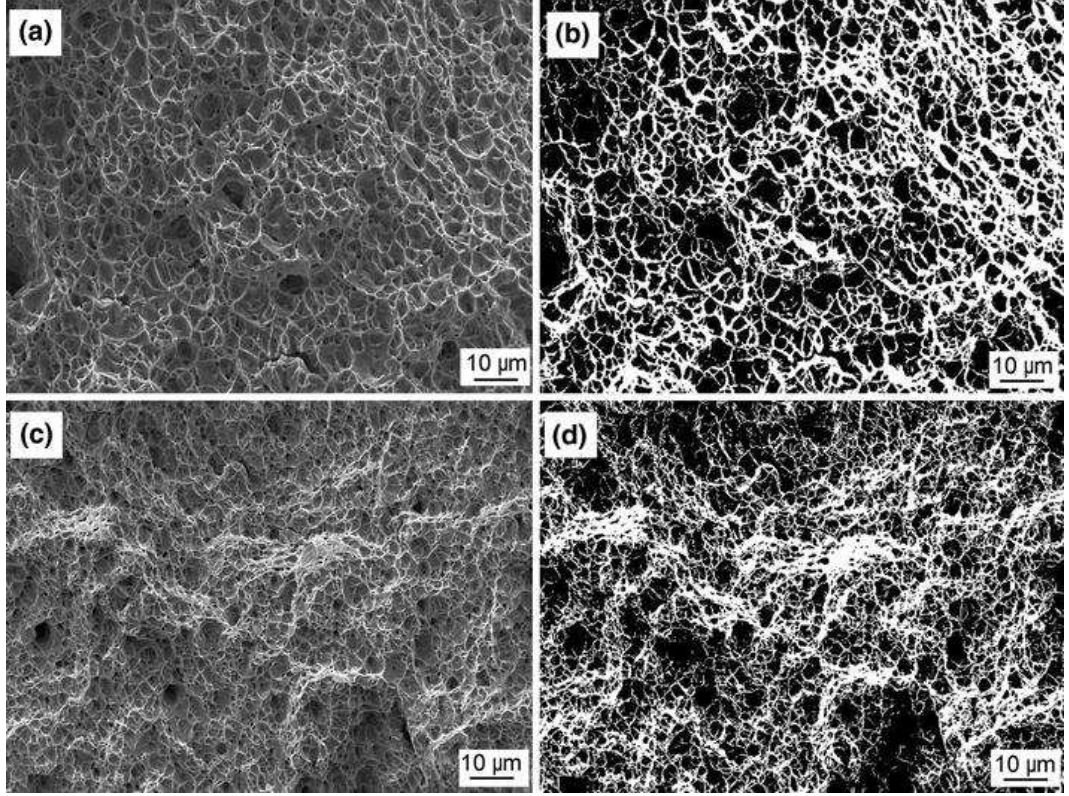
Metalik malzemeler mühendislik yapılarında en çok kullanılan ve vazgeçilmez maddelerdir. Her ne kadar kullanımları oldukça eskiye dayansa da, günümüzde kırılma davranışları ve bunların sayısal modellenmeleri üzerine araştırmalar yoğun bir şekilde devam etmektedir.

Atomların düzgün düzülmeleri sonucu oluşan metalik bağlar ile birbirine bağlanmış ve kristal yapıya sahip bu malzemeler teorik olarak tam saflığa sahip olmaları durumunda oldukça yüksek atomik enerjiye sahiptirler ve kırılmaları için pratikte pek imkanı sayılmayan yüklemelerin uygulanması gerekmektedir. Ancak pratikte, bir çok metalik malzeme, bu teorik yüklerin çok altında kalıcı deformasyon ve/veya kırılma göstermektedir. Bunun nedeni, imalat yöntemleri sonucunda latis yapı bünyesinde oluşan safsızlıklardır. Bu safsızlıklar, metal imalatındaki lokal olarak homojen olmayan soğuma esnasında oluşan tane sınırları (grain boundary), dislokasyonlar ve özellikle alaşım olarak metal matris yapısına katılan inklüzyonlardır. Doğal olarak metal matris yapısında zayıf halka olarak etki eden bu oluşumlar neticesinde kırılma enerjileri/kuvvetleri ciddi anlamda azalabilmektedir. Metalik malzemelerdeki kırılma davranışı temel olarak iki ana başlık altında incelenir. Bunlar sünek ve gevrek kırılma olarak isimlendirilmiştir.

Sünek kırılma (ductile fracture), metalik malzemelerde en sık gözlenen kırılma tipidir. Metal matris yapısının her hangi bir safsızlığa sahip olmadığı durumda, matrisi oluşturan atomların kayma düzlemi (slip plane) olarak isimlendirilen ve en yoğun atom yoğunluğuna sahip düzlem boyunca oluşturduğu kayma hareketi göstermesi ile karakterizedir. Bu kayma hareketi makroskopik boyutlarda plastik deformasyon olarak isimlendirilir. Fakat, latis yapı bünyesindeki inklüzyonlar, dislokasyonlar ve tanecik sınırları olduğu durumda deformasyon ve kırılma mekanizması daha farklıdır.

Mikro yapıda incelendiğinde metal matrisi üzerindeki yükleme belirli bir limiti altında (elastik limit), belirli lokasyonlarda düzensizlik gösterip dislokasyon (atom boşluğu) oluşturmuş yapı kayma hareketini gerçekleştirmeye başlar. Yükleme devam ettikçe atomların kayması ile birlikte dislokasyonlar hareket ederler ve bu hareket zayıf olan yönden

güçlü olan yönlere doğru olur. Bu deformasyon mekanizması devam ederken dislokasyon boşlukları, bir süre sonra daha yüksek kayma direncine sahip tanecik sınırlarında birikmeye başlar. Böylece, matris bünyesinde kayma hareketi ile oluşmuş boşluklar büyümeye başlarlar. Kırılma ise, biriken ve büyüyen bu boşlukların arasında kalan ve yük taşıyan matris yapısının taşıma limitine ulaşması ile tetiklenir. Bu anda biriken ve büyüyen boşluklar birbirleri ile hızlı bir şekilde birleşirler. Bu mekanizma literatürde boşluk oluşumu, büyümesi ve birleşmesi modeli olarak adlandırılmaktadır (Rice ve Thomson 1974, Anderson 2004, Fracture Handbook 2004, Skrzypek ve ark. 2008). Kırılma yüzeyi incelendiğinde göze çarpan en karakteristik nokta süngere benzer, pürüzlü bir yapıya sahip olduğudur. Tipik bir sünek kırılma yüzeyi Şekil 1.1 ile verilmiştir.



**Şekil 1.1.** Sünek kırılma sonucu oluşan bir yüzeyin elektron mikroskopu görüntüsü

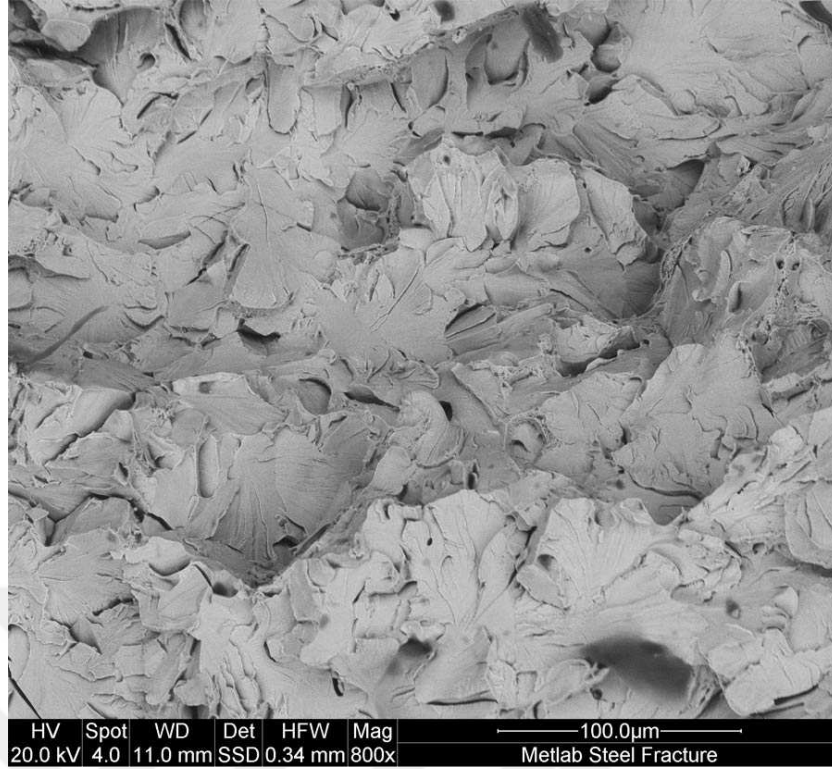
Literatürde gözenek büyümesi ile karakterize olan sünek kırılmayı tanımlayan çeşitli teorik çalışmalar bulunmaktadır (McClintock 1968, Thomason 1968, Rice ve Tracey 1969, Gurson 1977). Bu çalışmaların hepsi metallerdeki sünek kırılmanın boşluk oluşumu, büyümesi ve matris yapının boyun vermesi sebebi ile boşluk birleşmesi ile kırıldığı üzerinde

durmaktadır. Ancak, bu çalışmalar içinde Gurson (1977) tarafından önerilen model, klasik Von Mises (J2) plastik potansiyelinden yola çıkarak, boşluk oluşum ve büyüme mekanizmalarını rijit-plastik bir matris üzerinde homojenize ederek bir potansiyel fonksiyon elde etmiştir. Gurson tarafından önerilen bu model, boşluk büyümesine bağlı malzeme katılık azalması ve gerilme artışını mate-matikselsel bir potansiyel fonksiyon üzerinden modellediği için bir mihenk taşı olmuştur. Gurson tarafından önerilen bu model daha sonra, Tvergaard ve Needleman (1981,1982a,1982b,1984) tarafından boşluk büyümesi hızlandırması etkisini de içerek şekilde geliştirilmiş ve günümüzde Gurson-Tvergaard-Needleman plastisite modeli olarak isimlendirilmiştir. Model üzerinde yapılan başka iyileştirme ve geliştirme çalışmaları da literatürde mevcuttur.

Diğer bir kırılma tipi ise gevrek kırılma (brittle fracture, bir diğer deyişle cleavage) olarak isimlendirilmiştir. Yoğunlukla seramik, beton, kompozit..vb amorf ya da kompozit yapıya sahip malzemelerde görülmekle birlikte, bazı özel çevresel koşullar altında metallerde de görülmektedir. Bu koşullar ortam sıcaklığı, birim deformasyon hızı (strain rate) ve gerilme üç eksenliliği (stress triaxiality) durumudur. Ortam sıcaklığının artışı gevrekliği azaltırken, birim şekil değiştirme hızının ve gerilme üç eksenliliğinin artışı ise gevrekliği arttırmaktadır. Oldukça ani gelişen bir kırılma tipi olup, sünek şekil değişimi gibi kontrol edilebilir olmadığı için katastrofik sonuçlar yaratabilmektedir. Metal mikro yapısı incelendiğinde gevrek kırılmanın, tanecik sınırı ve/veya tanecik boyunca oluşan ve matris bağlarını tamamen koparan bir mekanizma ile oluştuğu görülmektedir. Mikroçatlakların oluşumu ve ani olarak ilerlemesi sonucu ile metal bağlarının tamamen kopması şeklinde de tanımlanabilir. En önemli karakteristik özelliklerinden bir tanesi, sünek kırılmanın aksine, metal iç yapısına bağlı olarak istatistiksel bir davranış gösterebilmesidir. Gevrek kırılma göstermiş bir malzemenin mikro yapısını incelendiğinde oldukça düzgün, parlatılmış gibi görünen yüzeyler göze çarpar, bkz. Şekil 1.2.

Gevrek kırılma için literatürde geliştirilen modeller temelde ikiye ayrılmaktadır. Bunlar nicel (quantitative) ve istatistiksel (statistical) modellerdir. Nicel modeller, malzemedeki gevrek kırılmanın oluşumunu belirli deneysel gözlemlere dayandırıp, buradan kırılma başlangıcı eşik değeri ile ilgili bir çıkarım yapan modellerdir. Bu modellerin en bilineni Ritchie-Knott-Rice (Ritchie ve ark. 1973) modeli olarak bilinendir. Bu model, meta-





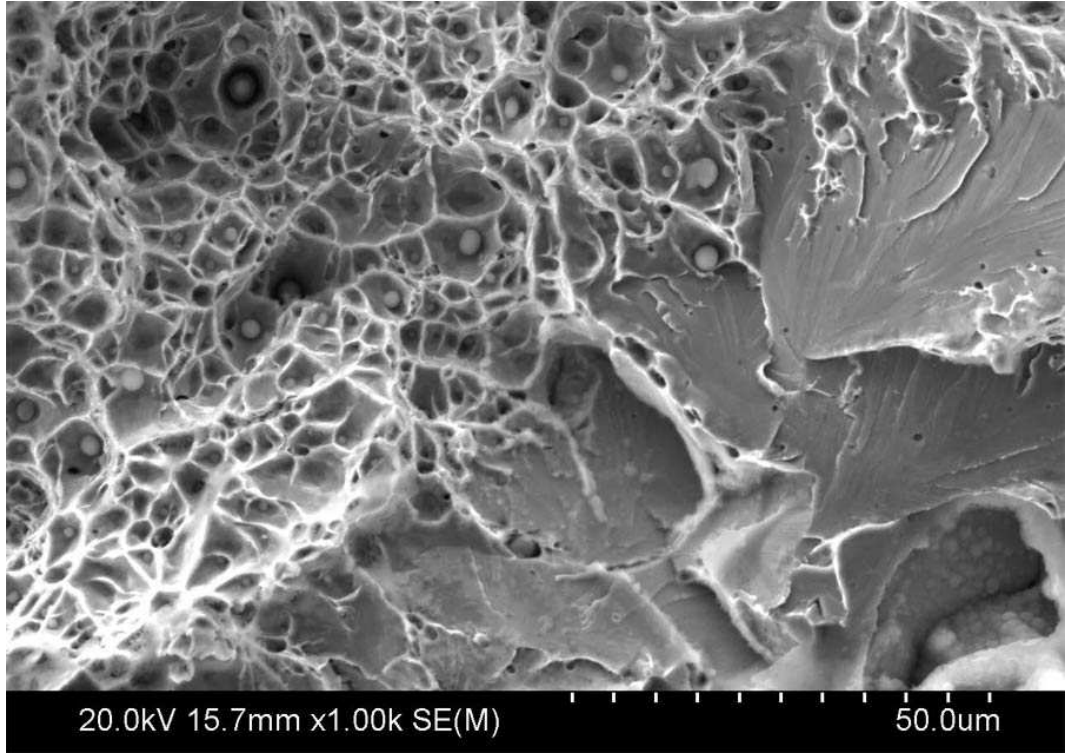
**Şekil 1.2.** Gevrek kırılma sonucu oluşan bir yüzeyin elektron mikroskobu görüntüsü (Metlab 2018)

lik yapıya sahip malzemelerdeki gevrek kırılmanın, malzeme bünyesindeki her hangi bir noktada oluşan maksimum asal gerilmenin, bu noktadan belirli bir mesafe dahilinde, kritik eşik değeri aşması ile tetiklendiğini önermektedir. Ritchie ve ark. (1973) yaptıkları çalışmalarda düzlem-sel ve ön tanımlı çentiğe sahip numuneler üzerinde Mod-1 çeki deneyleri yapmışlar ve sonuçları lineer elastik kırılma mekaniği analitik çözümleri ile karşılaştırmışlardır. Yapılan karşılaştırma sonunda, ön tanımlı çatlak dibinden belirli bir mesafe uzaklıkta hesaplanan maksimum asal gerilmenin, malzeme limit dayanım değerine eşit olduğu durumda gevrek kırılmanın oluştuğunu göstermişlerdir. Ritchie ve arkadaşları bu mesafeyi mikro yapıya ve tanecik boyutuna bağlı olarak tayin edilmesi gereken bir değer olarak tanımlamış ancak metaller için iki tanecik boyutu olarak önermişlerdir. Her hangi bir istatistiksel dayanağı olmayan bu model, mühendislik metallerinin gevrek kırılma davranışlarının tayininde günümüzde yoğun olarak kullanılmaktadır.

Diğer bir gevrek kırılma modeli ise Beremin Çalışma Grubu (Beremin 1983) tarafından önerilmiştir. Isıl işlem ile sertleştirilmiş çelik numuneleri üzerinde yapılan deneysel çalışmalar ile ilgili malzeme için gevrek kırılma limitlerini tayin etmişlerdir. Diğer taraftan

deneysel çalışmalar incelendiğinde, kırılma dayanımının (maksimum asal gerilme üzerinden) hem Weibull dayanımına uyduğu, hem de metaller için çok az da olsa plastik şekil değişimi ile birlikte geliştiği gözlemlenmiştir. Buradan yola çıkılarak mikroçatlak oluşumu ve ani ilerlemesi ihtimali kullanılarak istatistiksel bir gevrek kırılma modeli geliştirilmiştir.

Gevrek ve sünek kırılma birbirlerinde oldukça farklı temellere oturmuş olsalar da, farklı çevresel koşullar altında birbirlerine dönüşebilirler ya da aynı anda oluşup ilerleyebilirler. Bu durumda oluşan kırılma tipi sünek-gevrek geçiş kırılması ya da geçiş kırılması olarak isimlendirilmiştir. Ortam sıcaklığı değişimi, birim şekil değiştirme hızı ve gerilme üç eksenli en önemli üç faktör olarak belirlenmiştir. Geçiş kırılmasını gösteren temsili bir mikroyapı Şekil 1.3 ile verilmiştir. SEM incelendiğinde gevrek ve sünek kırılma bölgeleri ile geçiş kırılmasının olduğu bölge arasında farklar göze çarpmaktadır.



**Şekil 1.3.** Sünek ve gevrek kırılmanın aynı anda bulunduğu bir durum. Arada her iki kırılmanın özelliklerinin görüldüğü geçiş bölgesi ile (Metlab 2018)

Metal malzemelerdeki sıcaklık artışı sünekliliği artırırken, sıcaklık düşüşü ise gevrekliği arttırmaktadır.  $-30^{\circ}\text{C}$  derecelerinden başlayıp,  $-150^{\circ}\text{C}$  sıcaklık değerlerine kadar olan kısım metaller için geçiş kırılmasının olduğu bölge olarak adlandırılmaktadır.  $-30^{\circ}\text{C}$  ve

üzerindeki değerlerde (faz değiştirme sıcaklığına kadar) metallerin sünek elastik-plastik,  $-155^{\circ}\text{C}$  ve altında ise tamamen gevrek davranış gösterdiği kabul edilmektedir. Benzer şekilde, malzeme bünyesinde oluşan birim şekil değiştirme hızının artışı malzeme gevrekliğini arttırmakla birlikte, bu parametre için net bir ayırım yapılamamaktadır. Gerilme üç eksenliği ise, malzeme bünyesindeki her hangi bir noktadaki hidrostatik gerilmenin, eşdeğer von Mises gerilmesine oranı olarak tanımlanmaktadır. Bu değer artması, malzeme bünyesinde oluşan plastik hareketleri azaltmakta ve ani gevrek kırılmanın oluşumunu tetiklemektedir.

Belirtilen koşullarda oluşan ve gözlemlenen geçiş kırılmasını matematiksel olarak tanımlayan çalışmalar literatürde mevcuttur (Xia ve Fong Shih 1996, Needleman ve Tvergaard 2000, Shterenlikht 2003, Batra ve Lear 2004, Hutter ve ark. 2014). Bu modellerde sünek kırılma Gurson-Tvergaard-Needleman plastisite modeli ve bir hasar parametresi (boşluk oranı) ile karakterize edilmişken, gevrek kırılma için Ritchie-Knott-Rice ya da Beremin tipi bir kırılma modeli kullanılmıştır. Formülizasyon Gurson modeli temeline oturtulmuş olup, bu model üzerinden hesaplanan gerilme durumları gevrek kırılma için kontrol parametresi olarak kullanılmaktadır. Dolayısıyla, (1) gevrek kırılma plastik deformasyon ile birebir bağıntılı olmakta, (2) gevrek kırılmaya ve geçiş kırılmasına özgü mikro çatlak oluşumu ve ilerlemesinin etkileri modellenememektedir. Geçiş kırılma durumunda mikro çatlakların ve mikro boşlukların aynı anda malzeme bünyesinde bulunduğu durumu göz önüne alındığında, malzeme katılığı (stiffness) üzerinde hem gözenek oluşumu hem de çatlak oluşumu etkilerinin modellenmesi önem arz etmektedir.

Bu çalışma dahilinde, metallerdeki geçiş kırılmasını matematiksel olarak tanımlayan, sürekli ortamlar mekaniği temelli bir model geliştirilmiştir. Önerilen modelde, sünek kırılma Gurson-Tvergaard-Needleman plastik potansiyeli üzerinden tanımlanmıştır. Gevrek kırılma içinse hasar mekaniği yaklaşımları benimsenmiştir. Dolayısıyla sünek kırılma için boşluk oranı bir hasar parametresi olarak ele alınmışken, gevrek kırılma için önerilen hasar potansiyel formları üzerinden ayrı bir parametre tanımlanmıştır. Bu iki hasar parametresi, gerilme durumu üzerine efektif gerilme konsepti üzerinden bağlanmış olup, bu şekilde her iki kırılma tipinin bünyede oluşturacağı katılık azalması modellenenmiştir. Kırılma davranışı ise, iki parametreden her hangi birinin kritik limit değerine ulaşması

anında oluşmaktadır. Önerilen model, sıcaklık tabanlı geçiş kırılması özelinde sunulmuştur.

İlgili çalışmanın ilk kısmında sürekli ortamlar mekaniğinin temel deformasyon, gerilme ve kinematik tanımları ile temel prensipleri verilmiştir. İkinci kısım, geçiş kırılması modelinin temelini oluşturan malzeme modellerini sunmaktadır. Burada Gurson-Tvergaard-Needleman plastik potansiyel modeli ve sürekli ortamlar hasar mekaniğinin temelleri verilmiştir. Üçüncü kısımda önerilen teorik model, hipoelastik çerçeve baz alınarak termoelastisite dahilinde formülize edilmiştir. Bu noktada gevrek kırılma için Leckie ve Hayhurst (1973,1977) tarafından geliştirilen sürünme modeli modifiye edilerek gevrek hasar modeli olarak önerilmiştir. Önerilen diğer bir gevrek kırılma modeli ise, Lemaitre tipi (1985) plastik deformasyon tabanlı hasar potansiyeli olmuştur. Önerilen matematiksel model ABAQUS Sonlu Elemanlar yazılımına kullanıcı kodu olarak gömülmüş ve Turba ve arkadaşları (2011) tarafından yayınlanmış farklı sıcaklıklardaki küçük zımba deneyleri sonuçları ile teorik sonuçları karşılaştırılarak korelasyon sağlanmıştır. Dördüncü kısımda, önerilen model hiperelastik çerçeve kullanılarak formülize edilmiştir. Hiperelastik çerçevenin önemi, termodinamik enerji dağılımı ilkesine tam uyumluluk göstermesi ve anizotrop hasar parametrelerinin tanımına olanak sağlamasıdır. Son bölümde ise geliştirilen modellerin birbirlerine göre karşılaştırması yapılmış olup, sonuçları yorumlanmıştır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1 Temel Tanımlar

#### 2.1.1 Doğrusal olmayan deformasyon kinematiği

$\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$  ifadesi 3 boyutlu uzaydaki bir cismin ilk (referans) konumu,  $\mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^3$  ifadesinin de aynı cismin anlık (mevcut) konumunu olarak belirtilir. Cismin uzaydaki hareketi  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_t \subset \mathbb{R}^3$  birebir fonksiyonu ile tanımlanmaktadır. Deformasyon gradyanı  $\mathbf{F}$ , cismin referans konumda bulunan her hangi bir noktasındaki malzeme tanjant vektörlerini  $\mathbf{K}$ , mevcut konumdaki tanjant vektörlerine  $\mathbf{k}$ , ilişkilendiren doğrusal dönüşüm fonksiyonu olarak tanımlanır ve matematiksel olarak  $\mathbf{F} := \partial_{\mathbf{X}}\varphi$  ile ifade edilir. Burada  $\mathbf{X}$  ilgili malzeme noktasının referans durumdaki kordinatlarını belirten vektör olarak tanımlanırken  $\mathbf{x}$  aynı noktanın mevcut konumdaki kordinatlarını tanımlayan vektördür.

Deformasyon gradyanı, polar ayrıştırma teoremi kullanılarak rijit cisim hareketlerini karakterize eden bir rotasyon tensörü  $\mathbf{R}$  ile, sırasıyla  $\mathbf{U}$  ve  $\mathbf{V}$  ile tanımlanan sağ ve sol gerinme tensörlerine ayrılabilir.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.1)$$

Doğrusal olmayan deformasyon kinematiklerinin tanımlanmasında gerekli olan ve referans konumdaki deformasyonun bir göstergesi olan sağ Cauchy-Green deformasyon tensörü  $\mathbf{C}$  ile tanımlanırken, aynı deformasyon kinematiğini mevcut konumda tanımlayan sol Cauchy-Green deformasyon tensörü  $\mathbf{b}$  tanımlamaları şu şekildedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T\mathbf{F} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{F}\mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (2.2)$$

3 boyutlu uzayda deformasyona maruz kalan cismin her bir noktasındaki deformasyon hızını karakterize eden ve mevcut konumda hesaplanan deformasyon hız gradyanı  $\mathbf{I}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &:= \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{F}^{-1} \\ &= \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ile tanımlanır. Burada  $\mathbf{L}$ , anlık durumda tanımlanan hız gradyanının referans konumda verilmiş tanımıdır. Hem deformasyon hem de rijit cisim hareketlerini içeren  $\mathbf{L}$  tensörü, simetrik ve antisimetrik kısımlarına ayrıldığında ortaya simetrik kısmı deformasyon hızı tensörü  $\mathbf{d}$ , antisimetrik kısmı ise dönme hızı tensörü  $\mathbf{w}$  olarak tanımlanmıştır.

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}; \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} [\mathbf{l} + \mathbf{l}^T]; \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} [\mathbf{l} - \mathbf{l}^T] \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Temel gerinim tensörleri

Sağ ve sol Cauchy-Green deformasyon tensörlerinin tanımlanması ve genel olarak birim şekil değiştirmenin ifadesi olan gerinim tensörleri tanımlanabilir. Gerçek ve mühendislik gerinim tensörleri ile benzer yaklaşım kurularak, referans ve mevcut konumlarda farklı gerinim tensörleri tanımlanabilir. Referans konumda tanımlanan gerinim tensörü Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ , mevcut konumda tanımlanan ise Euler-Almansi gerinim tensörü  $\mathbf{e}$  olarak ifade edilir. Burada  $\mathbf{1}$ , ikinci derece birim tensördür.

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} [\mathbf{C} - \mathbf{1}]; \quad \mathbf{e} := \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}] \quad (2.5)$$

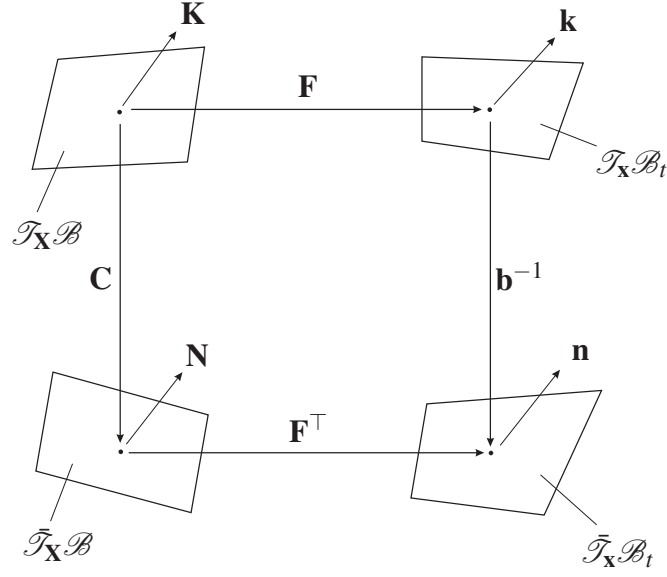
Yukarıda yapılan tanımlar ışığında, doğrusal olmayan sürekli ortamlar mekaniğindeki, referans ve mevcut konum arasındaki cismin hareketini belirten deformasyon ve kinematik tensörlerin tanımları Şekil 2.1 ile özetlenmiştir.

### 2.1.3 Termo-elastik-plastik deformasyon kinematığı

3 boyutlu uzaydaki cismin hareketi ve deformasyonlarının tanımı olan deformasyon gradyanı, termoelastoplastik deformasyon durumunda, aşağıdaki gibi çarpımsal olarak ayrıştırılır.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \mathbf{F}^\theta \quad (2.6)$$

Bu ifadede  $\mathbf{F}, \mathbf{F}^e$  ve  $\mathbf{F}^p$  sırası ile deformasyon gradyanının elastik, plastik ve termal de-



**Şekil 2.1.** Temel deformasyon deformasyon dönüşüm tensörleri

formasyonları içeren kısımları olarak tanımlanmaktadır.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \mathbf{F}^\theta$  tanımı hız gradyanı tanımı içine yedirildiğinde, termo-elasto-plastik hız gradyanı ise

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^e + \mathbf{F}^e \mathbf{l}^p \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{l}^\theta \quad (2.7)$$

ifadesine dönüşür. Plastik deformasyonun karakterize edildiği plastik deformasyon gradyanını  $\mathbf{F}^p$ 'in, elastik deformasyonların karakterize olduğu  $\mathbf{F}^e$ 'den oldukça büyük olduğu yaklaşımı kullanılarak  $\mathbf{F}^e = \mathbf{1}$  olacak ve hız gradyanı termal, elastik ve plastik deformasyon hızlarının toplamı olarak elde edilecektir.

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^e + \mathbf{l}^p + \mathbf{l}^\theta \quad (2.8)$$

Benzer yaklaşım ile hız gradyanının simetrik ve antisimetrik kısımları ele alındığında, birim deformasyon değişimini (hızını) karakterize eden deformasyon hızı tensörü;

$$\mathbf{d} = \text{sym}[\mathbf{l}]; \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p + \mathbf{d}^\theta \quad (2.9)$$

olarak elde edilir. Gerilme tensörünün objektif olması prensibi baz alındığında ve Green-Naghdi objektif gerilme hızı teoremi uygulandığında, birbirine göre ortogonal olan rotasyon tensörleri kullanılarak  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$ ,

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} = \mathbf{R}^T \mathbf{dR} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}^e + \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}^p + \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}^\theta \quad (2.10)$$

elde edilir. Bu ifadede,  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ , genel deformasyondan rotasyonların nötralize edilmesi ile elde edilmiş birim şekil değiştirme hızı tensörü olarak elde edilir. Rotasyonlar ise deformasyon gradyanının polar ayrıştırma teoremi kullanılarak elde edilmiştir,  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ .

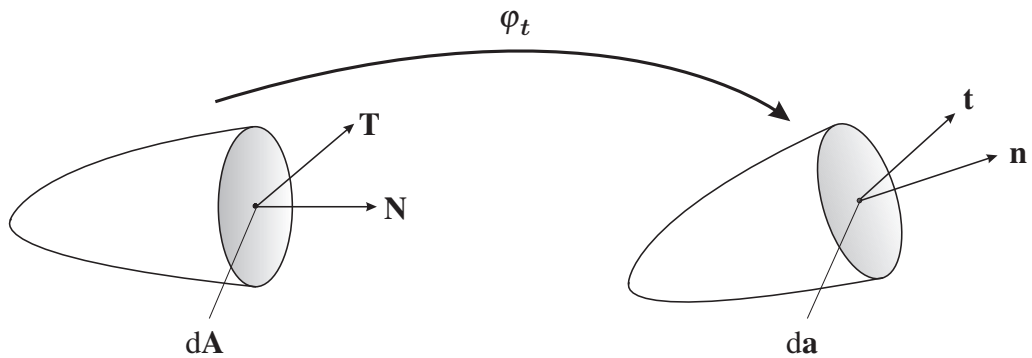
#### 2.1.4 Temel gerilme tensörleri

##### Cauchy gerilme teoremi

3 boyutlu uzayda deformasyon hareketi yapan bir parça,  $\mathcal{B}$  ele alınsın. Bu parça mevcut konumda iken üzerinden bir kesit alındığında, kesilen parçanın etkisini cisim üzerine etkilemek için, kesilen kısma tanımlanan  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$  vektörüne gerilme vektörü ismi verilmiştir. Burada  $\mathbf{x}$  kesilen kısmın mevcut konumdaki pozisyon vektörünü,  $t$  mevcut durumdaki zamanı ve  $\mathbf{n}$  ise, kesilen yüzeyin doğrultusunu karakterize eden yüzey normal vektörünü temsil etmektedir.

Cauchy gerilme teoremi, parça mevcut konumdayken her bir gerilme vektörü  $\mathbf{t}$ 'nin, ilgili yüzey normaline  $\mathbf{n}$  doğrusal olarak ilişkilendirildiğini tanımlar. Bu doğrusal ilişkilendirme Cauchy gerilme tensörü olarak tanımlanan  $\boldsymbol{\sigma}$  üzerinden gerçekleştirilir.

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad (2.11)$$



**Şekil 2.2.** Cauchy gerilme teoremi, gerilme vektörleri ve yüzey normalleri

Fiziksel olarak yorumlandığında, Cauchy gerilme tensörü mevcut konumdaki gerilme vektörü ile yine aynı konumdaki yüzey normali arasında ilişki sağladığı için gerçek ge-



rilme olarak ele alınabilir. Bununla birlikte, referans konum ve referans konum-mevcut konum arasında kullanılmak üzere farklı gerilme tensörleri de tanımlanmıştır. Kirchhoff gerilme tensörü,  $\boldsymbol{\tau}$ , olarak bilinen tensör, Cauchy gerilmesinin deformasyon gradyanı jakobyani (determinantı) ile ölçeklendirilmesi ile elde edilir. Her iki tensör de simetrik tensörler olarak ( $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T$ ) aşağıdaki şekilde birbirlerine dönüştürülebilir.

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \quad , \quad J = \det\mathbf{F} \quad (2.12)$$

Eğer deformasyon esnasında cisimde ya da ilgili malzeme noktasında her hangi bir hacim değişimi görülüyorsa  $\det\mathbf{F} = 1$  olacak, ve Kirchhoff ile Cauchy gerilmeleri birbirlerine eşit olacaktır. Cauchy gerilme teoreminde mevcut konumda tanımlanan gerilme vektörü, yine mevcut durumda tanımlanan birim alan ile ilişkilendirilmektedir. Bu durum baz alınıp, gerilme vektörü referans konumdaki birim alan ile ölçeklendirildiğinde ve Cauchy gerilme teoremi referans konumdaki yüzey alan normaleri ile yapıldığında ortaya,

$$\mathbf{T} := \mathbf{P}\mathbf{N} \quad ; \quad \mathbf{P} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.13)$$

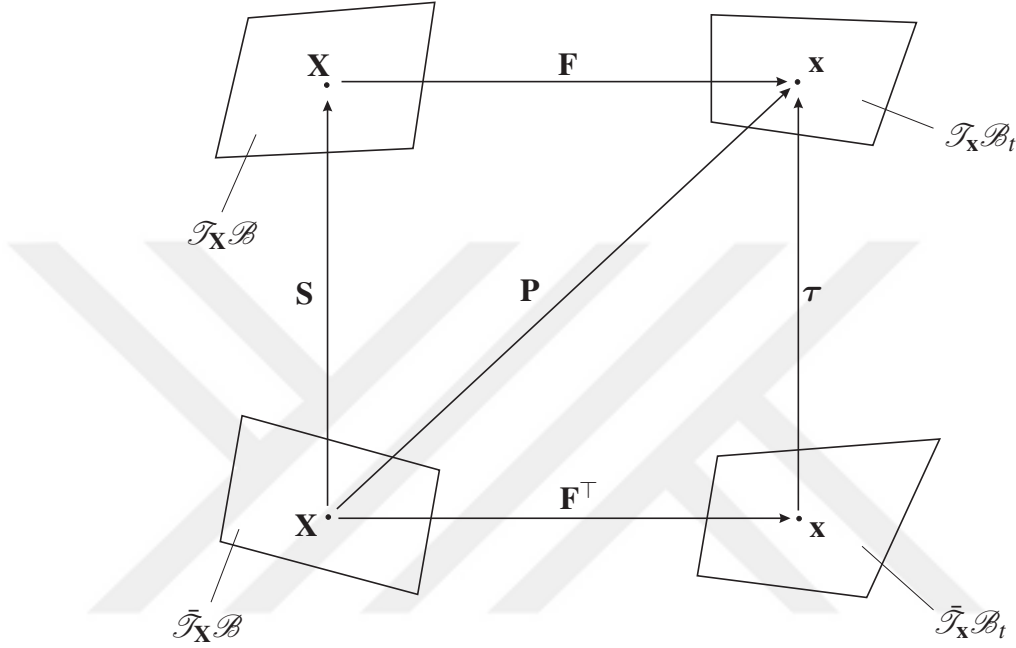
gerilme ifadesi çıkmaktadır. Burada  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{N}$  sırası ile mevcut konumda ancak referans konumdaki alan ile ölçeklendirilmiş gerilme vektörü ve referans konumdaki ilgili yüzey alan normali iken,  $\mathbf{P}$  ikinci derece tensörü ise 1.Piola-Kirchhoff gerilme tensörü olarak elde edilmiştir. Cauchy ya da Kirchhoff gerilmesinin tek yönlü olarak deformasyon gradyanı ile ilişkilendirilmesi ile elde edilen 1.Piola-Kirchhoff gerilme tensörü  $\mathbf{P}$ , doğal olarak simetrik bir tensör değildir. Ancak, deformasyon gradyanı etrafında simetriktir,  $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T; \mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T$ . Bu noktada  $\mathbf{P}$ , aynı deformasyon gradyanı  $\mathbf{F}$  gibi iki noktalı bir tensördür. Bir diğer deyişle, kendisini oluşturan taban vektörlerden bir tanesi referans konumda, bir tanesi ise mevcut konumda bulunmaktadır.

1.Piola-Kirchhoff gerilme tensörü tanımında mevcut konumda bulunan gerilme vektörü referans konuma deformasyon gradyanı kullanılarak taşındığında ise Cauchy gerilme teoremi  $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{S}\mathbf{N}$  olarak ifade edilir. Burada  $\mathbf{S}$ , 2.Piola-Kirchhoff gerilme tensörü olarak ad-

landırılır.

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.14)$$

Aynı  $\boldsymbol{\sigma}$  ve  $\boldsymbol{\tau}$  gibi,  $\mathbf{S}$  de ikinci derece ve simetrik bir tensördür,  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ . Tanımlanan gerilme tipleri ve birbirleri arasındaki dönüşümler Şekil 2.3 ile özetlenmiştir.



Şekil 2.3. Gerilme tensörü tanımları ve aralarındaki dönüşümler

### 2.1.5 Sürekli ortamlar mekaniğinin temel prensipleri

Katı ve akışkan, her hangi bir bütünü oluşturan malzemelerin sonsuz küçüklükteki her bir noktasında sağlanması gereken bazı temel prensipler vardır. Bu temel prensipler, matematiksel olarak formüle edilip, sürekli ortamı oluşturan cismin hareketi tayin eden denklemlerin çözülmesinde esas teşkil etmektedir. Bu denge denklemleri sırası ile,

- 1- Kütle korunumu
- 2- Doğrusal momentum korunumu
- 3- Açısal momentum korunumu
- 4- Enerjinin korunumu (Termodinamiğin 1.Kuralı)
- 5- Entropi eşitsizliği (Termodinamiğin 2.Kuralı)

tanımlanmıştır.

## Kütle korunumu kanunu

Sürekli olarak tanımlanan her bir cismin bir kütlesi vardır ve sürekli ortamlar mekaniğinde ortamda bulunan kütle artmadığı ya da azalmadığı varsayılmaktadır. Katılar olarak düşünüldüğünde gösterdiği deformasyon şekli nasıl olursa olsun, cismin toplam kütlesinde her hangi bir değişim olmamaktadır. Bu kuram matematiksel olarak ifade edildiğinde elde edilen denklem mevcut ve referans konumlarında,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{M} &:= 0 \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x},t)dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} J\rho(\mathbf{x},t)dV\end{aligned}\quad (2.15)$$

olarak elde edilir. Burada  $J = \det\mathbf{F}$  olarak tanımlanmış deformasyon gradyanının determinantıdır.  $\dot{J} = J(\nabla \cdot \mathbf{v}) = J\text{div}(\mathbf{v})$  eşitliği kullanılarak kütle korunumu denklemi mevcut konumda

$$\dot{\rho} + \rho\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.16)$$

olarak ifade edilmektedir. Eğer malzemedeki deformasyon tamamıyla sıkıştırılmaz ise  $\dot{\rho} = 0$  olacak ve kütle korunumu denklemi  $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$  olarak elde edilecektir.

## Doğrusal momentumun korunumu

Klasik doğrusal mekanikte olduğu gibi doğrusal olmayan sürekli ortamlar mekaniğinde de bir cismin doğrusal momentumunun zamana bağlı değişimi, o cisim üzerine etkiyen tüm kuvvetlerinin toplamına eşittir.

Matematiksel olarak formulize edildiğinde,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho\mathbf{v}(\mathbf{x},t)dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x},t)dv + \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x},t,\mathbf{n})da \quad (2.17)$$

olarak elde edilir. Burada  $\boldsymbol{\gamma}$  ile ifade edilen integral terimi kütle bağıntılı hacimsel bünye kuvvetlerini temsil ederken,  $\mathbf{t}$  ile ifade edilen terim ise, cismin yüzeylerine etkiyen yüzey kuvvet vektörlerinin etkilerini tanımlamaktadır. Diğer bir deyişle  $\mathbf{t}(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$  ifadesi ayrıca daha önce tanımlanan Cauchy gerilme vektörü olmaktadır. Tanımlanan bu denklem,

(2.16) ile verilen kütle korunumu denklemi ve Cauchy gerilme vektörü teoremi kullanılarak mevcut durumda,

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \boldsymbol{\gamma} + \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.18)$$

ile tanımlanmaktadır. Burada  $\dot{\mathbf{v}}$ , klasik anlamda cismin mevcut durumdaki ivmesini temsil etmektedir.

### Açısal momentum korunumu

Cismin doğrusal momentumunun, cismin her hangi bir noktasına göre momentinin zamana bağlı değişiminin, cisim üzerine etkiyen tüm kuvvetlerin aynı noktaya göre momentlerinin toplamına eşit olması gerektiği ilkesi açısal momentumun korunumu olarak ifade edilir. Doğrusal momentumun korunumu ilkesinin, doğrusal momentumun momentlerinin de korunması gerektiği olarak genelleştirilebilir. Mevcut konumdaki pozisyon vektörü  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  olan her hangi bir nokta için,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{x} \times \rho \boldsymbol{\gamma} dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t} da \quad (2.19)$$

olarak elde edilir. Kütle korunumu, Cauchy gerilme teoremi ve bir vektörün kendisi ile vektörel çarpımının sıfır olacağını tanımlayan matematiksel denklemler kullanılırsa Açısal momentum korunumu denklemi,

$$\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{x} \times (\rho \dot{\mathbf{v}} - \rho \boldsymbol{\gamma} - \text{div}(\boldsymbol{\sigma})) dv = \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \sigma_{kj} \mathbf{e}_i dv = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede, Cauchy gerilmesi 2nci derece tensörü olan  $\boldsymbol{\sigma}$ , ifade kolaylığı açısından indis notasyonunda ve  $\mathbf{e}_i$  taban vektörleri kullanılarak  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  olarak gösterilmiştir. Ayrıca,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}$  ise 3üncü derecen permütasyon tensörüdür ve şu şekilde tanımlanır;

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} = \begin{cases} 1 & ; \text{ çift permütasyonlar için } (\boldsymbol{\varepsilon}_{123} = 1) \\ -1 & ; \text{ tek permütasyonlar için } (\boldsymbol{\varepsilon}_{321} = -1) \\ 0 & ; \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.21)$$

(2.20) ifadesinin sıfıra eşit olması için  $\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0$  koşulu sağlanmalıdır. İndis notasyonunda açık olarak yazıldığında,

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = \begin{cases} i = 1 & \text{için} & ; & \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0 \\ i = 2 & \text{için} & ; & \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0 \\ i = 3 & \text{için} & ; & \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

koşulunun sağlanması gerekir. 2nci dereceden bir tensör olan  $\sigma$  için bu koşulun sağlanması tek bir durum için geçerli olabilmektedir. Bu durum da,  $\sigma$ 'nın simetrik olma durumudur,  $\sigma = \sigma^T$ . Cauchy gerilme tensörünün simetrisi ise benzer şekilde diğer gerilme tensörlerine şu şekilde uygulanır,

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^T \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}^T \\ \tau &= \tau^T \\ \mathbf{PF}^T &= (\mathbf{PF}^T)^T \end{aligned} \quad (2.23)$$

### Enerjinin korunumu

Termodinamiğin 1.Kuralı olan Enerjinin korunumu kanunu, bir cismin kinetik ve iç enerjilerinin toplamının zamana göre değişiminin, o cismin mekanik ve termal güç çıktılarının toplamına eşit olduğunu belirtmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbb{K} + \mathbb{E}) &= \mathbb{P}_e + \mathbb{Q} \\ \mathbb{K} &= \int_{\mathcal{B}_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv \\ \mathbb{E} &= \int_{\mathcal{B}_t} \rho e(\mathbf{x}, t) dv \\ \mathbb{P}_e &= \int_{\mathcal{B}_t} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da \\ \mathbb{Q} &= \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{r} dv - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da \end{aligned} \quad (2.24)$$

(2.24) ile verilen denklem setinde  $\mathbb{K}$  kinetik enerjiyi,  $\mathbb{E}$  cismin birim kütledeki iç enerjisi  $e(\mathbf{x}, t)$  ile tanımlanan toplam iç enerjiyi,  $\mathbb{P}_e$  cisim üzerine dışarıdan etkiyen toplam mekanik enerjiyi ve  $\mathbb{Q}$  ise cismin birim kütleli ısı üretimi  $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$  ile, yüzeydeki toplam

ısı akısı  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  üzerinden tanımlanan toplam termal enerjiyi temsil etmektedir. Denklem takımı (2.24) birlikte yazıldığında ve ilgili matematiksel işlemler gerçekleştirildiğinde elde edilen enerji dengesi eşitliği mevcut konumda,

$$\rho \dot{e} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho r = 0 \quad (2.25)$$

elde edilmektedir. Daha önce de tanımlandığı gibi burada  $\nabla_{\mathbf{x}} := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$  ile ifade edilen gradyan operatörüdür.  $\mathbf{d}$  ise daha önce tanımlanan birim şekil değiştirme hızı tensörüdür.

### Entropi eşitsizliği

Termodinamiğin 1.kuralı, iş ve ısının birbirlerine dönüşümünü bir enerji dengesi olarak formülize eder. Ancak, bu dönüşümün yönü konusunda her hangi bir kısıtlama sunmaz. Klasik lineer mekanikte (parçaçıkların ya da rijit cisimlerin mekaniğinde), kinetik ve potansiyel enerjiler, sürtünmenin yokluğunda birbirine tamamen dönüşür. Termal ve deforme olabilen mekanik sistemlerin mekaniğinde ise bu dönüşümün her zaman bir tercih edilen yönü vardır. Bu tercih edilen yön, matematiksel olarak bir eşitsizlikle ifade edilir. Bu eşitsizlik ise, sistemin iç entropi üretiminin her zaman negatif olmayan bir değer olduğunu ve geri çevrilemeyen işlemlerde ise pozitif değerler alması gerektiğini belirler. Hacim üzerinden alınan integral ifadesi olarak ve birim kütleli entropi üretimi tanımı  $\zeta$  kullanılarak,

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho \zeta dV := \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \eta dV - \int_{\mathcal{B}_t} \frac{\rho r}{\theta} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} da \geq 0 \quad (2.26)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemde  $\eta(\mathbf{x}, t)$ , birim kütledeki spesifik entropi olarak tanımlanır. İntegral ifadesi, cisim üzerindeki her bir nokta için lokalizasyon prensibi uygulandığında,

$$\rho \zeta = \rho \dot{\eta} - \frac{\rho r}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0 \quad (2.27)$$

olarak elde edilir. Literatürde bulunan formu ile yazıldığında ise,

$$\rho \dot{\eta} \geq \frac{\rho r}{\theta} - \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \quad (2.28)$$

Denklem (2.28) ile verilen ifadeye literatürde aynı zamanda Clausius Duhem Eşitsizliği de denilmektedir.

### 2.1.6 Malzeme teorisi temel prensipleri

Sürekli ortamlar mekaniğinin temel tanımları üzerinden formulize edilen malzeme davranışının matematiksel formülasyonlarının geçerli olması için bazı teorik prensiplerin ortaya konulması gerekmektedir. Bu temel prensipler; (a) Belirlilik prensibi, (b) Eşvarlılık prensibi, (c) Yerel etki prensibi ve (d) Geriçevrilmezlik prensibi olarak sıralanırlar.

#### Belirlilik prensibi

Tanımlı her hangi bir malzemenin ya da cismin mevcut durumu deformasyon ve sıcaklık geçmişine ve geçmişe bağlı parametreler ile birebir ilişkilidir. Bu prensip ile istatistiki davranış modelleri ihmal edilmektedir.

#### Eşvarlılık prensibi

Bu faydalı ancak her durumda gerekli olmayan prensip, bir cismi oluşturan malzemenin davranışının tanımlandığı bünye denklemlerinin, aynı bünye değişkenleri kümesine ait olması gerektiğini belirtir.

#### Yerel etki prensibi

Yerel etki prensibi, bir cismin her hangi bir noktasındaki malzeme bünye davranışının, sadece o noktanın sonsuz derece küçük komşuluğundaki bünye davranışına bağlı olduğunu tanımlar. Dolayısıyla, genel deformasyon (ya da hareket) denkleminin sadece ilgili noktadaki gradyanı, ilgili noktadaki malzeme davranışını tanımlamaya yetmektedir. Sonuç olarak, bünye denklemlerinin 1nci dereceden gradyan olan deformasyon gradyanı üzerinden formulize edilmesi yeterlidir. Daha yüksek dereceden gradyanların kullanılmasına gerek duyulmamaktadır. İfade olarak tanımlanırsa,

$$\text{Lin}\varphi_t(\mathbf{X}) = \varphi_t(\mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{X}}\varphi_t(\mathbf{X}) \cdot \Delta\mathbf{X} \quad (2.29)$$

elde edilir. Bir diğer deyişle, denklem (2.29), genel deformasyon fonksiyonunun ilgili noktadaki Taylor Serisi açılımıdır. Bu açılımdaki  $\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_t(\mathbf{X})$  terimi ise, daha önce de  $\mathbf{F}$  ile tanımlanmış olan deformasyon gradyanıdır. Bu durumda, bünye denklemleri sonucunda elde edilen ilgili gerilme ve ısı denklemleri deformasyon gradyanı, sıcaklık ve sıcaklık gradyanına bağlı olmaktadır.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{x}}\theta) \\ \eta &= \hat{\eta}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{x}}\theta) \\ \mathbf{q} &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{x}}\theta)\end{aligned}\quad (2.30)$$

### Gerçekleştirilmezlik prensibi

Gerçekleştirilmezlik prensibi, malzeme bünye denklemlerinin termodinamiğin 2nci kuralına uyumlu olarak formülize edilmesi gerekliliğinin sağlanmasıdır. Böylelikle malzeme üzerindeki geri çevrilemez etkiler tanımlanmış olur. Bu prensibe uyan denklemlere ise literatürde termodinamik olarak uyumlu denklemler denilmektedir. Bu prensip, denklem Clausius Duhem Eşitsizliği'nin (2.28), sağlanması ile gerçekleşir. Enerji dağılımı'nın  $\mathcal{D} := \theta\zeta \geq 0$  olarak tanımlanması ve Enerji korunumu denklemi (2.25)'nin Clausius Duhem Eşitsizliği içine gömülmesi ile elde edilen enerji dağılımı ifadesi,

$$\rho\mathcal{D} := \rho\theta\zeta = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho\dot{e} + \rho\theta\dot{\eta} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\theta \geq 0 \quad (2.31)$$

olarak elde edilir. Denklem (2.31) incelendiğinde, ilk 3 teriminin yerel değişkenlerin zamana bağlı türevleri oldukları görünmekle birlikte, son terimin içerdiği sıcaklık gradyanı ifadesi  $\nabla_{\mathbf{x}}\theta$  sebebiyle geçişken bir ifade olduğu görülür. Bu durumda Clausius Duhem eşitsizliği yerel ve geçişken olarak iki parçaya ayrılabilir.

$$\begin{aligned}\rho\mathcal{D} &= \rho\mathcal{D}_y + \rho\mathcal{D}_g \\ \rho\mathcal{D}_y &:= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho\dot{e} + \rho\theta\dot{\eta} \geq 0 \\ \rho\mathcal{D}_g &:= -\frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\theta \geq 0\end{aligned}\quad (2.32)$$

Bu terimlerden yerel olanı literatürde Clausius Planck eşitsizliği olarak isimlendirilirken, geçişken ifade ise Fourier eşitsizliği olarak bilinmektedir. Katı mekaniğinde iç enerji olarak tanımlanan  $e$  yerine Helmholtz serbest enerji fonksiyonu daha çok kul-



lanılmaktadır. Bu durumda Helmholtz serbest eberji fonksiyonu  $\psi := e + \theta\eta$  ve zamana bağlı değişimi  $\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{\theta}\eta - \theta\dot{\eta}$  kullanıldığında Clausius Planck eşitsizliği için aşağıda verilen ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}\rho \mathcal{D}_y &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{\theta} \geq 0 \\ &= \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 \dot{\psi} - \rho_0 \eta \dot{\theta} \geq 0 \\ &= \mathbf{S} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} - \rho_0 \dot{\psi} - \rho_0 \eta \dot{\theta} \geq 0\end{aligned}\quad (2.33)$$

Denklem (2.33)'te verilen ifadeler cismin mevcut ve referans konumlarına göre verilen ifadeler olup  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$ ,  $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$  ve  $\mathbf{S} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}$  ifadelerindeki gerilme ve deformasyon terimleri birbirlerinin yapılan iş yönünden eşlenik terimleri olarak isimlendirilirler.

### Coleman açığa çıkarma yöntemi

Malzeme içinde bulunan enerjinin Helmholtz serbest enerjisi ile tanımlanması durumu ele alındığında, bu serbest enerji yerel etki ve ervalılık prensiplerine bağlı olarak, termoe- lastik bir problem ele alındığında, deformasyon gradyanı, sıcaklık ve sıcaklık gradyanına bağlı bir fonksiyon ile matematiksel olarak ifade edilmelidir.

$$\begin{aligned}\psi &= \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta, \nabla_{\mathbf{x}}\theta) \\ \mathbf{P} &= \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \theta, \nabla_{\mathbf{x}}\theta) \\ \mathbf{Q} &= \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{F}, \theta, \nabla_{\mathbf{x}}\theta)\end{aligned}\quad (2.34)$$

Kapalı hali tanımlanmış Helmholtz serbest enerji fonksiyonun zamana bağlı değişim değeri ise,

$$\dot{\psi} = \partial_{\mathbf{F}}\psi : \dot{\mathbf{F}} + \partial_{\theta}\psi \dot{\theta} + \partial_{\nabla_{\mathbf{x}}}\psi : \overline{\nabla_{\mathbf{x}}\dot{\theta}} \quad (2.35)$$

olarak elde edilir. Burada  $\partial_a B$  ifadesi ilgili  $B$  teriminin  $a$  değişkenine göre türevini sembolize etmektedir. (2.35)'in (2.34) içersine gömülmesi ile elde edilen enerji dağılımının yerel hali,

$$\rho_0 \mathcal{D}_y = [\mathbf{P} - \rho_0 \partial_{\mathbf{F}}\psi] : \dot{\mathbf{F}} + \rho_0 [\eta + \partial_{\theta}\psi] \dot{\theta} - \rho_0 \partial_{\nabla_{\mathbf{x}}}\psi \cdot \overline{\nabla_{\mathbf{x}}\dot{\theta}} = 0 \quad (2.36)$$

(2.36)'deki denklemin sağlanması için  $\dot{\mathbf{F}}, \dot{\theta}$  ve  $\overline{\nabla_{\mathbf{x}}\dot{\theta}}$  ifadelerinin rastgele alacağı değerleri

için parantez içindeki ifadelerin sıfır olması gerekmektedir.

$$[\mathbf{P} - \rho_0 \partial_{\mathbf{F}} \psi] = 0; \quad [\eta + \partial_{\theta} \psi] = 0; \quad \partial_{\nabla_{\mathbf{x}}} \psi = 0 \quad (2.37)$$

Bu durumda, Coleman açığa çıkarma yöntemine göre, termoelastik bir cisim için aşağıda verilen denklemlerin, yine verilen fonksiyonlar üzerinden sağlanması gerekmektedir;

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \rho_0 \partial_{\mathbf{F}} \psi(\mathbf{F}, \theta) \\ \eta &= -\partial_{\theta} \psi(\mathbf{F}, \theta) \\ \psi &= \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta) \\ \mathbf{Q} &= \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{F}, \theta, \nabla_{\mathbf{x}} \theta) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Elde edilen denklem (2.38) ile Helmholtz serbest enerjisinin, sürekli ortamlarda termodinamik olarak uygun malzeme modellenmesi için gerilme ve entropinin değerlerinin bağlı olduğu temel bir bünye denklemi olduğu tanımlanmaktadır.

### Bünye denklemlerinin dönüştürülebilirliği ilkesi

Helmholtz serbest enerjisi kullanılarak malzeme davranışını karakterize eden bünye denklemleri skalar değerli bir tensör fonksiyonundan türetilmektedir. Skalar değerler alan bir tensör fonksiyonunun, rijit cisim hareketleri durumunda değerinin değişmemesi gerekmektedir. Bir diğer deyişle, cisimler üzerine uygulanan rijit cisim hareketlerinin, cisim tarafından saklanabilecek deformasyon enerjisini değiştirmemesi gerekmektedir. Bu ilkeye, bünye denklemlerinin birbirleri arasındaki dönüşümü ilkesi denmektedir. Matematiksel olarak ifade edilirse, serbest enerji fonksiyonunun değişmemesi  $\psi(\mathbf{F}, \theta) = \psi(\bar{\mathbf{F}}, \theta)$  eşitliğini sağlamalıdır. Burada  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\mathbf{F}$  olarak tanımlanmış olup,  $\mathbf{Q}$ , sıradan bir ortogonal rotasyon tensörüdür.  $\mathbf{Q}$  tensörünün ortogonal olması  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1}$  şeklinde dönüşüme olanak sağlayacağından, sağ Cauchy Green deformasyon tensörü de deformasyon gradyanı yerine Helmholtz serbest enerji denkleminde kullanılabilir,  $\psi(\mathbf{F}, \theta) = \bar{\psi}(\mathbf{C}, \theta)$  ve  $\psi = \bar{\psi}$ . Bu durumda,

$$[\mathbf{P} - \rho_0 \partial_{\mathbf{F}} \psi] : \dot{\mathbf{F}} = [\mathbf{S} - \rho_0 2 \partial_{\mathbf{C}} \bar{\psi}] : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \quad (2.39)$$

olacaktır. Bu da 2. Piola Kirchhoff gerilme tensörünün fonksiyonel ifadesi olan  $\mathbf{S} = 2\rho_0\partial_{\mathbf{C}}\bar{\psi}(\mathbf{C}) = \bar{\mathbf{S}}$ . eşitliğidir. Dolayısıyla, temel deformasyon tensörleri olan  $\mathbf{F}$  ve  $\mathbf{C}$  cinsinden yazılabilmesi sağlanmaktadır.

### 2.1.7 Sonlu deformasyon bünye denklemleri

Yüksek deformasyon ve birim şekil değiştirme gösteren malzemelerin bünye denklemlerinin tanımlanması için temelde iki farklı yaklaşım bulunmaktadır. Bunlar;

- 1- Hiperelastik bünye denklemleri teorisi
- 2- Hipoelastik bünye denklemleri teorisi

olarak isimlendirilir.

#### Hiperelastik bünye denklemleri teorisi

Sonlu hiperelastisite teorisi olarak da isimlendirilen bu formulasyon, birim *hacim* üzerinden tanımlanan bir Helmholtz serbest enerji fonksiyonu kullanarak, bünye denklemlerini termodinamik ilkelere uyumlu olarak formulize eder. Temel anlamda, denklem (2.33) ile verilen Clausius Planck eşitsizliğinden ve  $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}$  gerilme-deformasyon iş eşitliğini kullanarak, farklı gerilmeler, Helmholtz serbest enerjisinden, basit izotermal durumlar için, aşağıdaki denklemler ile elde edilebilmektedir.

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \partial_{\mathbf{F}}\psi(\mathbf{F}) \\ \mathbf{S} &= 2\partial_{\mathbf{C}}\bar{\psi}(\mathbf{C}) = \partial_{\mathbf{E}}\bar{\psi}(\mathbf{C}) \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{F}[2\partial_{\mathbf{C}}\bar{\psi}]\mathbf{F}^T\end{aligned}\tag{2.40}$$

Burada, bünye denklemlerinin dönüştürülebilirliği ilkesi ile tanımlanan deformasyon gradyanı  $\mathbf{F}$  ve sağ Cauchy Green deformasyon tensörü  $\mathbf{C}$  üzerinden tanımlanan Helmholtz serbest enerji fonksiyonları eşitliği prensibi de kullanılmıştır.

Başlangıç sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar yöntemiyle gerçekleştirilen doğrusal olmayan nümerik analizlerinde, diferansiyel denklemlerin doğrusallaştırılmasında kullanılan Newton-tipi iteratif çözücüler, gerilmeler ile ilgili deformasyon birimleri arasındaki zamana bağlı değişim bağıntısına ihtiyaç duyarlar. Bu bağıntıyı sağlayan 4.dereceden tensöre elastisite tensörleri, ya da tanjant modül tensörleri denilmektedir. Bu tensörler,

tanımlanan Helmholtz serbest enerjisi fonksiyonundan direkt olarak türetilirler. Burada bahsedilmesi gereken bir diğer nokta ise, mühendislik yaklaşımında genellikle polimer veya kauçuk malzemeler için kullanılan hiperelastik davranışın, tanımlanan sonlu deformasyon hiperelastik modelin özel bir alt kolu olduğudur. Diğer bir deyişle, burada tanımlanan model, yüksek deformasyon gösteren tüm modelleri kapsayan bir çatı durumundadır.

İki ayaklı formülasyon ele alınırsa ( $\mathbf{P} - \mathbf{F}$ ), 1.Elastisite tensörü  $\mathbb{A}$ ;

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbb{A} : \dot{\mathbf{F}} \quad ; \quad \dot{\mathbf{P}} = \partial_{\mathbf{FF}}^2 \psi : \dot{\mathbf{F}} \quad ; \quad \mathbb{A} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} = \partial_{\mathbf{F}} \mathbf{P} \quad (2.41)$$

olarak elde edilir. Referans konumda tanımlana serbest enerji fonksiyonu üzerinden gidilirse, referans konum elastisite tensörü  $\mathbb{C}_r$ ;

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C}_r : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \quad ; \quad \dot{\mathbf{S}} = 4 \partial_{\mathbf{CC}}^2 \bar{\psi} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \quad ; \quad \mathbb{C}_r = 4 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.42)$$

olarak elde edilir. Mevcut konumda ise tanımlanan tensöre mevcut konum elastisite tensörü ismi verilir.  $\mathbb{C}_m$  ile tanımlanan bu tensör ise;

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbb{C}_m : \mathbf{d} \quad ; \quad \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = 4 \partial_{\mathbf{gg}}^2 \psi : \frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{g} \quad ; \quad \mathbb{C}_m = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} = 2 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{g}} \quad (2.43)$$

ile elde edilir. Burada  $\mathcal{L}_v$  Lie türevi operatörü ve  $\mathbf{g}$  mevcut konumdaki eğrisel koordinatları tanımlayan metrik tensördür.

### Hipoelastik bünye denklemleri teorisi

Hipoelastik bünye denklemleri teorisinde Cauchy gerilmesinin zamana bağlı değişimi  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ , 4.derecen bir tensör ile mevcut konumdaki deformasyon hızına  $\mathbf{d}$  bağıntılanmıştır. Formülasyon, malzemedeki elastik deformasyonun inelastik deformasyona göre çok küçük olduğu yaklaşımı üzerinden gidildiğinde nümerik olarak oldukça basit bir ifadeye dönüşmektedir. Kauçuk ve polimer harici diğer mühendislik malzemelerinin çok yüksek de-

formasyon göstermediği ele alındığında, bu basit formulasyon oldukça güvenilir ve hızlı sonuçlar verebilmektedir. Hiperelastik formulasyondan en önemli farkı, elastisite tensörlerinin tanımlanması için bir serbest enerji potansiyeline ihtiyaç duyulmamasıdır. İzotermal durum ele alınırsa,

$$\dot{\sigma} = \mathbb{C}_e : \mathbf{d}^e \quad (2.44)$$

olarak fomulize edilir. Burada  $\mathbb{C}^e$ , doğrusal elastik modül tensörü ve  $\mathbf{d}^e$  ise elastik deformasyon hızı tensörüdür. Bir enerji potansiyeli üzerinden tanımlanmadığı için, gerilmelerin objektif olması ilkesine aykırı olmaması açısından, Cauchy gerilme tensörünün zamana bağlı türevi, literatürdeki objektif gerilme hızı modellerinden birisi (Jaumann, Green-Naghdi..vb) üzerinden formülize edilmelidir,  $\sigma^{\nabla} = \mathbb{C}_e^{\nabla} : \mathbf{d}^e$ .

Jaumann gerilme hızı denklemi ile formulize edilmesi durumunda,  $\sigma^{\nabla J} = \dot{\sigma} - \mathbf{w}\sigma + \sigma\mathbf{w}$  ile tanımlanır. Green-Naghdi gerilme hızı denkleme ile kullanıldığında ise,  $\sigma^{\nabla G} = \dot{\sigma} - \Omega\sigma + \sigma\Omega$  ile tanımlanır. Burada  $\mathbf{w}$  hız gradyanının anti-simetrisi olarak tanımlanırken,  $\Omega$  ise,  $\Omega = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$  olarak ifadelenir.  $\mathbf{R}$  ise, deformasyon gradyanının polar ayrıştırma teoreminden gelen rijit cisim rotasyonlarını barındıran kısmıdır.

## 2.2 Malzeme Bünye Modelleri

### 2.2.1 Boşluk büyümesi modelleri

1950'li yıllardan beri yapılan deneyler ve gözlemlere dayanarak sünek metallerdeki plastik şekil değiştirme ve kırılma davranışının mekanizması üç farklı faza ayrılmıştır. Bu fazlar, (a) Gözenek/Boşluk oluşumu başlangıcı (b) Oluşan gözenek/boşlukların büyümesi (c) Büyüyen gözenek/boşlukların birbirleri ile aniden birleşmesi ve gözenekler arasında kalan matris yapısının boyun vermesi ile gelişen dengesizlik (instabilite) ile gelilen kırılma olarak tanımlanmıştır.

Tüm sünek metallere, imalatları süresince, farklı bölgelerinin farklı zamanlarda soğumaları veya içlerine katılan alaşım malzemeleri sebebiyle tane sınırları (grain boundary) oluşturmaktadırlar. Her tane sınırının da komşu sınır bölgeleri arasındaki düzensizliklerden dolayı boşluklar oluşabilmektedir. Veya bünyelerine katılan farklı tiplerdeki alaşım mad-

deleri, matris yapısından farklı mekanik karakteristik göstereceğinden dolayı, yükleme altında matristen farklı oranlarda deformasyon göstererek bu boşlukların oluşumuna katkı sağlayabilirler.

Deneyleer ile gözlemlenen bu deformasyon mekanizmasını matematiksel olarak tanımlayabilmek için literatürde farklı yöntemler geliştirilmiştir (Rice ve Thomson 1974, Curry ve Knott 1976, Needleman ve Tvergaard 1998, 2000, Shterenlikht 2003). Kendinden önce yapılan çalışmaları baz alarak bir boşluk modeli geliştiren Gurson (1977), içinde boşluklar bolunan sünek metallerin akma potansiyel fonksiyonu için günümüzde Gurson plastisite modeli olarak isimlendirilen bir model geliştirmiştir. Maksimum plastik iş prensibi ve kinematik olarak izin verilen hız vektörlerini baz alarak, küresel ve silindirik boşlukların büyümesi için;

$$\phi^p = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^2 + 2f \cosh \left( \frac{\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]}{2\sigma_y} \right) - [1 + f^2] = 0 \quad (2.45)$$

ile verilen plastik potansiyel fonksiyonunu elde etmiştir. Bu denklemde  $f$ , boşluk-hacim oranı parametresidir. Boşluk-hacim oranı parametresinin deformasyona bağlı değişimi ise,

$$\dot{f} = \dot{f}_g + \dot{f}_n \quad (2.46)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada  $\dot{f}_g$  malzeme bünyesinde mevcutta var olan boşlukların büyüme değişimini,  $\dot{f}_n$  ise yeni boşluk oluşum değişimini temsil etmektedir. Var olan boşlukların büyümesi için Gurson (1977), sadece volumetrik büyüme tanımlamıştır;

$$\dot{f}_g = (1 - f)\text{tr}[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p] \quad (2.47)$$

Gurson tarafından öne sürülen bu teori, kayma gerilmelerinin dominant olduğu, başlangıç durumunda her hangi bir kusur (imperfection) olmayan ve gerinimlerin lokalize olduğu bir yüklemeye uygulanırsa, malzeme matrisinin kırıldığı durumda elde edilen gerinim değerlerinin gerçekten oldukça fazla olduğu görülmüştür. Bu durum, Gurson modelinin gerçeğe yakın sonuç üretmesi için, bakir malzeme bünyesinde kusur olması (initial imperfection) gerekliliğini göstermiştir. Buradan yola çıkılarak, Tvergaard (1981, 1982a,

1982b) tarafından iki ek parametre,  $q_1$  ve  $q_2$ , eklenmiştir.

$$\phi^p = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left( \frac{q_2 \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]}{2\sigma_y} \right) + [1 + (q_1 f)^2] = 0 \quad (2.48)$$

Tvergaard tarafından önerilen bu plastik potansiyelin çıktıları, deneysel sonuçlar ile karşılaştırıldığında, özel koşullar haricinde  $q_1 = 1.5$  ve  $q_2 = 1.0$  olarak önerilmiştir. Önerilen Gurson modelinin sadece boşluk oluşumu ve büyümesini ele alması üzerine, Tvergaard ve Needleman (1984) tarafından boşluk birleşmesi ve matris instabilitesi ile birlikte gelişen kırılmanın modellenmesi için  $f$  için ek bir model önerilmiştir.

$$f^*(f) = \begin{cases} f & , f \leq f_c \\ f_c + [f_u^* - f_c] \frac{[f - f_c]}{[f_F - f_c]} & , f > f_c \end{cases} \quad (2.49)$$

Boşluk birleşmesini tanımlayan bu eklentide,  $f_c$  matris instabilitesinin başlangıcını belirten kritik boşluk-hacim oranı,  $f_f$  ise son kırılma anındaki boşluk-hacim oranı olarak belirtilmiştir.

Tvergaard (1989), Tvergaard ve Needleman (1998) tarafından getirilen modifikasyonlar ile birlikte Gurson modeli literatürde "Gurson-Tvergaard-Needleman Modeli" (GTN) olarak isimlendirilmiştir. GTN modeli üzerinde Chu ve Needleman (1980) ile, Nashson ve Hutchinson (2008) tarafından önerilen teoremler ile günümüzde boşluk büyümesinin istatistiksel yapısı ile, boşluk büyümesinin kayma ve normal gerilmeler etkisi altındaki büyümeler de modellenenmektedir.

### 2.2.2 Plastik deformasyonun termodinamiği

Gurson tarafından modelin tamamlanması termodinamik temeller üzerinden formülize edilmesi gerekmektedir. Bu noktada enerji dağılımı denklemi ve Coleman açığa çıkarma yöntemi kullanılmaktadır. Malzeme bünyesi içinde depolanan enerjinin miktarı Helmholtz serbest enerji fonksiyonu üzerinden tanımlanmaktadır. İzotrop doğrusal elastik davranış ve küçük şekil değişimlerine uğrayan bir malzeme izotermal koşullarda ele alındığında, serbest enerji fonksiyonu;

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon^e, \alpha, \alpha) &= \psi(\varepsilon^e) + \psi(\alpha) + \psi(\alpha) \\ \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^p\end{aligned}\tag{2.50}$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $\psi(\alpha)$  izotrop pekleşme,  $\psi(\alpha)$  ise kinematik pekleşme potansiyellerini ifade etmektedir. Termal etkilerin ihmal edildiği durumda Clausius Planck enerji dağılım eşitsizliği ve Coleman açığa çıkarma yöntemi kullanılarak gerilme ve gerilme eşlenik değişkenleri;

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \partial_{\varepsilon^e} \psi : \dot{\varepsilon}^e + \partial_{\alpha} \psi : \dot{\alpha} + \partial_{\alpha} \psi \dot{\alpha} \\ \rho \mathcal{D}_g &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} \geq 0 \\ &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\beta} : \dot{\alpha} - \dot{\beta} \dot{\alpha} \geq 0\end{aligned}\tag{2.51}$$

olarak elde edilir. Burada gerilme tensörü  $\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\varepsilon^e} \psi$  olarak elde edilir. Ayrıca kinematik pekleşme iç gerilme tensörü  $\boldsymbol{\beta} := -\partial_{\alpha} \psi$  ve izotrop pekleşme iç kuvveti ise  $\dot{\beta} := \partial_{\alpha} \psi$  olarak tanımlanmıştır.

Denklem (2.51) ile verilen enerji eşitsizliğini minimize etmek için Lagrange çarpanı tipi enerji maksimizasyon problemi kullanılırsa, enerji dağılımının negatif hali, Lagrange çarpanı  $\lambda$  ve  $\phi$  kullanılarak,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha, \alpha) = -\boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\beta} : \dot{\alpha} - \dot{\beta} \dot{\alpha} + \lambda \phi \longrightarrow \text{Sabit}\tag{2.52}$$

şeklinde ifade edilir. Optimizasyon problemi olarak çözüldüğünde, plastik şekil değişimi, kinematik ve izotrop pekleşme parametrelerinin zamana bağlı değişimleri,

$$\begin{aligned}\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{L} &= -\dot{\varepsilon}^p + \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi = 0 \longrightarrow \dot{\varepsilon}^p = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi \\ \partial_{\boldsymbol{\beta}} \mathcal{L} &= -\dot{\alpha} + \lambda \partial_{\boldsymbol{\beta}} \phi = 0 \longrightarrow \dot{\alpha} = \lambda \partial_{\boldsymbol{\beta}} \phi \\ \partial_{\dot{\beta}} \mathcal{L} &= \dot{\alpha} + \lambda \partial_{\dot{\beta}} \phi = 0 \longrightarrow \dot{\alpha} = -\lambda \partial_{\dot{\beta}} \phi\end{aligned}\tag{2.53}$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu eşitliklerde  $\phi$  malzeme bünyesinde dağılım gösteren ve geri çevrilemez olan plastik potansiyel fonksiyonunu,  $\lambda$  ise plastik deformasyonu karakterize eden Lagrange parametresini temsil etmektedir. Lagrange optimizasyonunun çözümü ise  $\phi$  ve  $\lambda$ 'nın belirli koşulları altında geçerlidir.  $\lambda \geq 0$ ,  $\phi \leq 0$  ve  $\lambda \phi = 0$  olarak sınırlandırılan bu koşullar literatürde Karush-Kuhn-Tucker optimizasyon durumu olarak



da isimlendirilmektedir. Bu parametrelerde  $\lambda \geq 0$  koşulu ile plastik şekil değişiminin hiç bir zaman negatif değerler alamayacağı matematiksel olarak şart koşularken,  $\phi \leq 0$  durumu ise, plastik potansiyel olarak isimlendirilmiş fonksiyonun 3-boyutlu gerilme uzayında belirli bir bölgeyi tanımlamasını sağlamaktadır. Buradan yola çıkılarak  $\phi \leq 0$  eşitsizliğini sağlayan bölge 3-boyutlu gerilme uzayında elastik bölge,  $\phi \geq 0$  olan bölge ise plastik bölge olarak isimlendirilmiştir. Bu potansiyel, gerilme uzayında ve 3 boyutta bir yüzey denklemini karakterize ettiği için, literatürde akma yüzeyi (yield surface) olarak da isimlendirilmektedir.

Gerilme uzayında  $\phi \geq 0$  koşulunu sağlayan bir nokta, matematiksel olarak plastik deformasyonun olduğu bölgeyi temsil etmekte ve enerji minimizasyonu adına  $\phi = 0$  durumunu karşılayacağı yere kadar plastik şekil değişimi göstererek gerilme durumunu yenileyecektir. Yeni pozisyonunda dış kuvvet ve iç direnç dengesi sağlanmış olacaktır. Bahsedilen bu denge konumunu analitik ve 3 boyutlu olarak çözmek her durumda mümkün olmadığından, nümerik iteratif yöntemler bu noktada devreye girmektedir. Problemin ve plastik potansiyel fonksiyonunun kompleksliğine göre literatürde kapalı (implicit) ya da açık (explicit) olarak farklı integrasyon algoritmaları kullanılmaktadır (Simo ve Hughes 1998, Ortiz ve Simo 1986).

Burada verilen teorik çerçeve sadece Gurson modeli değil, doğrusal ve doğrusal olmayan Helmholtz elastik enerji fonksiyonları  $\psi$ , ve  $\phi$  ile tanımlanmış farklı plastik potansiyeller kullanılarak tüm elastoplastik malzeme modeli tanımlamalarında kullanılabilir.

### 2.2.3 Hasar mekaniği modelleri

Deformasyon altındaki malzemelerde oluşan hasarın, bir hasar parametresi ile modellenmesi 1950'li yıllarda tanımlanmış olsa bile, Rabotnov (1969) ve Kachanov (1958) çalışmaları ile birlikte matematiksel bir hasar parametresi  $d$  ve efektif gerilme  $\bar{\sigma}$  konseptleri ortaya konmuştur.

Hasar parametresi ve hasar almış malzeme konsepti, bünyesinde kusur/hasar ihtiva eden temsili bir malzeme hacmini ele alır. Bu temsili hacmin normali  $\mathbf{n}$  olan sıradan bir düzlem ile kesişimi ile oluşan alan  $S$  ve temsili hacimdeki boşluk/çatlak/kusurların aynı

düzlem üzerinde oluşturdukları alan  $S_d$  ile tanımlanırsa, bu durumdaki hasar parametresi  $d(\mathbf{n}) = \frac{S_d(\mathbf{n})}{S}$  ile tanımlanır. Bu durumda  $d = 0$  olduğu durumda temsili hacim üzerinde her hangi bir hasar oluşmadığı varsayıldığı gibi,  $d = 1$  olduğunda da temsili hacmin artık her hangi bir yük taşıma kapasitesi olmadığı tanımlanmıştır. Genelleştirildiğinde ise,  $0 \leq S_d(\mathbf{n}) \leq S$  elde edilmektedir. Hasar parametresinin, tanımlı düzlemin oryantasyonuna bağlı olmadığı durumda ise  $d = \frac{S_d}{S}$  olarak elde edilir ve izotrop hasar parametresi olarak adlandırılır.

Lemaitre (1996), Lemaitre ve Desmorat (2005) tarafından tanımlanan ve günümüzde sıklıkla kullanılan sünek hasar modeline göre; gerinimler üzerinden formülize edilmiş, hasarlı malzeme için tanımlanmış her hangi bir malzeme bünye denklemi, aynı malzemenin hiç hasar almamış (bakir) hali için önerilen bünye denklemleri ile aynı şekilde formülize edilir. Bu durumda tek fark, gerilme tensörü yerine "efektif" gerilme tensörlerinin tanımlanmasıdır. Efektif gerilme ise izotrop malzemeler için  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d}$  olarak elde edilmektedir.

Hasar parametresi ve efektif gerilme tanımları baz alınarak sünek metaller için izotrop hasar değişimi ve modeli geliştirilmiştir. Bu modelde hasarın değişimi;

$$\dot{d} = \left[ \frac{A^2}{2ES_0} \left( \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right) (\epsilon_{eq}^p)^{\frac{2}{n}} \right]^{s_0} \dot{\epsilon}_{eq}^p \quad (2.54)$$

olarak ifaedilmiştir. Lemaitre modelinde  $A$  ve  $n$  Ramberg-Osgood tipi nonlinear plastik pekleşme kuralı;

$$\epsilon^p = \left( \frac{\bar{\sigma}}{A} \right)^n \quad (2.55)$$

$S_0$  ve  $s_0$  ise Lemaitre tarafından önerilen hasar değişimi kuralı parametreleridir.

$$\dot{d} = \left( \frac{-Y}{S_0} \right)^{s_0+1} \dot{\epsilon}_{eq}^p \quad (2.56)$$

Burada ek olarak tanımlanan  $Y$ , gerinim enerjisi açığa çıkma hızı olarak isimlendirilmektedir. Bu model, sünek metaller baz alınarak geliştirilmiş olsa bile, gevrek metallerde de başarı ile uygulanan bir modeldir. Model temel olarak sürekli ortamlar mekaniği temelinde de formülize edilebilmiştir. Lemaitre modeli oldukça başka ve kompleks sünek

hasar modellerinin geliştirilmesine dayanak olmuştur (Chaboche ve ark. 2006, Pijaudier-Cabot ve Bazant 1987, Bazant ve ark. 1984).

#### 2.2.4 Hasar mekaniğinin termodinamiği

Her enerji dağıtan malzeme modeli gibi, hasar mekaniği modelleri de termodinamik ilkelere uygun olma ve yine o ilkeler ile formulize edilebilmelidir. Tıpkı plastik deformasyon gibi, bünyesinde hasar oluşumu gözlenmiş malzeme, hasar gelişimi işlemi süresince enerji dağıtır, bir diğer deyişle termodinamik olarak geri çevrilemez bir prosestir.

Plastik deformasyonun termodinamiğinde tanımlanan Helmholtz serbest enerji fonksiyonu, malzeme bünyesinde hasar oluşması durumunda, hasar parametresi olarak isimlendirilen ek bir iç parametre almalıdır.

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon^e, d, \alpha, \dot{\alpha}) &= \psi(\varepsilon^e, d) + \psi(\alpha) + \psi(\dot{\alpha}) \\ \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^p\end{aligned}\quad (2.57)$$

Denklem (2.57) ile verilen serbest enerji fonksiyonunda hasar, malzemenin elastik enerji fonksiyonuna  $d$  parametresi üzerinden etki etmektedir. Benzer şekilde, termodinamiğin geri dönüşümsüz prensibinden yola çıkarak ve Clausius Planck eşitsizliği kullanılarak serbest enerji fonksiyonunun zamana bağlı değişimi ve enerji dağılımı,

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \partial_{\varepsilon^e} \psi : \dot{\varepsilon}^e + \partial_d \psi \dot{d} + \partial_{\alpha} \psi : \dot{\alpha} + \partial_{\dot{\alpha}} \psi \dot{\alpha} \\ \rho \mathcal{D}_g &= \sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} \geq 0 \\ &= \sigma : \dot{\varepsilon}^p - Y \dot{d} + \beta : \dot{\alpha} - \beta \dot{\alpha} \geq 0\end{aligned}\quad (2.58)$$

(2.58) ile verilen denklem takımında plastik deformasyona benzer şekilde gerilme tensörü  $\sigma = \partial_{\varepsilon^e} \psi$  ile verilmiş olup, hasar parametresinin iş eşleniği olarak  $Y = \partial_d \psi$  tanımlanmış olup, hasar enerjisi açığa çıkma hızı olarak isimlendirilmiştir. Plastik deformasyonun ölçütü olan plastik gerinimlerin iş eşlenik parametresi gerilme tensörü olduğu gibi, malzeme bünyesinde oluşan hasarın iş eşlenik parametresi de hasar enerjisi açığı çıkışı olarak elde edilir.

Analoji ile, enerji eşitsizliği Lagrange çarpanı tipi enerji maksimizasyonu problemi olarak çözümlerse çözüm denklemi,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, d, \boldsymbol{\alpha}, \alpha) = -\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + Y\dot{d} + \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \beta\dot{\alpha} + \lambda(\phi_p + \phi_d) \longrightarrow \text{Sabit} \quad (2.59)$$

şeklinde olup,  $\phi_p = \hat{\phi}_p(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}, \beta)$  her hangi bir plastik potansiyel,  $\phi_d = \hat{\phi}_d(Y)$  ise hasar potansiyel fonksiyonlarını temsil etmektedir. Burada, tek bir Lagrange parametresi ile elde edilen çözüm, hasar parametresinin değişimini plastik deformasyona  $\lambda$  üzerinden bağlanmıştır. Bir diğer deyişle, plastik deformasyon olduğunda hasar oluşumu görülebilecektir, aksi durumda hasar oluşmayacaktır. Metaller, makro boyutta gevrek davranış gösterebilirler bile, mikro boyutta plastik deformasyonun her daim bulunduğu göz önüne alındığında, tek parametrelili Lagrange optimizasyon probleminin fiziksel doğru bir yaklaşım olduğu açıktır. Diğer taraftan, eğer tam gevrek (her hangi bir plastik deformasyonun olmadığı, elasto-hasar) hasar durumu ele alınırsa, bu durumda iki farklı parametre tanımlanmalıdır. Bu parametrelerden bir tanesi  $\lambda_p$  plastik,  $\lambda_d$  ise hasar parametresini temsil ederek, ilgili  $\phi_p$  plastik potansiyel ve  $\phi_d$  hasar potansiyel fonksiyonlarına önçarpan olarak gelecektir.

Tek parametrelili Lagrange probleminin çözümü ise, plastisiteye benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{L} &= -\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi_p = 0 \longrightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi_p \\ \partial_{\boldsymbol{\beta}} \mathcal{L} &= -\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \lambda \partial_{\boldsymbol{\beta}} \phi_p = 0 \longrightarrow \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda \partial_{\boldsymbol{\beta}} \phi_p \\ \partial_{\beta} \mathcal{L} &= \dot{\alpha} + \lambda \partial_{\beta} \phi_p = 0 \longrightarrow \dot{\alpha} = -\lambda \partial_{\beta} \phi_p \\ \partial_Y \mathcal{L} &= \dot{d} + \lambda \partial_Y \phi_d = 0 \longrightarrow \dot{d} = -\lambda \partial_Y \phi_d \end{aligned} \quad (2.60)$$

olarak elde edilmektedir. Lagrange optimizasyon probleminin hasar parametresinin olduğu durumdaki çözümü, plastisiteye benzer şekilde ilgili Karush-Kuhn-Tucker koşulları altında geçerlidir,  $\lambda \geq 0$ ,  $\phi_d \leq 0$ ,  $\phi_p \leq 0$  ve  $\lambda \phi_d = 0$ ,  $\lambda \phi_p = 0$ . Bu koşullar altında hasar potansiyel fonksiyonun matematiksel formu, plastik potansiyel fonksiyonun formu ile benzer özelliklere sahip olacaktır: sürekli türevelenebilir, hasar enerjisi açığa çıkma hızı üzerinden formülize edilen bir forma sahip olmalıdır.

Tek plastik parametre üzerinden yapılan bu formülasyonda, plastik potansiyel fonksiyonuna benzer şekilde, hasar oluşumu  $\lambda \geq 0$  ve  $\phi_d \geq 0$  durumları oluştuğunda gerçekleş-

cek, hasar ilerlemesinin değişimi ise nümerik olarak  $\phi_d = 0$  eşitliği baz alınarak algoritmik olarak çözülebilir hale gelecektir.



### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1 Hipoelastik Yaklaşım

Metallik malzemelerdeki en çok görülen iki kırılma mekanizmasının sünek ve gevrek kırılmalar olduğu bilinmektedir. Malzeme bünyesindeki mikro-boşlukların oluşumu, büyümesi ve birleşmesi ile karakterize olan kırılmaya sünek kırılma denirken, mikro çatlakların oluşumu büyümesi ve hızlı bir şekilde taneciklerin yarılması (cleavage) ile karakterize olan kırılma tipine ise gevrek kırılma denilmektedir. Literatürde boşluk büyümesini modelleyen plastisite modellerinden Gurson modeli oldukça yaygın kullanılmaktadır. Bu model, plastik deformasyonun hidrostatik gerilmeler ile de ilişkili olduğu bir plastik potansiyelin, rijit-plastik malzeme bünyesi ve limit analizi sonucunda elde edilmektedir. Bu potansiyel daha sonra Tvergaard ve Needleman tarafından modifiye edilmiş, boşluk şekilleri ve boşluk büyümesi etkileri iyileştirilerek, günümüzde "Gurson Tvergaard Needleman" olarak isimlendirilen model haline gelmiştir (Gurson 1977, Tvergaard ve Needleman 1984, Needleman ve Tvergaard 1998, Hakansson ve ark. 2006, Nahshon ve Hutchinson 2008, Nahshon ve Xue 2009).

Diğer taraftan, metalik malzemelerdeki gevrek kırılma, literatürde temel olarak iki farklı model ile tanımlanmıştır. Bu modellerden, belirlenimci (deterministik) olan, kırılmanın oluşması için kritik bir gerilme eşliğinin kritik bir mesafede aşılmış olması gerekliliği temellerine oturtulmuştur. Bir diğer deyişle, gevrek kırılma, maksimum asal gerilmelerin malzeme bünyesindeki belirli bir bölgede, sıcaklık ve yükleme hızından bağımsız bir kritik değeri geçmesi ile oluşmaktadır. Bu model literatürde Ritchie-Knott-Rice (RKR) modeli olarak isimlendirilmiştir (Ritchie ve ark. 1973). RKR modeline alternatif olarak geliştirilen Beremin (Beremin 1983) modeli olarak da isimlendirilen bir başka model de literatürde mevcuttur. RKR modelinden farklı olarak Beremin modeli, (1) gevrek kırılmanın istatistiksel karakteristiğini, (2) metallerde oluşan gevrek kırılmanın çok az miktarda da olsa plastik deformasyon oluşumu göstermesi durumunu baz almaktadır. Her iki model ailesinin metallerdeki gevrek kırılmayı matematiksel olarak bir çok durum için doğru ve kabul edilebilir şekilde modellediği kanıtlanmış olsa da, her iki model ailesi, özellikle gevrek kırılma ile oluşan mikro çatlakların malzeme bünyesinde yarattığı hasar

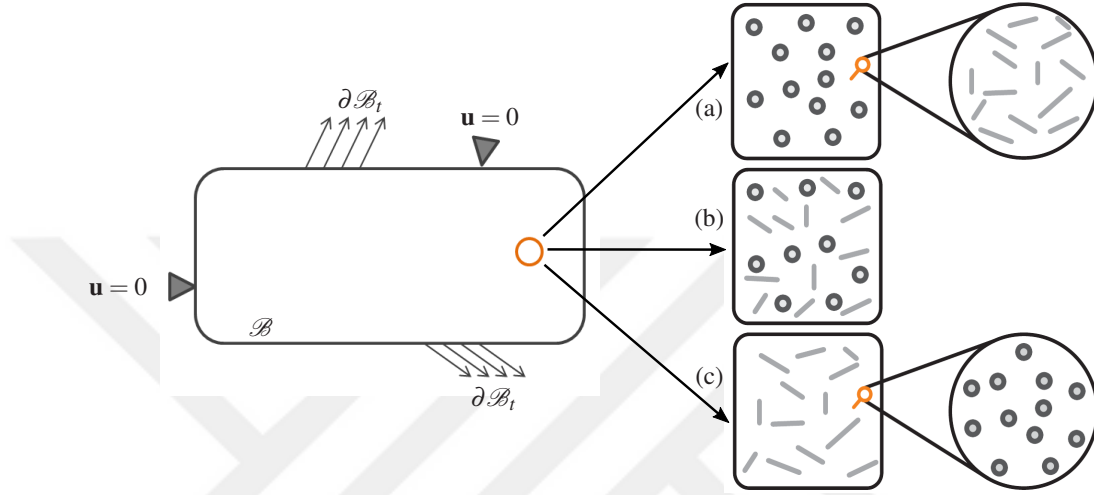
ve katılık azalmasını (stiffness deterioration) tam olarak yansıtamamaktadır. Bir diğer deyişle, her iki model ailesi, kırılma bölgesi etrafında oluşan mikroçatlakların, bünye içerisinde oluşturduğu enerji dağılımını ve ilgili katılık azalmasını termodinamiksel olarak modelleyememektedir.

Metallerdeki kırılma tipi, yükleme hızına, ortam sıcaklığına ve gerilme durumuna göre sünek ya da gevrek olabilmektedir (Curry ve Knott 1976, Anderson 2004). Bu tarz kırılma davranışı literatürde sünek-gevrek geçiş kırılması olarak isimlendirilmiştir. Metallerdeki davranış, ortam sıcaklığı  $22^{\circ}\text{C}$  ve üzeri olduğu durumlarda kırılmanın gözeneklerin büyümesi ile karakterize, tam sünek kırılma olarak oluştuğu gözlemlenmektedir. Mümkün olabilen en düşük sıcaklık limiti olan  $-196^{\circ}\text{C}$  civarında kırılmanın tam olarak gevrek olduğu bilinmektedir. İki sıcaklık bölgesi arasında kalan kısımdaki kırılma davranışı ise geçiş kırılması olarak isimlendirilmektedir. Bu bölgede hem plastik deformasyon ile karakterize olan gözenek büyümesi, hem de mikro çatlakların oluştuğu bölgeler gözükmektedir. Sıcaklık  $22^{\circ}\text{C}$  mertebesine yaklaştıkça kırılma yüzeylerinde gözenekler daha sıklıkla görülürken,  $-196^{\circ}\text{C}$  mertebelerinde ise, gözenek-ler oldukça azalmakta ve kırılma yüzeyi tanecik boyunca ilerlemiş gevrek kırılmaya dönüşmektedir. Plastik deformasyon ve gözeneklerin oluşumu  $-158^{\circ}\text{C}$  mertebelerindeki sıcaklıklara kadar gözükmektedir. Bu durum, plastik deformasyonun, metallerdeki gevrek kırılmanın mühendislik yaklaşımları ile modellenmesinde göz ardı edilemeyecek bir etki olduğunu göstermektedir (Krajcinovic 1981, Lemaitre ve ark. 2000).

Geçiş kırılmasını matematiksel olarak modelleyebilmek adına literatürde farklı yaklaşımlar bulunmaktadır (Needleman ve Tvergaard 2000, Hütter ve ark. 2014, Shterenlikht 2003). Bunlardan en yaygın olanı, Gurson tipi bir plastisite modeli ile, Ritchie-Knott-Rice ya da Beremin tipi bir modeli bağlamak bulunmaktadır. Bu bağlantı, plastik deformasyonun çözülüp, oluşan gerilmeler üzerinden gevrek kırılma değerlendirmesi yapmak üzerine kurulmuştur. Bu tarz yaklaşımlar, yukarıda da bahsedildiği şekilde, gevrek kırılma modellerinin malzeme bünyesindeki katılık azalmasını modelleyemediği yaklaşımlardır. Sünek kırılmayı, mikro-gözenek/boşluk ve mikro çatlakların bir karışımı olarak ele alıp modelleme Chaboche ve arkadaşları tarafından önerilmiştir (Chaboche ve ark. 2006). Bu çalışmada, mikro gözenek ve mikro çatlaklar için ayrı ayrı hasar

parametreleri izotermal koşullar altında tanımlanmış ve sünek kırılma modellenmiştir. Dolayısıyla, ne sıcaklık etkileri ne de gevrek kırılma davranışı, bahsedilen çalışma içerisinde bulunmamaktadır.

Metalik malzeme bünyesinde bulunabilecek mikro gözenek ve mikro çatlaklar Şekil 3.1 ile gösterilmektedir.



**Şekil 3.1.** Malzeme bünyesindeki mikro gözenek ve mikro çatlak dağılım senaryoları (a) Alt ölçeğinde mikro çatlaklar bulunan gözenek oluşumu ağırlıklı durum, (b) Gözenek ve çatlakların eşit oranda ve aynı boyut ölçeğinde bulunduğu durum, (c) Alt ölçeğinde gözeneklerin bulunduğu çatlak oluşumu ağırlıklı durum.

Şekil 3.1a ile mikro gözeneklerin daha baskın ve daha makro boyutta olduğu, gevreğe çok daha yakın bir kırılma konfigürasyonu verilmiştir. Tam tersi olan durum, yani tanecik sınırları ve/veya tanecikler boyunca oluşan çatlakların dominant olduğu gevrek kırılma konfigürasyonu ise Şekil 3.1c ile gösterilmiştir. Şekil 3.1b ile verilen durum ise, eşit oranda gözenek ve çatlak dağılımını belirtmektedir.

Bu çalışma ile önerilen, (a) Şekil 3.1b ile verilen gözenek ve çatlak oluşumlarının aynı malzeme ölçeğinde birlikte varolduğu durumu modelleyebilecek bir termomekanik sonlu deformasyon plastisite ve hasar mekaniği bağlantılı bir malzeme modeli geliştirmek, (b) geliştirilen bu modeli Küçük Zımba Kırılma Testlerine (Small punch fracture tests) uygulayarak, P91 ferritik çelik için sıcaklık tabanlı geçiş kırılmasını testler ile uygun şekilde modelleyebilmektir. Model dahilinde sünek kırılma Gurson-Tvergaard-Needleman modeli ile tanımlanmış olup, gevrek kırılma içinse sürekli ortam hasar mekaniği formülizasyon-



yonları önerilmektedir. Her ne kadar önerilen bu model yükleme hızı ve gerilme tensörüne bağlı olarak geçiş kırılmasını modelleyebilecek şekilde uygulamaya dökülmüş olsa da, model sonuçlarının deneysel sonuçlara göre kıyaslaması sadece sıcaklık değişimi özelinde sınırlandırılmıştır.

Önerilen bu model, sonlu deformasyon hipoelastik plastisite kuralları üzerine oturtulmuş olup, ilgili deformasyon ve gerilme tanımları dönel olarak nötralize edilmiş konumda (rotationally neutralized configuration, corotational framework) gerçekleştirilmiştir. Sünek ve gevrek kırılmanın termodinamiği için iki farklı potansiyel tanımlanmış olup, her iki potansiyel tek bir plastik parametre üzerine etkiyecek şekilde bir yaklaşımda bulunulmuştur. Sünek kırılma Gurson-Tvergaard-Needleman plastisite modeli ile tanımlanmışken, gevrek kırılma için iki farklı hasar potansiyeli ve yaklaşımı önerilmiştir. Bunlardan ilki, Leckie-Heyhurst tipi sürünme modelinin modifikasyonu ile önerilmişken, ikincisi ise Lemaitre tipi plastisite bağıntılı hasar modeli üzerinden tanımlanmıştır. Önerilen bu yaklaşım ABAQUS/Explicit sonlu elemanlar analizi yazılımına VUMAT (Kullanıcı tanımlı malzeme rutini) olarak kodlanmıştır. Çözüm, küçük zaman adımları kullanılarak, hesap edilen plastik deformasyon üzerinden aşamalı (staggered) olarak gerçekleştirilmiştir. Yazılan VUMAT, tek elemanlı analizler ile kontrol edilmiş, sünek, gevrek ve geçiş durumlarındaki hasar oluşumları kontrol edilmiştir. Sonrasında, 22°C, -158°C ve -196°C sıcaklıklarda Turba ve arkadaşları (2011), Gülçimen ve arkadaşları (2013) tarafından P91 malzeme için gerçekleştirilmiş küçük zımba kırılma deneyleri sonuçlarına uygulanmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

### 3.1.1 Hipoelastik geçiş kırılması modelleri

#### Temel kavramlar

$\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$  bir cismin ilk (referans) konumu,  $\mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^3$  ise anlık (mevcut) konumu olsun. Cismin hareketi birebir eşlenik bir fonksiyon olan  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_t \subset \mathbb{R}^3$  ile tanımlansın. Deformasyon gradyanı  $\mathbf{F}$ , cismin her hangi bir noktasına ilk konumda referans olan vektörler ile, aynı noktaya anlık konumda tanjant olan vektörleri birebir eşleyen fonksiyon olarak tanımlanır,  $\mathbf{F} := \partial_{\mathbf{X}} \varphi$ . Burada  $\mathbf{X}$  ilk konumun kordinatlarını tanımlayan vektördür. Sonlu deformasyon altında, bu gradyan elastik, plastik ve termal kısımlarına,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \mathbf{F}^\theta \quad (3.1)$$

olarak ayrılmaktadır. Buradan anlık konumdaki hız gradyanı  $\mathbf{l} = \mathbf{l}^e + \mathbf{F}^e \mathbf{l}^p \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{l}^\theta$  olarak elde edilir. Elastik şekil değişimlerinin plastik şekil değişimlerine göre çok çok küçük olduğu varsayıldığında,  $\mathbf{F}^e = \mathbf{1}$ , anlık konumdaki hız gradyanı elastik, plastik ve termal kısımlarına toplam olarak ayrılır.

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^e + \mathbf{l}^p + \mathbf{l}^\theta \quad (3.2)$$

Simetrik ve anti-simetrik tensör tanımlamaları uygulanırsa, deformasyon hızı tensörü, benzer şekilde,

$$\mathbf{d} = \text{sym}[\mathbf{l}]; \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p + \mathbf{d}^\theta \quad (3.3)$$

olarak elde edilir. Deformasyon hızı tensörünün elastik, plastik ve termal kısımlarının toplamı olarak yazılabilmesi hipoelastik formülasyonun temelini oluşturmaktadır. Önerilen modelde kullanılan hipoelastik formülasyon Green-Naghdi objektif gerilme teoremini kullanmaktadır. Bu durumda, deformasyon tensörlerinin dönel kısımlarının nötralize edilmesi gerekmektedir. Bir diğer deyişle, birim şekil değiştirmeler,

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{R}^T \mathbf{d} \mathbf{R} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e + \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p + \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^\theta \quad (3.4)$$

olarak yazılmalıdır. Bu denklemde,  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  dönel deformasyonların nötralize edildiği konumdaki deformasyon hızı tensörünü,  $\mathbf{R}$  ise deformasyon gradyanının polar olarak ayrıştırılması sonucu elde edilen dönel deformasyon tensörünü temsil etmektedir. Hipoelastik formülasyonda gerilme ve deformasyon arasındaki bağıntı,

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbb{C} : \left[ \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e \right] \quad (3.5)$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte  $\mathbb{C}$  dördüncü seviye lineer elastisite tensörünü,  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$  ise Cauchy gerilme tensörünün dönel olarak nötralize edilmiş konumdaki değişimini temsil etmektedir. Dikkat edilmesi gereken bir nokta, gerçek Cauchy gerilme tensörünün  $\boldsymbol{\sigma}$ , dönel

olarak nötrleştirilmiş Cauchy gerilme tensörünün, dönel deformasyon tensörü ile ortogonal değişimi ile elde edilmesidir,  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}^{-T} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R}^{-1}$ .

### Sünek kırılma: GTN modeli

Bu çalışma bünyesinde daha önce tanıtıldığı gibi Gurson-Tvergaard-Needleman plastik potansiyeli,

$$\phi^p = \left[ \frac{\bar{\sigma}_{eq}}{\sigma_y} \right]^2 + 2q_1 f^* \cosh \left( \frac{q_2}{2\sigma_y} \text{tr} \left[ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right] \right) - \left[ 1 + [q_1 f^*]^2 \right] = 0. \quad (3.6)$$

$$\bar{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} [\text{dev} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \text{dev} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}]}$$

ile verilmiştir. Geçiş kırılmasının gevrek kısmının hasar mekaniği ile modellenmesi yaklaşımı öne sürüldüğü ve dönel deformasyonlar nötrlendiği için, denklem (3.6) ile verilen potansiyelde tanımlanan gerilmeler *dönel olarak nötrlenmiş konumdaki efektif gerilme tensörü*-dür. Böylelikle, mikro çatlaklar ile karakterize edilen gevrek kırılmanın etkisi, efektif gerilme konsepti üzerinden Gurson plastik potansiyeline bağlanmıştır.

Plastik deformasyonun/akışın zamana göre değişimi, normalite kuralını takip etmekte ve aşağıdaki denklem ile hesaplanmaktadır.

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \partial_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \chi = \lambda \partial_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \phi^p \quad (3.7)$$

Burada  $\lambda$  plastik parametreyi,  $\chi$  ise toplam enerji dağıtım potansiyelini temsil etmektedir. Plastik ve hasar potansiyellerinin toplamı olarak ifade edilen bu fonksiyon,  $\chi = \phi^p(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{D}) + \phi^d(\mathbf{Y}, \mathbf{D})$ ,  $\phi^p$  GTN modeli ile sünek,  $\phi^d$  hasar mekaniği ile gevrek kırılmanın potansiyelidir. Mikro çatlaklar ile tanımlanmış hasar, plastik deformasyona  $\lambda$  parametresi ile bağlanmış olup, geçiş kırılması bölgesinde her durumda plastik deformasyonun var olduğu gözlemi üzerine tanımlanmıştır.  $\phi^d$  ise bu çalışma içinde önerilen Leckie-Hayhurst (1973, 1977) ya da Lemaitre (1985) tipi hasar modelleri potansiyelidir. İlgili kısımlarda  $\phi^d$  ve detaylı formu verilmiştir.

Tvergaard ve Needleman'ın boşluk büyümesi ve birleşmesi kriteri,

$$f^*(f) = \begin{cases} f & , f \leq f_c \\ f_c + [f_u^* - f_c] \frac{[f - f_c]}{[f_F - f_c]} & , f > f_c \end{cases} \quad (3.8)$$

koşullu durumu ile tanımlanmaktadır. Boşluk büyümesi değişimi, kütlelin korunumu ve plastik deformasyonun sıkıştırılmaz olması prensibi ile,

$$\dot{f} = \dot{f}^n + \dot{f}^g \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Burada  $\dot{f}^n$  yeni oluşan boşluklara bağlı,  $\dot{f}^g$  mevcut boşlukların büyümesine bağlı boşluk oranı değişimini temsil etmektedir. Önerilen geçiş kırılması modelin, yeni oluşan boşluklara bağlı boşluk büyümesi değişimini Chu ve Needleman (1980) tarafından önerilen istatistiksel modele göre hesaplamaktadır.

$$\dot{f}^{nuc} = A_N \dot{\tilde{\epsilon}}_{eq}^p \quad ; \quad A_N = A_N(\tilde{\epsilon}_{eq}^p) = \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[\tilde{\epsilon}_{eq}^p - \tilde{\epsilon}_N^p]^2}{2[S_N]^2}\right) \quad (3.10)$$

$\tilde{\epsilon}_N^p$  boşluk oluşumu durumundaki plastik şekil değişiminin aritmetik ortalamasını,  $S_N$  ise bu değer standard sapmasını temsil etmektedir. Plastik iş eşitliği kuramı ele alındığında, eşdeğer efektif plastik şekil değişimi,

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{eq}^p = \frac{\overline{\tilde{\sigma}} : \dot{\tilde{\epsilon}}^p}{[1 - f] \sigma_y} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir. Nahshon ve Hutchinson (2008), Nahshon ve Hutchinson (2009)'a göre,  $\dot{f}^g$  boşluk büyümesi değişimi, kayma ve normal gerilmelerine bağlı değişim olarak iki ayrı kısma ayrılabilmiştir.  $\dot{f}_{normal}^{gr}$  hidrostatik gerilme tensörü etkisine bağlı boşluk büyümesi değişimini temsil ederken,  $\dot{f}_{kayma}^{gr}$  ise kayma gerilmeleri altında boşluk değişimini daha gerçekçi bir duruma getirmektedir. Bu durum,

$$\begin{aligned}
\dot{f}^{gr} &= \dot{f}_{normal}^{gr} + \dot{f}_{shear}^{gr} \\
\dot{f}_{normal}^{gr} &= [1 - f] \text{tr} \left[ \dot{\bar{\epsilon}}^p \right] \\
\dot{f}_{shear}^{gr} &= k_w f \frac{w}{\bar{\sigma}_{eq}} \text{dev} \left[ \bar{\sigma} \right] : \dot{\bar{\epsilon}}^p
\end{aligned} \tag{3.12}$$

denklem takımı ile ifade edilmektedir. Burada  $k_w$  kayma gerilmesine bağlı bir malzeme parametresi olarak belirlenmiş ve Nahshon ve Hutchinson'da (2008)  $0 \leq k_w \leq 3$  şeklinde limitlenmiştir.  $w$  kayma gerilmelerine bağlı olup  $0 \leq w \leq 1$  bandında bir değer almaktadır.  $w$  parametresi aksenal simetrik durumlardaki gerilme durumunu düzlemsel şekil değişimi (plane strain) durumundan ayırmayı sağlar ve,

$$w = \hat{w} \left( \text{dev} \left[ \bar{\sigma} \right] \right) = - \left[ \frac{27 \bar{J}_3}{2 \bar{\sigma}_{eq}^3} \right]^2 \tag{3.13}$$

denklemleri ile ifade edilirken,  $\bar{J}_3$  gerilme tensörünün 3. deviyatorik değişmezidir. Burada unutulmaması gereken bir nokta, kayma gerilmelerine bağlı hasar oluşumu, gevrek kırılma için tanımlanan hasar mekaniği modelleri içinde olsa da, sünek kırılmanın kayma gerilmesi durumu altındaki davranışını daha gerçeğe uygun olarak modelleyebilmek için bu fonksiyonun tanımlanması gerektiğidir. Son olarak, sıcaklığın zamana bağlı değişimi plastik iş eşitliği denklemi kullanılarak, enerjinin korunumundan,

$$\rho c_p \dot{\theta} = \zeta \bar{\sigma} : \dot{\bar{\epsilon}}^p \tag{3.14}$$

elde edilir. Burada  $\zeta$  Tayloy Quinney katsayısı (1934) olup, plastik şekil değişimi esnasında sıcaklık olarak açığa çıkan enerji miktarını kontrol etmektedir. Ayrıca  $\rho$  ve  $c_p$  sırası ile malzemenin yoğunluk ve öz ısı değerleridir. Malzemenin pekleşme karakteristiği ve yükleme hızına bağlı değişimleri, sıcaklık değişimine olşan duyarlılığı ile birlikte Johnson-Cook tipi bir model üzerinden sağlanmıştır. P91 malzemenin küçük zımba testinde gösterdiği plastik pekleşme karakteristiğini daha iyi modelleyebilmek adına, orjinal Johnson-Cook modelindeki pekleşme yerine Hockett-Sherby (1975) tipi pekleşme

modeli kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}
\sigma_y(\tilde{\epsilon}_{eq}^p, \dot{\tilde{\epsilon}}_{eq}^p, \theta) &= h_y(\tilde{\epsilon}_{eq}^p) r_y(\dot{\tilde{\epsilon}}_{eq}^p) t_y(\theta) \\
h_y(\tilde{\epsilon}_{eq}^p) &= h \tilde{\epsilon}_{eq}^p + b - [b - \sigma_{y0}] \exp(-m [\tilde{\epsilon}_{eq}^p]^n) \\
r_y(\dot{\tilde{\epsilon}}_{eq}^p) &= 1 + C \log \left( \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}_{eq}^p}{\dot{\tilde{\epsilon}}_0^p} \right) \\
t_y(\theta) &= 1 - \Omega^r
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Denklem (3.15) ile verilen bu modelde  $\sigma_{y0}, b, C, n, m$  ve  $r$  ilgili malzeme parametreleridir. Referans konumdaki şekil değişim hızı  $\dot{\tilde{\epsilon}}_0^p$  ile belirtilmiştir. Sıcaklık ile ilgili parametrelerden  $\Omega := [\theta - \theta_0]/[\theta_M - \theta_0]$  ile tanımlanmış olup,  $\theta_0$  ve  $\theta_M$  sırası ile referans ve ergime sıcaklıklarını temsil etmektedir. Dikkat edilmesi gereken nokta, bu formülasyonda akma gerilmesinin sadece yükleme hızı ve sıcaklığa bağlı olan değişimi ele alınmış olup, formülasyon viskoplastik olarak önerilmemiştir. Tekrarlamak gerekirse, modelleme ve nümerik algoritmada yükleme hızına bağlı değişim mevcut olsa da, testlere uygulanmasında ve sonuçların karşılaştırılmasında sadece sıcaklık değişimine bağlı kırılma davranışı incelenmiştir.

### **Gevrek kırılma: Leckie-Hayhurst hasar modeli**

Malzeme bünyesinde hasar oluşması kavramı ilk olarak Kachanov (1958) ve Rabotnov (1969) tarafından sürünme üzerine yapılan çalışmalar ile ortaya atılmıştır. Bu ilk teoremler kullanılarak, sürekli ortam hasar mekaniği konsepti Chaboche (1977), Chaboche ve ark. (2006), Lemaitre (1985), Germain ve ark. (1983), Hayakawa ve Murakami (1997), Chow ve Wang (1987), Krajcinovic ve Fonseka (1981), Krajcinovic (1984) tarafından yapılan çalışmalar ile gelişmiştir. Konu ile ilgili detaylar için bu çalışmanın ilgili kısmı incelenebilir.

Hipoelastik çerçeve üzerine oturtulmuş bu çalışmada, Cordebois ve Sidoroff (1982), Chow ve Wang (1987) tarafından yapılan çalışmalarda verilen, volumetrik-deviatorik olarak ayrıştırılmış ve simetrize edilmiş efektif gerilme tensörü kullanılmıştır.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}]}{3 - \text{tr}[\mathbf{D}]} \mathbf{1} + \left[ [\mathbf{1} - \mathbf{D}]^{-\frac{1}{2}} \text{dev}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}] [\mathbf{1} - \mathbf{D}]^{-\frac{1}{2}} \right] : \mathbb{P} \quad (3.16)$$

$\mathbb{P}$ , 4.derece deviatorik yansıma tensörünü,  $\mathbf{D}$  ise gevrek kırılmaya bağlanmış mikro çatlak oluşumunu yönlendiren 2.derece tensörel hasar parametresini temsil etmektedir. Mikro boşluk büyümesi ile gelişen sünek kırılma ile mikro çatlak oluşumu ile gelişen gevrek kırılma arasındaki bağlantı, plastik ve hasar potansiyelleri ve  $\lambda$  plastik parametresi üzerinden  $\chi = \phi^p(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{D}) + \phi^d(\mathbf{Y}, \mathbf{D})$  toplamı ile oluşturulmuştur.  $\phi^d$  için seçilen form Hayakawa ve Murakami 1997), Abu-Al-Rub ve Voyiadjis (2003) tarafından önerilen potansiyeldir.

$$\dot{\mathbf{D}} = \lambda \partial_{\mathbf{Y}} \chi = \lambda \partial_{\mathbf{Y}} \phi^d \quad (3.17)$$

$$\phi^d = \frac{1}{S^m(m+1)} \sqrt{[\mathbf{1} - \mathbf{D}]^{-1} : [\mathbf{1} - \mathbf{D}]^{-1}} \sqrt{[\mathbf{Y} : \mathbf{Y}]^{m+1}}$$

$\mathbf{Y}$  gerilme-benzeri,  $\mathbf{D}$  ile eşlenik, gevrek hasar başlangıcı ve oluşumunu kontrol eden 2.derece tensördür. Dikkat edilmesi gereken bir nokta,  $\phi^d$  için denklem (3.17) ile verilen formun gerilme benzeri  $\mathbf{Y}$ 'nin değişmezleri üzerinden olduğu ve  $\mathbf{D}$ 'ye bağlandığıdır. Bu bağlantı, sünek hasardaki boşluk hacim oranı parametresi  $f$  ile plastik potansiyel  $\phi^p$  arasında olan ilişkiye benzerdir. Termodinamik olarak tutarlı bir formülasyonda,  $\mathbf{Y}$  deformasyon enerjisi açığa çıkma hızı olarak isimlendirilir ve tanımlanmış Helmholtz serbest enerji fonksiyonundan türevlenerek elde edilir,  $\mathbf{Y} = -\partial_{\mathbf{D}} \psi$ . Hipoelastik formülasyonda ise,  $\mathbf{Y}$  ve  $\dot{\mathbf{D}}$  için özel formlar önerilmiştir.

Çoğunlukla sürünme hasarı kriteri olarak Leckie ve Hayhurst tarafından önerilmiş bu model, gerilme tensörü değişmezleri ve izotropi yaklaşımı üzerinden  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 'nin bir fonksiyonu olarak,

$$\varphi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = a\bar{\sigma}_i + bJ_1(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + [1 - a - b]J_2(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımda  $\bar{\sigma}_i$ , efektif gerilme tensörünün dönül olarak nötralize edilmiş konumdaki maksimum asal bileşeni olarak tanımlanmıştır.  $\mathbf{Y}$  için bu formun önerilmesinin iki önemli sebebi vardır: (1) bu form asal gerilmelere dolayısıyla gevrek kırılma davranışına direkt olarak bağlıdır (2) nümerik olarak implementasyonu oldukça

kolaydır. Ek olarak, önerilen bu form, Ritchie-Knott-Rice tipi kırılma modelleri ile benzerdir. Dolayısıyla, Leckie-Hayhurst denklemi maksimum asal gerilmelerin etkisini yansıtacak şekilde modifiye edilip  $Y_i = \overline{\sigma}_i$  olacak şekilde düzenlenmiştir. Leckie-Hayhurst formu izotropi durumunu baz aldığı ve dolayısıyla skalar bir hasar parametresi üzerinden formülize edildiği için, 2.derece hasar tensörü formunda yazılabilmesi spektral ifade olarak mümkündür.

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^3 \langle Y_i \rangle \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (3.19)$$

$$\langle Y_i \rangle = \max(0, Y_i - Y_i^0)$$

(3.19) spektral ifadesinde  $Y_i^0$  mikroçatlak başlangıcını ve değişimini yönlendiren limit değeri,  $\mathbf{n}_i$  ise  $\overline{\sigma}$  ile ifade edilen efektif gerilme tensörünün asal yönleridir. Başka bir yaklaşım ile değerlendirilirse bu form, çatlak hasarına bağlı malzeme direnci düşüşünü hesaplayabilen 2.dereceden bir Ritchie-Knott-Rice gevrek kırılma modelidir.  $\mathbf{Y}$  ise bu durumda, termodinamik olarak uyumlu olan formülasyondaki deformasyon enerjisi açığa çıkma hızı ile aynı anlama sahip olmamaktadır.

$Y_i^0$  ile tanımlanan ilgili malzeme parametresinin tayini için Ritchie ve arkadaşları, Curry ve Knott (1976) tarafından önerilen deneysel çalışmalar kullanılabilir. Bu çalışmalarda 4-nokta eğilme deneyleri gerçekleştirilmiş ve önceden çatlak tanımlanmış numunelerin kırılma toklukları ölçülmüştür. Daha sonra aynı test düzeninin sonlu elemanlar analizleri gerçekleştirilmiş ve çatlak ucundaki gerilme dağılımları asal gerilmeler üzerinden incelenmiş ve kırılma tokluğuna korelasyonu sağlanmıştır.

### **Gevrek kırılma: Lemaitre tipi hasar modeli**

Boşluk büyümesi sünek hasarı  $f$  ile çatlak büyümesi gevrek hasarının geçiş kırılmasında beraber bulunabilmesi motivasyonu göz önüne alındığında, Lemaitre ve arkadaşları (2000), Lemaitre (1985), Lemaitre ve Desmorat (2005) tarafından önerilen kinetik hasar modeli gevrek kırılmayı tasvir edecek şekilde kullanılmıştır. Lemaitre ve arkadaşları tarafından önerilen form,



$$\mathbf{D} = \left[ \frac{\bar{Y}}{S} \right]^m |\dot{\tilde{\epsilon}}^p| \quad \text{where} \quad \bar{Y} = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^e : \mathbb{C} : \tilde{\epsilon}^e \quad (3.20)$$

olup,  $\bar{Y}$  efektif elastic enerji yoğunluğunu,  $|\dot{\tilde{\epsilon}}^p|$  asal bileşenleri üzerinden tanımlı plastik şekil değişimi tensörünü,  $S$  ve  $m$  ise korele edilmesi gerekli malzeme parametrelerini temsil etmektedir.  $|\dot{\tilde{\epsilon}}^p|$  tensörü plastik şekil değiştirme tensörünün spektral formda ifade edilmiş halidir. Hasar değişimi tensörü ile spektral ifadedi plastik şekil değişimi tensörünün yönlerini bu model ile çakışmaktadır. Gevrek hasar ilerlemesi birikimli eşdeğer plastik şekil değişimi belirli bir limiti geçtiğinde mümkündür.

$$\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad \text{if} \quad \tilde{\epsilon}_{eq}^p \leq \tilde{\epsilon}_{eq}^{p,crit} \quad (3.21)$$

Birikimli eşdeğer plastik şekil değişiminin limit değeri sadece hasar ilerlemesi için kritik değildir. Bu değer ayrıca malzemenin kırılma öncesi, sonrası ve anındaki kırılma karakteristiğinin tayini için de önemli olup, diğer model parametreleri gibi nümerik ve deneysel olarak tayin edilmelidir. Bahsi geçen tayin, bu çalışma dahilinde küçük zıma deney sonuçları baz alınarak ilgili tayin nümerik olarak gerçekleştirilmiştir. Bu yaklaşımın bir olumsuz noktası çift eksenli çeki gerilmesi altında fiziksel olmayan bir hasar ilerlemesi hesaplayabilmesidir. Bu durumu giderebilmek adına, denklem (3.20),  $\dot{\tilde{\epsilon}}^p$ , mutlak değeri üzerinden değil, pozitif bileşenleri alınarak kullanılmıştır.

$S$ ,  $m$  ve  $\tilde{\epsilon}_{eq}^{p,crit}$  parametrelerinin deneysel korelasyonları için standart tek eksenli deformasyon testleri ile düşük çevrim yorulma testlerinin yapılması yeterlidir. Deneyler ile ilgili detay bilgiler Lemaitre ve ark. (2000), ve Lemaitre ve Desmorat (2005) tarafından yapılmış çalışmalarda verilmiştir.

### 3.1.2 Nümerik uygulama - ABAQUS VUMAT

#### Gerilme ve iç değişken hesaplama algoritması

Eksenel simetri (ya da düzlemsel şekil değişimleri) durumu için ABAQUS/Explicit yazılımına VUMAT olarak Fortran'da iki farklı tipte model kodlanması gerçekleştirilmiştir. Bunlar; (1) Gurson-Tvergaard-Needleman modelinin modifiye edilmiş Leckie-Hayhurst hasar modeli ile bağlandığı durum, (2) Gurson-Tvergaard-Needleman modelinin Lemaitre

tipi kinetik hasar ilerlemesi modeline bağlandığı durumlar içindir.

Bünye denklemlerinin zaman eksenindeki integrasyonları için Simo ve Ortiz (1986) tarafından önerilen açık çözüm (explicit) *kesele düzlem algoritması* kullanılmıştır. Sünek ve gevrek kırılmayı yöneten hasar parametrelerinin hesaplanması için tam bağıntılı (fully coupled) çözüm algoritması yerine Park ve arkadaşları, Park ve Felippa (1977), Park ve ark. (1980) tarafından önerilen sıralı çözüm algoritması kullanılmıştır. Sıralı çözüm algoritmasının seçilme-sinin nedenleri, nümerik implementasyonunun kolay olması ve açık çözümlerde (explicit) doğal olarak kullanılan küçük çözüm adımlarında yüksek doğruluk oranı göstermesidir. Sıralı çözüm algoritmasındaki sıra, ilk olarak ilgili plastik parametrelerin hesaplanması, sonrasında hasar parametrelerinin güncellenmesi şeklinde olmuştur.

Çatlak ilerlemesi modellenmesi için eleman silme yöntemi kullanılmıştır. Literatürde farklı ve daha kompleks yöntemler var olsa da, eleman silme yöntemi hızlı oluşu, küçük zımba testinde gevrek ve/veya sünek hasar sonucu malzeme bünyesinde oluşan katılık azalmasını yüksek doğrulukta yansıtılabildiği, ayrıca küçük zımba testinde ön tanımlı çatlak olmayan numuneler üzerinde oluşan homojen ve düzgün gerilme dağılımları altında gerçeğe yakın sonuçlar üretebildiği için tercih edilmiştir. Bu yöntemde ilgili eleman, ya sünek kırılmayı tanımlayan boşluk oranı kritik değeri  $f_F$ 'e ulaştığı zaman, ya da gevrek kırılmayı tanımlayan maksimum asal hasar değeri  $D_i$  limit değerine ulaştığı zaman, silinir. Tvergaard ve Needleman (2000) tarafından önerilen geçiş kırılması modelinde, gevrek kırılma için farklı bir eleman silme stratejisi önerilmiştir. Bu yaklaşımda *kırılma tanesi* adı ile bir bölge tanımlanmıştır. Tanımlanan bu *kırılma tanesi*, malzeme bünyesindeki gerilme dağılımları homojen ve düzgün ise, tek bir sonlu eleman boyutunda alınmıştır. Eğer bünyede ön tanımlı bir çatlak varsa ya da gerilme gradyanları ilgili bölgelerde çok yüksek değerler alıyorsa, o zaman *kırılma tanesi* birden fazla sonlu eleman boyutunda alınmıştır. Eleman silinmesi, tek bir eleman için değil, *kırılma tanesi* için aktiflenmiş olup, eleman silme tekli ya da çoklu sonlu elemanlar için oluşabilmektedir.

Bu çalışma bünyesinde sünek kırılmayı temsil eden boşluk büyümesi için, eleman silmenin kritik değeri  $f_F = 0.20$  olarak alınmıştır. Gevrek kırılmayı temsil eden hasar modelleri için ise ilgili kritik hasar değeri  $D_{crit} = 0.30$  olarak alınmıştır.  $D_{crit}$  için

seçilen bu değer, hasar mekaniği diferansiyel denklemlerinin eliptik formlarının bozulmaya başladığı ve teorik olarak önerilen maksimum hasar değeri ile de uyumludur. Hasar mekaniği diferansiyel denklemlerinin eliptik formları ve kritik hasar değerleri için Lemaitre ve Desmorat tarafından yapılmış çalışmalar incelenebilir.

Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 VUMAT olarak kodlanan iki farklı malzeme modelinin akış şemalarını göstermektedir. Her iki modelde de plastik durum gerilme güncelleme algoritması elastik durumun mevcut zaman adımı için sınanması, plastik ya da hasar potansiyeli kullanılarak ilgili plastik ya da hasar durumunun oluşup oluşmadığının kontrolü, eğer oluşmuş ise ilgili bünye değişkenlerinin hesaplanması stratejisi üzerine oturtulmuştur. Bu noktada GTN ve Hasar modelleri için açık çözüm kesen düzlem algoritması kullanılmıştır. Literatürde farklı algoritmalar, farklı potansiyel durumları için geliştirilmiş olup, bunlarla ilgili detaylı bilgi için Simo ve Hughes (1998) incelenebilir.

### **Tek eleman testleri**

Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 ile verilen nümerik algoritmalar ABAQUS/Explicit için eksenel simetrik gerilme ve deformasyon durumu için VUMAT (Kullanıcı tanımlı malzeme rutini) olarak kodlanmıştır. Gerçekleştirilen kodlama işleminin doğruluğunu sınamak için düzlemsel şekil değişimi (plane strain) durumu altında düzlemsel çekme simülasyonları, kuasi-statik yükleme durumu için gerçekleştirilmiştir. Kuasi-statik yükleme durumunun seçilmesinin sebebi, küçük zımba testlerinin de aynı durumda gerçekleştirilmiş olmasıdır. İlgili simülasyonlarda boşluk-büyümesi tabanlı sünek hasar ve çatlak büyümesi tabanlı gevrek hasar parametrelerinin değişimleri 22°C ve -196°C sıcaklık değerlerinde hesaplanmıştır. 22°C'de yapılan hesaplarda tam sünek kırılma beklenirken, -196°C durumunda yapılan simülasyonların tam gevrek kırılmayı hesaplaması beklenmiştir. Bir diğer deyişle, sünek kırılma durumunda sadece GTN modeli ile tanımlanan boşluk büyümesi hasarı ilerlerken, gevrek kırılma durumunda hasar mekaniği ile tanımlanan çatlak büyümesi hasar ilerlemelidir.

İlgili tek eleman testleri 1×1mm boyutundaki tek bir düzlemsel deformasyon elemanı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. İlgili eleman, indirgenmiş (reduced) integrasyona sahip

---

1. Elastik gerilme durumunun sınanmasını hesapla  $\phi_{n+1}^{p,trial}$

(a) **IF**  $\phi_{n+1}^{p,trial} < 0$  **THEN**

i. Elastik adım, Güncelle  $\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{trial}$  ve **GOTO 3**

(b) **IF**  $\phi_{n+1}^{p,trial} > 0$  **THEN**

i. Elasto-plastik adım

A. Boşluk-hacim oranını hesapla,  $f_{n+1}$

B.  $\bar{\sigma}_{n+1}$  değerini GTN'den hesapla then **GOTO 2**

2.  $\bar{\sigma}_{n+1}$ 'nin asal değerlerini ve vektörlerini hesapla

(a) Leckie-Heyhurst modelinden  $Y_{n+1}$  değerini hesapla

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \sum_{i=1}^3 \langle Y_{i,n+1} \rangle \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$$

$$\langle Y_{i,n+1} \rangle = \max(0, Y_{i,n+1} - Y_i^0)$$

(b)  $\mathbf{D}_{n+1}$  değerini değişim denklemden hesapla  $\dot{\mathbf{D}} = \lambda \partial_{\mathbf{Y}} \chi$

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \frac{\Delta \lambda_{n+1}}{S^m} \sqrt{[\mathbf{Y}_{n+1} : \mathbf{Y}_{n+1}]^{m-1}} \sqrt{[\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1}]^{-1} : [\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1}]^{-1} \mathbf{Y}_{n+1}}$$

(c)  $\mathbf{D}_{n+1}$  değerini kullanarak  $\tilde{\sigma}_{n+1}$  tensörünü hesapla

(d)  $\mathbf{D}_{n+1}$  değerinin asal değerlerini hesapla  $D_{i,n+1}$

(e)  $D_{i,n+1}$  ve  $f_{n+1}$  kullanarak eleman silme durumunu kontrol et

3. Denklem iç değişkenlerini bir sonraki iterasyon için güncelle

---

**Çizelge 3.1.** GTN plastisite modeli ve önerilen Leckie-Hayhurst hasar modeli ile geçiş kırılması modeli nümerik algoritması

---

1. Elastik gerilme durumunun sınanmasını hesapla  $\phi_{n+1}^{p,trial}$

(a) **IF**  $\phi_{n+1}^{p,trial} < 0$  **THEN**

i. Elastik adım, Güncelle  $\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{trial}$  ve **GOTO 3**

(b) **IF**  $\phi_{n+1}^{p,trial} > 0$  **THEN**

i. Elasto-plastik adım

A. Boşluk-hacim oranını hesapla,  $f_{n+1}$

B. Hesapla  $\tilde{\epsilon}_{n+1}^p$ ,  $\Delta\tilde{\epsilon}_{n+1}^p$  ve  $\tilde{\epsilon}_{eq,n+1}^p$

C.  $\bar{\sigma}_{n+1}$  değerini GTN'den hesapla then **GOTO 2**

2. Plastik şekil değişimi miktarının gevrek hasar oluşumunu başlatmasını kontrol et

(a) **IF**  $\tilde{\epsilon}_{eq,n+1}^p < \tilde{\epsilon}_{eq,n+1}^{p,crit}$  **THEN**

i. Gevrek hasar değişimi yok, Güncelle  $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n$  ve **GOTO 3**

(b) **IF**  $\tilde{\epsilon}_{eq,n+1}^p > \tilde{\epsilon}_{eq,n+1}^{p,crit}$  **THEN**

i. Gevrek hasar plastik akış ile mevcuttur

A. Gevrek hasar tensörünün yeni değerini hesapla

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \left[ \frac{\bar{Y}}{\bar{S}} \right]^m |\Delta\tilde{\epsilon}_{n+1}^p|$$

B.  $\tilde{\sigma}_{n+1}$  değerini, hesaplanmış  $\mathbf{D}_{n+1}$  değerinden güncelle

C.  $\mathbf{D}_{n+1}$  değerinin asal değerlerini bul;  $D_{i,n+1}$

D.  $D_{i,n+1}$  ve  $f_{n+1}$  kullanarak eleman silme durumunu kontrol et

3. Denklem iç değişkenlerini bir sonraki iterasyon için güncelle

---

**Çizelge 3.2.** GTN plastisite modeli ve önerilen Lemaitre kinetik hasar modeli ile geçiş kırılması modeli nümerik algoritması

olarak seçilmiştir. Bunun sebebi, elemanın geometrik merkezinde tek bir Gauss noktası olması ve aslında tek bir nokta davranışı göstermesidir. Toplam analiz süresi 0.15s olup, sınır koşulu olarak elemanın bir kenarına düzlemsel hız sınır koşulu 15mm/s olarak tanımlanmıştır. Hız sınır koşulunun tanımlandığı kenarın karşı kenarı ise tüm serbestlik derecelerinden sınırlandırılmıştır. Bu şekilde tüm analiz boyunca sabit şekil değişimi hızı koşulu sağlanmıştır. İlgili tek eleman simülasyonlarında kullanılan malzeme parametreleri Tablo 3.3, 3.4, 3.5,3.6 ve Tablo 3.7 ile verilmiştir.

**Çizelge 3.3.** P91 için termoelastik malzeme parametreleri

$E$ (GPa)	$\nu$	$c_p$ (m <sup>2</sup> /[Ks <sup>2</sup> ])	$\zeta$	$\epsilon_0$	$\theta_M$ (K)
200	0.3	622	0.9	1.3e-5	1717

**Çizelge 3.4.** P91 için 22°C’de Hockett-Sherby plastik pekleşme parametreleri

$h$ (MPa)	$\sigma_{y0}$ (MPa)	$b$ (MPa)	$m$	$n$
500	346	650	25.726	1.013

**Çizelge 3.5.** P91 için Gurson-Tvergaard-Needleman modeli malzeme parametreleri

$f_N$	$s_N$	$\epsilon_N$	$q_1$	$q_2$	$q_3 = 1/f_U$	$f_0$	$k_w$
0.02	0.1	0.3	1.5	1.0	2.25	0.00044	0.0

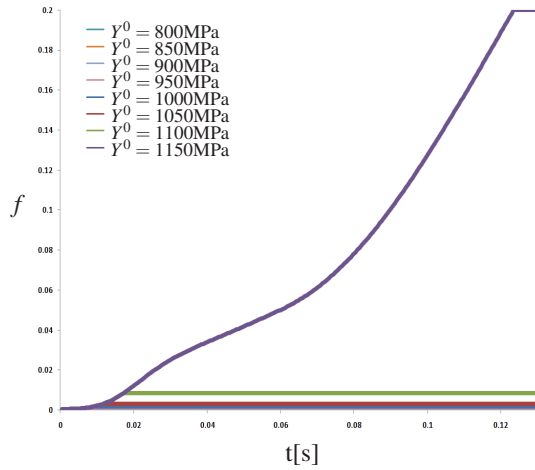
**Çizelge 3.6.** Sünek hasar ve Leckie-Hayhurst hasar model parametreleri

$f_c$	$f_F$	$D_{i,crit}$	$S$	$m$	$Y_i^0$ (MPa)
0.05	0.20	0.30	5000	1.7	Şekil 3.2

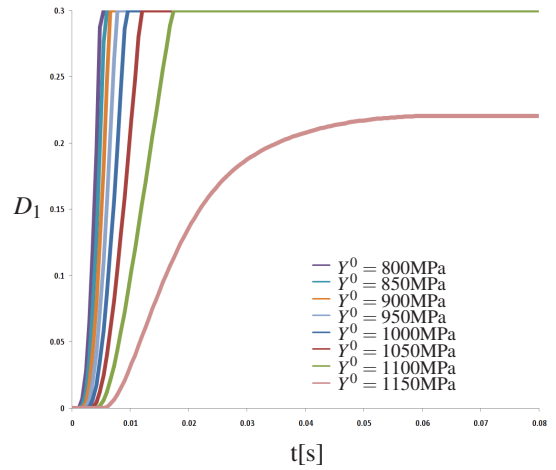
**Çizelge 3.7.** Lemaitre-tipi hasar modeli parametreleri

$S$	$m$	$\epsilon_{eq}^{p,crit}$
0.6	2.2	Şekil 3.3

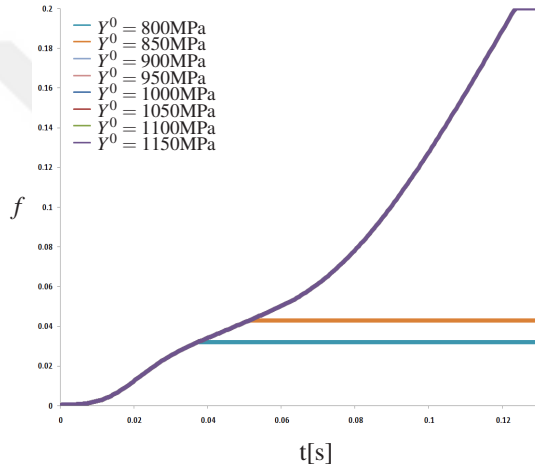
İlgili tek eleman analizlerinin Leckie-Hayhurst modeli baz alınarak elde edilen sonuçları Şekil-3.2’te verilmiştir. Bu grafiklerde boşluk oranı  $f$  ile maksimum asal hasar  $D_1$ , gevrek kırılmayı tetikleyen gerilme-benzeri enerji açığa çıkma parametresinin,  $Y^0$ , farklı eşik değerlerine göre hesaplanmıştır. Daha önce de açıklandığı gibi  $Y^0$  değeri, gevrek kırılmanın başlangıcını kontrol eden limit bir değerdir ve malzemeye özgüdür.  $-196^\circ\text{C}$  sıcaklık değeri için, dominant hasar mekanizması mikro-çatlak tabanlıdır. Bu sıcaklık



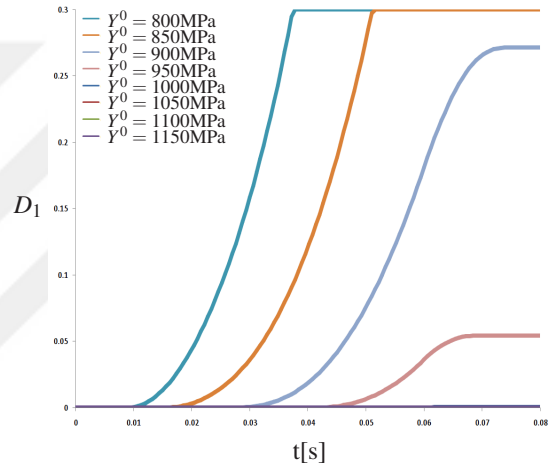
(a)  $f$  ve  $t$ , sıcaklık  $-196^{\circ}\text{C}$



(b)  $D_1$  ve  $t$ , sıcaklık  $-196^{\circ}\text{C}$



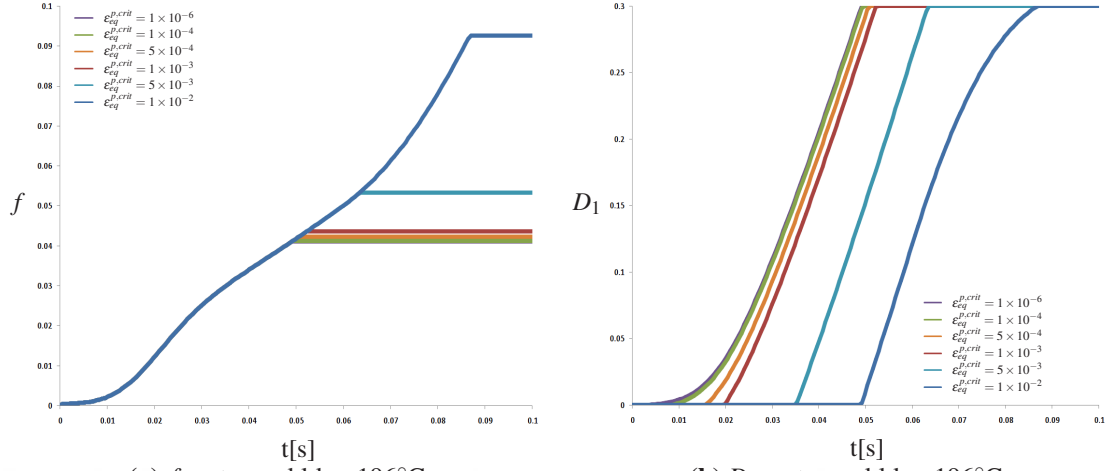
(c)  $f$  ve  $t$ , sıcaklık  $22^{\circ}\text{C}$



(d)  $D_1$  ve  $t$ , sıcaklık  $22^{\circ}\text{C}$

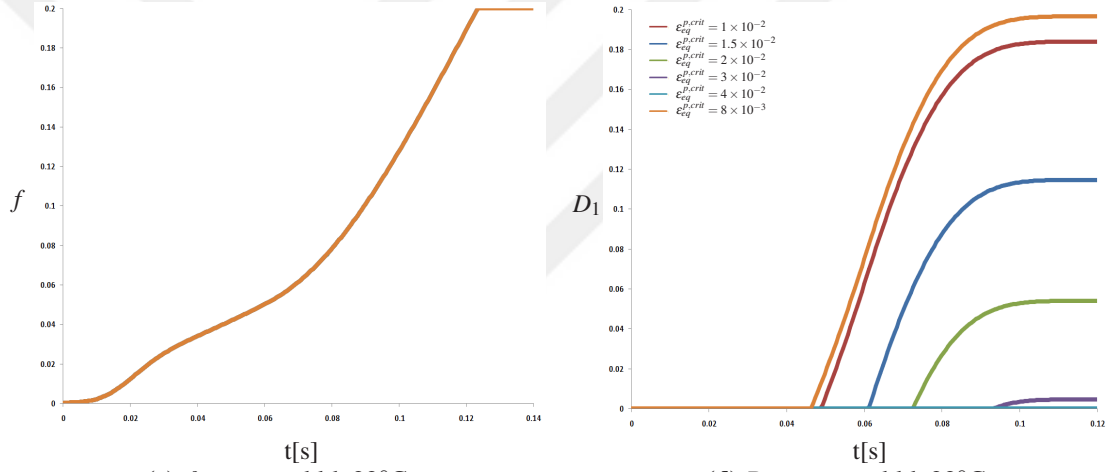
**Şekil 3.2.** Önerilen Leckie-Hayhurst gevrek hasar bazlı geçiş kırılması modelinin, tek el-man analizlerinde hesapladığı boşluk büyümesi hasarı  $f$  ile mikro çatlak hasarı  $D$  grafik-leri.

değeri için boşluk oranı  $f$  sadece  $Y^0$  parametresinin çok yüksek değerleri aldığı du-ruumlarda öne çıkmaktadır.  $22^{\circ}\text{C}$  sıcaklık değeri içinse, dominant hasar mekanizması boşluk büyümesi tabanlıdır. Bu sıcaklık içinse, mikro çatlak tabanlı hasar mekaniz-ması, sadece  $Y^0$  parametresinin çok küçük değerler aldığı durumlarda öne çıkmaktadır.  $-196^{\circ}\text{C}$  için  $Y^0 = 1150\text{MPa}$  olduğu durumda, sünek hasar parametresi  $f$  öne çıkan hasar mekanizmasıyken,  $D_1$ 'in artışı daha yavaştır. Bu durum,  $-196^{\circ}\text{C}$ 'de kırılmanın tam gevrek olduğu göz önüne alındığında gerçekçi değildir. Dolayısıyla matematiksel olarak  $Y^0 < 1150\text{MPa}$  olmalıdır.  $Y^0$  parametresi  $1000\text{MPa} < Y^0 < 1100\text{MPa}$  bandında olacak şekilde alındığında, aynı parametre seti için  $22^{\circ}\text{C}$ 'de sünek kırılmayı,  $-196^{\circ}\text{C}$ 'de ise gevrek kırılmayı modelleyebilmektedir.



(a)  $f$  ve  $t$ , sıcaklık  $-196^\circ\text{C}$

(b)  $D_1$  ve  $t$ , sıcaklık  $-196^\circ\text{C}$



(c)  $f$  ve  $t$ , sıcaklık  $22^\circ\text{C}$

(d)  $D_1$  ve  $t$ , sıcaklık  $22^\circ\text{C}$

**Şekil 3.3.** Önerilen Lemaitre gevrek hasar bazlı geçiş kırılması modelinin, tek eleman analizlerinde hesapladığı boşluk büyümesi hasarı  $f$  ile mikro çatlak hasarı  $D$  grafikleri.

İlgili tek eleman analizlerinin Lemaitre-tipi kinetik hasar modeli baz alınarak elde edilen sonuçları ise Şekil 3.3'ta verilmiştir. Benzer şekilde, boşluk oranı  $f$  ile maksimum asal hasar  $D_1$  grafiklerde verilmiştir.  $-196^\circ\text{C}$ 'de dominant hasar mekanizması mikro çatlak tabanlı olan gevrek kırılmadır. Gevrek hasar oluşumu eşik parametresi  $\varepsilon_{eq}^{p,crit}$ 'nin,  $1 \times 10^{-6}$  ile  $1 \times 10^{-2}$  arasında alabileceği tüm değerlerde, boşluk oranı  $f$  sünek hasarı tetikleyecek limit değerine hiç bir zaman ulaşamamakta, dolayısıyla  $-196^\circ\text{C}$  sıcaklık değerindeki tüm sonuçlarda gevrek hasar oluşumu hesaplanmaktadır.  $22^\circ\text{C}$  sıcaklık değerinde ise, gevrek hasar eşik değeri  $\varepsilon_{eq}^{p,crit}$ 'in oldukça yüksek sayılan  $1 \times 10^{-2}$  değerleri için bile, gevrek hasarın, maksimum asal hasar limit değeri  $D_c = 0.30$  olan değerlerine ulaşamayarak



gevrek kırılmayı tetiklemediği, dolayısıyla bu sıcaklık dahilinde oluşan kırılma tipinin  $f_F = 0.20$  ile birlikte tamamem boşluk büyümesi tabanlı sünek olduğu görülmektedir. Ancak, gevrek kırılmanın görüleceği  $-196^\circ\text{C}$  sıcaklıklarda plastik şekil değişimlerinin gevrek kırılma öncesinde çok küçük kalması ve  $22^\circ\text{C}$  sıcaklıklarda ise sünek kırılma görülmesi koşulu ele alındığında,  $\epsilon_{eq}^{p,crit}$  için bir çözüm aralığı belirlenmesi gerekmektedir. Bu durum göz önüne alındığında,  $\epsilon_{eq}^{p,crit} < 5 \times 10^{-4}$  aralığındaki tüm değerler için  $22^\circ\text{C}$  sıcaklıkta sünek kırılma,  $-196^\circ\text{C}$  sıcaklıkta gevrek kırılma gözükmekle birlikte,  $\epsilon_{eq}^{p,crit} < 5 \times 10^{-4}$  çözüm aralığında yapılan çözümler, fiziksel gözlemler ile elde edilen sonuçları da sağlamaktadır. Bir diğer taraftan dikkat edilmesi gereken başka bir husus ise, Lemaitre-tipi kinetik hasar modelinin, hem  $-196^\circ\text{C}$  sıcaklıkta gevrek hasar oluşumu-nu tanımlayabilmesi, hem de  $22^\circ\text{C}$  sıcaklıklarda plastisite oluşumu ile birlikte boşluk ilerlemesi üzerine gelen ek sünek hasarları da malzeme bünyesine yansıtabilmesidir.

Hem Leckie-Hayhurst, hem de Lemaitre tipi modeller için gerçekleştirilmiş tek eleman analizleri, sadece ortam sıcaklığı değişimi altında ve tek parametre seti ile, gerçeğe ve fiziksel gözlemlere uygun sonuçlar üretmiştir.  $Y^0$  ve  $\epsilon_{eq}^{p,crit}$  malzeme parametrelerinin tayini tek eleman analizlerinde (bu testler fiziksel olarak birebir gerçekleştirilemeyeceği için) uygulanmamıştır. İlgili parametrelerin tayinleri, küçük zımba testlerinin nümerik olarak modellenmesi sonucunda, analiz sonuçlarının deneysel datalarla korelasyonu ile gerçekleştirilmiştir.

### 3.2 Hiperelastik Yaklaşım

Geçiş kırılmasının modellenmesi ile ilgili yapılan çalışmalar bir önceki kısımda hipoelelastik formülasyon baz alınarak verilmişti. Hipoelelastik formülasyon her ne kadar genel kabul görmüş ve gerçeğe yakın sonuçlar üretebilen bir yaklaşım olsa da, hem termodinamik ilkelere tam uygunluğun sağlanması, hem de anizotrop hasar etkilerini de modelleyebilecek bir çerçeve oluşturabilmek adına, ilgili bünye modellerinin hiperelastik formülasyon üzerinden modellenmesi amaçlanmıştır.

Bu kısımda verilen çalışmalar, boşluk büyümesi ve çatlak ilerlemesi tabanlı bir kırılma modelini sonlu şekil değiştirmeler ışığında, termodinamik olarak tam uyumlu bir formülasyon ile vermektedir. Boşluk büyümesi ve çatlak oluşumu/ilerlemesi bünye modelleri için

sırası ile Gurson-Tvergaard-Needleman plastisite modeli ve bir önceki kısımda önerilen Lemaitre-tipi hasar mekaniği modelleri kullanılmıştır. İlgili bünye modeli termoplastik olarak modellenmiş olup, yine benzer şekilde sıcaklık tabanlı geçiş kırılmasını modelleyebilecektir. Model içinde iki farklı hasar parametresi bulunmaktadır:  $f$  malzeme bünyesindeki boşluk oranını ve sünek kırılmayı,  $d$  ise mikroçatlak tabanlı hasarı ve dolayısıyla gevrek kırılmayı temsil etmektedir. Bu kısımda, ilgili kırılma modelinin hiperelastik formülasyonu ve nümerik uygulaması amaçlandığı için gevrek hasar davranışı izotrop (skalar  $d$ ) olarak ele alınmıştır. Malzeme bünyesindeki kırılma tanımlanan iki parametreden her hangi birisinin limit değerine ulaşması neticesinde gerçekleşecektir.

Mikroboşluk büyümesi, boşluklar etrafındaki dislokasyonların hareketleri tarafından tetiklendiği için, boşluk büyümesi tarafından bünyede dağıtılan enerji plastik şekil değişimi olarak yansıtılmıştır. Plastik akış sıkıştırılamaz olduğu için, boşluk oranı parametresi kütle korunumu prensibine bağlı olarak ortaya çıkmaktadır. Gevrek kırılma hasarı ise, skalar bir hasar parametresi tanımlanmış olup, elastik deformasyon enerjisi açığa çıkma hızı (elastic strain enerji release rate) ile enerji eşlenik olarak tanımlanmıştır. İlgili gevrek hasar parametresinin değişimi ise termodinamik formülizasyon çerçevesine bağlı olarak, ilgili hasar potansiyel fonksiyonunun tanımlanması ile birlikte, bu fonksiyon kullanılarak elde edilmiştir.

Literatürde mevcut iki farklı geçiş kırılması modelleri Ritchie-Knott-Rice tipi (Ritchie ve ark. 1973) ve Beremin tipi (1983) olarak temelde ikiye ayrılmaktadır. Her iki modelde bir çok uygulamada Gurson-Tvergaard-Needleman plastisite modeli ile bütünleşik olarak kullanılmaktadır. Bu kısımda verilen model, ilgili modellerden şu yönleri ile de ayrılmaktadır; (a) Hiperelastik formülasyon termodinamiksel uyumlu olarak kullanılmıştır. Deformasyon gradyanı geri çevrilebilir ve geri çevrilemez olarak iki kısma ayrılmıştır, (b) gevrek kırılmanın anizotrop etkilerinin modellenebilmesi için bir çerçeve sunulmuştur ve (c) gevrek kırılma hasarı modellenmesi ile ilgili mikroçatlakların malzeme bünyesinde oluş-turduğu katılık azalması modellenmiştir.

### 3.2.1 Temel kinematik denklemler

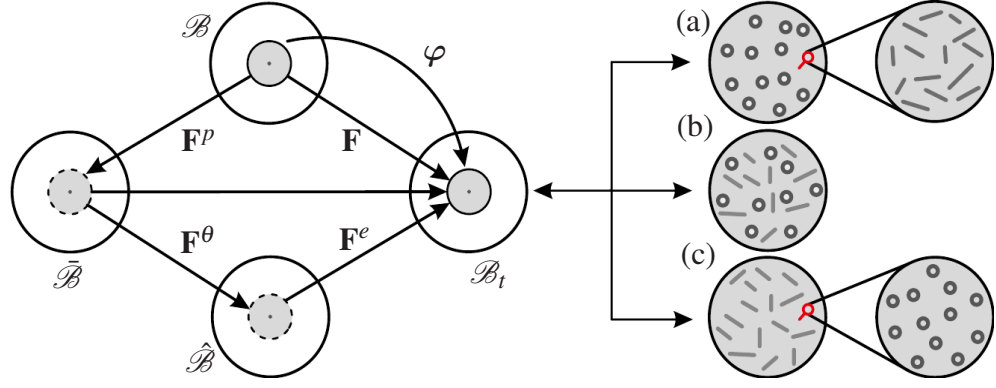
Yukarıda da bahsedildiği gibi ilgili hiperelastik formülasyonda deformasyon gradyanı geri çevrilebilir  $\mathbf{F}^r$  ve geri çevrilemez  $\mathbf{F}^p$  olarak iki kısma ayrılmıştır.

$$\mathbf{F} := \mathbf{F}^r \mathbf{F}^p \quad (3.22)$$

Gurson modeli ile tanımlı gelen boşluk büyümesi malzeme bünyesi üzerinde yoğunluk değişimine sebep olacağından, bu etkinin tanımlanması için deformasyon gradyanının Jacobi determinanı  $J = \det(\mathbf{F}) = \rho_0/\rho$  ile tanımlanmıştır. Burada  $\rho_0$  ve  $\rho$  sırası ile ilk ve anlık konumlardaki kütleli yoğunluklardır. Deformasyon gradyanına benzer şekilde de  $J^r := \det(\mathbf{F}^r)$  ve  $J^p := \det(\mathbf{F}^p)$  olarak tanımlanır. Geri çevrilebilir kısım malzeme kristal yapısındaki bozulmayı, geri çevrilemez kısım ise dislokasyon hareketleri ile tanımlı kısmı tanımlamaktadır (Hakansson ve ark. 2006). Geri çevrilebilir kısım ise temel olarak elastik ve termal parçalardan oluşmaktadır,  $\mathbf{F}^r := \mathbf{F}^e \mathbf{F}^\theta$ . Bu ayrıştırma ile birlikte, ilk ve anlık konumlar arasında bulunan bir ara konum tanımlanmış olup, bu konum her hangi bir gerilme tensörünün oluşmadığı termal ve plastik etkilerin var olduğu bir durum olarak ortaya konulmuştur. Bu konum ve ilgili deformasyon tanımları Şekil 3.4 ile verilmiştir. Bu durum dahilinde, sağ Cauchy-Green deformasyon tensörü de iki parçaya ayrılmaktadır,  $\mathbf{C}^r = [\mathbf{F}^r]^\top \mathbf{F}^r$ ,  $\mathbf{C}^p = [\mathbf{F}^p]^\top \mathbf{F}^p$ . Benzer analogi, hız gradyanı  $\mathbf{I}$  için de geçerli olmaktadır;  $\mathbf{I} = \mathbf{I}^r + \mathbf{I}^p$  ve  $\mathbf{I}^r := \dot{\mathbf{F}}^r [\mathbf{F}^r]^{-1}$ ,  $\mathbf{I}^p = \mathbf{F}^r \mathbf{L}^p [\mathbf{F}^r]^{-1}$ ,  $\mathbf{L}^p := \dot{\mathbf{F}}^p [\mathbf{F}^p]^{-1}$ . Burada dikkat edilmesi gereken,  $\mathbf{L}^p$  ifadesinin hız gradyanının ilk konumdaki ifadesinin geri dönüşsüz (plastik) kısmı olarak tanımlanmış olmasıdır.

Diğer taraftan, geri dönüşebilir logaritmik deformasyon tensörü  $\mathbf{e}_{log}^r := \ln(\sqrt{\mathbf{C}^r})$  olarak tanımlanır. İlgili ayrıştırma yapıldığında ise, volumetrik deformasyon tensörü  $\mathbf{e}_{log,v}^r := 1/3 \text{tr}[\mathbf{e}_{log}^r] \mathbf{1}$ , deviatorik deformasyon tensörü ise  $\mathbf{e}_{log,d}^r := \ln\left(\sqrt{J^{r-2/3} \mathbf{C}^r}\right) = \text{dev} \mathbf{e}_{log}^r$  olarak elde edilir.

Homojen olarak dağılmış boşluklara sahip temsili hacim elemanı varsayımı altında, birim hacim  $dV = dV^v + dV^m$  olarak elde edilir. Burada  $dV^v$  boşluk hacimlerinin,  $dV^m$  elastoplastik malzeme matrisinin birim hacmidir. Bir diğer ifadeyle boşluk oranı  $f = dV^v/dV$  olarak hesaplanır.  $J^v = dV/dV^m$  olarak alındığında ve matrisin başlangıç durumdaki hacmine  $dV^{m0}$  denirse,  $J^{v0} = dV^0/dV^{m0}$  olarak elde edilir. Malzeme matrisi sadece vo-



**Şekil 3.4.** Deformasyon gradyanının geri çevrilebilir ve geri çevrilemez kısımlarına ayrılması ve ara konumun tanımlanması. Anlık konum itibariyle bünyede oluşabilecek farklı hasar mekanizmaları; (a) boşluk büyümesi dominant olan, (b) boşluk ve çatlakların eşit oranda bulunduğu, (c) çatlak büyümesi dominant durumlar

lometrik termoelastik deformasyonlar gösterebileceği için  $J^r = dV^m/dV^{m0}$ .  $J = J^r J^p = dV/dV^0$  tanımı ile  $J^p = J^r/J^0$  olarak elde edilir. Her iki tarafında logaritması ve ilk konum zaman türevi alınırsa, boşluk oranının zamana göre değişimi

$$\dot{f} = [1 - f] \text{tr}(\mathbf{L}^p) \quad (3.23)$$

olarak elde edilir. Böylelikle boşluk oranı  $f$  bağımsız olmayan ve boşluklar etrafındaki dislokasyon hareketine bağlı bir parametre olarak ifade edilmektedir. Diğer taraftan, termodinamik kanunlar çerçevesinde, mikroçatlak oluşumu ve dolayısıyla gevrek kırılmayı temsil edecek yeni bir iç değişken parametreye ihtiyaç vardır. İç değişken tanımlanması ile birlikte, bu değişkenin hesaplanabilmesi için Helmholtz serbest enerji fonksiyonundan bağımsız bir enerji dağıtım fonksiyonunun da tanımlanması gerekmektedir. Bu noktada, sürekli ortam izotrop hasar parametresi olarak bilinen  $d \in [0, 1]$  tanımı ile birlikte, mikroçatlakların oluşumu ve birikimi ile birlikte oluşan katılık azalması ve enerji dağılımı malzeme bünyesine yansıtılmaktadır.

### 3.2.2 Termodinamik formülasyon

#### Genel teorik formülasyon

Helmholtz serbest enerji fonksiyonu  $\psi$  birim referans kütle için tanımlanmış olsun. Termodinamiğin birinci kuralı ilk (referans) konumda,

$$\rho_0 \theta \dot{\eta} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \rho_0 \dot{\theta} \eta - \rho_0 \dot{\psi} - J \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho_0 r \quad (3.24)$$

şekilinde yazılmaktadır. Denklem (3.24) ile verilen eşitlikte  $\boldsymbol{\tau}$  Kirchhoff gerilme tensörünü,  $\theta$  mutlak sıcaklığı,  $\eta$  birim kütledeki entropiyi,  $\mathbf{q}$  ısı akısını ve  $r$  ise birim kütle için ısı kaynağı olarak verilmiştir. Daha önce, Helmholtz serbest enerjisinin birim şekil değişimi de dahil olmak üzere, başka iç değişkenlere bağlı olarak verilebileceği belirtilmişti. Bu noktada, notasyonu basitleştirmek adına, tüm iç değişkenler  $\mathcal{I}$  ile sembolize edilen bir genel iç değişkenler vektörü/tensörü olarak tanımlanmıştır,  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\mathcal{I})$ . Bu durumda, termodinamğin ikinci kuralı tarafından sağlanan enerji dağılımı eşitsizliği ilk (referans) konumda,

$$\mathcal{D}_{loc} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \rho_0 \partial_{\mathcal{I}} \boldsymbol{\psi} \dot{\mathcal{I}} - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (3.25)$$

ile verilmektedir. Enerji dağılımı, mekanik ve ısı kısımları  $\mathcal{D}_{loc} = \mathcal{D}_{loc}^{mec} + \mathcal{D}_{loc}^{th}$  olarak ikiye ayrılabilir. Her bir kısım,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{loc}^{mec} &:= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \rho_0 \partial_{\mathcal{I}} \boldsymbol{\psi} \dot{\mathcal{I}} \geq 0 \\ \mathcal{D}_{loc}^{th} &:= -\frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

olarak ifade edilmektedir. Isıl kısım, Fourier tipi bir denklem ile, hasar mekaniği koşulları altında da sağlanmaktadır. Mekanik kısmın sağlanması için uygun iç değişken takımının tanımlanması gerekmektedir. Bu noktada  $\mathcal{I} = \{\mathbf{C}^r, d, \alpha, \theta\}$  parametreleri seçilmiştir.  $d$  skalar izotrop mikroçatlak tabanlı hasar parametresi,  $\alpha$  plastik pekleşme parametresi olarak verilmiştir. Serbest enerji ve iç değişkenlerin zaman türevleri alındığında Denklem (3.26);

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{loc}^{mec} &= [\boldsymbol{\tau} - 2\rho_0 [\mathbf{F}^r]^\top \cdot \partial_{\mathbf{C}^r} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{F}^r] : \mathbf{d}^r + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{F}^r \cdot \mathbf{L}^p \cdot [\mathbf{F}^r]^{-1} \\ &\quad - [\eta + \rho_0 \partial_{\theta} \boldsymbol{\psi}] \dot{\theta} - \rho_0 \partial_d \boldsymbol{\psi} \dot{d} - \rho_0 \partial_{\alpha} \boldsymbol{\psi} \dot{\alpha} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

olarak açık formda yazılabilmektedir.  $\dot{\mathbf{C}}^r = 2[\mathbf{F}^r]^\top \cdot \mathbf{d}^r \cdot \mathbf{F}^r$  ve  $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{w} = 0$  olduğu için ( $\mathbf{w} = -\mathbf{w}^\top$  olduğundan dolayı) ifadeleri denklem (3.27) ile tanımlanmıştır. (3.27) ifadesinin her hangi  $\mathbf{d}^r$  ve  $\dot{\theta}$  seçiminde sağlanabilmesi koşulu göz önüne alındığında, aşağıda verilen bünye denklem formları elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &:= 2\rho_0[\mathbf{F}^r]^\top \cdot \partial_{\mathbf{C}^r} \psi \cdot \mathbf{F}^r, & \beta &:= \rho_0 \partial_\alpha \psi, \\ Y &:= -\rho_0 \partial_d \psi, & \eta &:= -\rho_0 \partial_\theta \psi\end{aligned}\quad (3.28)$$

Denklem (3.28) ile verilen  $Y$  ve  $\beta$  sırası ile efektif deformasyon enerjisi açığa çıkma hızı ve plastik izotrop pekleşmeye eşlenik iş kuvveti olarak tanımlanmıştır. Bu eşitlikler (3.27) ile verilen eşitsizliğe yerleştirildiğinde indirgenmiş mekanik enerji dağılımı,

$$\mathcal{D}_{loc}^{mec} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{F}^r \cdot \mathbf{L}^p \cdot [\mathbf{F}^r]^{-1} + Y\dot{d} - \beta\dot{\alpha} \geq 0 \quad (3.29)$$

olarak elde edilir.  $\boldsymbol{\Sigma} := [\mathbf{F}^r]^\top \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot [\mathbf{F}^r]^{-\top}$  ifadesi ara konumda Mandel gerilme tensörü olarak tanımlanmış olsun. İlk ve anlık konum arasında tanımlanmış olan konum dahilinde  $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{F}^r \cdot \mathbf{L}^p \cdot [\mathbf{F}^r]^{-1} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}^p$  ifadesi geçerli olacaktır. Denklem (3.29) tekrar düzenlenirse,

$$\mathcal{D}_{loc}^{red} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}^p - \beta\dot{\alpha} + Y\dot{d} \geq 0 \quad (3.30)$$

eşitsizliği indirgenmiş mekanik enerji dağılımı olarak elde edilir. Denklem (3.30) ile verilen ifadede, hız gradyanı tensörünün plastik kısmının ara konumdaki karşılığı ile Mandel gerilme tensörü birbirlerinin iş eşleniği olarak elde edilmiştir. Elastik izotropi koşulu göz önüne alındığında  $[\mathbf{F}^r]^\top \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot [\mathbf{F}^r]^{-\top} = [\mathbf{R}^r]^\top \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}^r$  ifadesi geçerli olmaktadır. Burada  $\mathbf{R}^r$  deformasyon gradyanının geri çevrilebilir kısmının polar ayrıştırma ile edilen elastik rotasyon tensörüdür. Dolayısıyla,  $\boldsymbol{\Sigma} = [\mathbf{R}^r]^\top \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}^r$  olarak ele alınmıştır. Fiziksel ve olarak  $\boldsymbol{\Sigma}$ , Kirchhoff gerilme tensörünün  $\boldsymbol{\tau}$  elastik rotasyon tensörü ile döndürülmüş hali olarak düşünülmelidir. Diğer taraftan,  $\boldsymbol{\tau}$  ve  $\boldsymbol{\Sigma}$  tensörlerinin değişmezleri birbirleri ile aynıdır. Bu durum, plastik potansiyel tanımında önem kazanacaktır.

Son olarak, enerji dağılım potansiyeli  $\Upsilon$ ;

$$\Upsilon(\boldsymbol{\Sigma}, \beta, Y, d, f) := \phi^p(\boldsymbol{\Sigma}, \beta; d, f) + \phi^d(Y; d) \quad (3.31)$$

olarak tanımlanır. Lagrange penaltı çarpanı ile optimizasyon problemi uygulandığında, normalite kuralına göre aşağıda verilen denklem takımı, ilgili iç parametrelerin zamana bağlı değişimleri için elde edilir,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^p &= \lambda \partial_{\Sigma} \Upsilon = \lambda \partial_{\Sigma} \phi^p \\
\dot{\alpha} &= -\lambda \partial_{\beta} \Upsilon = -\lambda \partial_{\beta} \phi^p \\
\dot{d} &= \lambda \partial_Y \Upsilon = \lambda \partial_Y \phi^d
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Denklem (3.32) ile verilen ifadede  $\lambda$  plastik çarpan parametresidir. Bu formülasyon dahilinde dikkat edilmesi gereken nokta, kinematik bir bağıntı ile gevrek hasar oluşumu ve ilerlemesi plastik deformasyona bağlanmıştır. Bu yaklaşımın metallik yapıya sahip malzemeler için uygun bir yaklaşım olduğu literatürde de verilmiştir (Beremin 1983). Diğer taraftan, gevrek kırılmayı hiç bir şekilde plastik deformasyona bağlamayan modeller de bulunmaktadır (Ritchie ve ark. 1973).

### İlgili bünye denklem formları

Baz alınan temsili hacim elemanı (representative volume element) için gerçekleştirilen teorik formülasyonun tamamlanması için ilgili Helmholtz serbest enerji fonksiyonunun seçimi gerekmektedir. Bu yaklaşım dahilinde elastik, plastik ve termal olarak üç ayrı kısımdan oluşan Helmholtz fonksiyonu seçilmiştir,  $\psi = \psi^e + \psi^p + \psi^{\theta}$ . Elastik kısım, benzer şekilde volümetrik ve deviyatorik olarak da iki parçaya ayrılmış olup  $\psi^e = \psi_{vol}^e + \psi_{dev}^e$ , Lemaitre-tipi hasar mekaniği formülasyonu baz alınarak, gevrek hasar parametresi elastik enerjiye etki edecek şekilde ele alınmıştır.

$$\begin{aligned}
\rho_0 \psi_{vol}^e &= \kappa [1 - d] \left[ \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{e}_{log}^r)]^2 - 3\alpha_{\theta} [\theta - \theta_0] \text{tr}(\mathbf{e}_{log}^r) \right] \\
\rho_0 \psi_{dev}^e &= \mu [1 - d] [\text{dev}(\mathbf{e}_{log}^r) : \text{dev}(\mathbf{e}_{log}^r)]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Denklem (3.33) ile verilen serbest enerji fonksiyonu ilk (referans) konumdaki hali ile verilmiştir.  $\kappa$  ve  $\mu$  sırası ile kayma ve hacim modülleri olup, diğer elastik ifadeler olan Young modülü ve Poisson oranı kullanılarak elde edilebilmektedir. Plastik kısım için ise,

$$\rho_0 \psi^p = [1 - f_0] [\tau_{m,\infty} - \tau_{m,0}] \left[ \alpha + \frac{1}{\omega_m} [\exp(-\omega_m \alpha) - 1] \right] \tag{3.34}$$

ifadesi ilk (referans) konumdaki hali ile verilmiştir. Denklem (3.34) ile verilen ifade, üstel bir davranış gösterecek şekilde seçilmiş olup,  $\tau_{m,0}$  ve  $\tau_{m,\infty}$  sırası ile metal matrisin başlangıç anındaki ve doymuş durumdaki Kirchhoff-formu akma gerilme limitlerini temsil

etmektedir.  $\omega_m$  ise metal matris pekleşmesinin duygun duruma ulaşma hızıdır. Metal matris ile temsili hacim elemanı arasındaki ilişki  $[1 - f_0]$  çarpanı ile kurulmaktadır.  $f$  yerine  $f_0$  kullanılmasının sebebi, hem enerji ve potansiyel seçimlerinin aynı temel (basis) üzerinde oturtulmuş olmasıdır (Hakansson ve ark. 2006).

Kirchhoff ve Mandel gerilmeleri arasında  $\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{R}^r]^\top \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{R}^r$  değişimi uygulandığında,  $\phi^P(\boldsymbol{\Sigma}, \beta; d, f)$  olarak tanımlanan plastik potansiyel,  $\phi^P(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \beta, f)$  şekilde yeniden yazılabilir. Burada ek olarak efektif Kirchhoff gerilmesi  $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau}/[1 - d]$  ile tanımlanmıştır.

Daha önce de tanımlandığı gibi, Gurson plastik potansiyeli, efektif gerilme tanımı baz alınarak,

$$\phi^P(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \beta, f) := \frac{1}{2\tau_m} \left[ \bar{\tau}_{eq}^2 + 2f\tau_m^2 \cosh\left(\frac{\text{tr}\bar{\boldsymbol{\tau}}}{2\tau_m}\right) - \tau_m^2[1 + f^2] \right] \leq 0 \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edilmektedir. (3.35) ifadesindeki  $\tau_{eq}$  efektif eşdeğer Kirchhoff gerilmesi olarak  $\bar{\tau}_{eq} = \sqrt{3/2[\text{dev}\bar{\boldsymbol{\tau}} : \text{dev}\bar{\boldsymbol{\tau}}]}$  ile tanımlanır. Dikkat edilmesi gereken nokta Kirchhoff ve Mandel gerilmeleri arasındaki eşirliklerdir. Tanımlanan bu eşitlikler,  $\bar{\tau}_{eq} = \bar{\Sigma}_{eq} := \sqrt{3/2[\text{dev}\bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \text{dev}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}]}$  ve  $\text{tr}\boldsymbol{\tau} = \text{tr}\boldsymbol{\Sigma}$  ifadeleridir. Plastik metal matris pekleşmesi ise  $\tau_m = \tau_{m,0} + \beta_m$  ve  $\beta_m = \beta/[1 - f_0]$  ifadeleri ile tanımlanmıştır.

Tam olarak oluşmuş plastik akış için ( $\phi^P(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \beta) = 0$  olduğu durumda), hidrostatik gerilmelerin oluşmadığı bir durum için ( $\tau/2\tau_m \rightarrow 0$ ),  $\cosh(\text{tr}/2\tau_m) \rightarrow 1$  olmaktadır. Bu durumda,  $\bar{\tau}_{eq}^2 = [1 - f]^2\tau_m^2$  ifadesi efektif gerilme tanımı kullanılarak,

$$\tau_{eq} = [1 - d][1 - f]\tau_m \quad (3.36)$$

denklemini vermektedir. (3.35) ifadesi Şekil 3.4 ile tanımlanmış boşluk büyümesi ve matlak büyümesi ile oluşan hasarın matematiksel olarak formülize edilmiş hali olarak elde edilmiştir. Diğer taraftan, normalite (normalite) kuralı kullanılarak ve  $\boldsymbol{\Sigma}$  ile  $\boldsymbol{\tau}$  arasındaki eş eksenlik göz önüne alındığında, değişim denklemleri;

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^P &= \lambda \frac{\partial \phi^P}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{1 - d} \frac{\text{dev}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}}{\tau_m} \\ \dot{\alpha} &= -\lambda \frac{\partial \phi^P}{\partial \beta} = \lambda \end{aligned} \quad (3.37)$$



şeklinde ifade edilebilmektedir. Eşdeğer plastik şekil değişimi hızı ise  $\dot{\epsilon}_{eq}^p = \sqrt{2/3 \mathbf{L}^p : \mathbf{L}^p}$  ile verilmiş olup,  $\dot{\alpha} = \lambda$  kullanılarak,  $\dot{\epsilon}_{eq}^p = \dot{\alpha}/[1-d]$  ifadesi elde edilebilmektedir. Dolayısıyla, ilk (referans) konumdaki plastik iş ifadesi,

$$\text{dev} \Sigma : \mathbf{L}^p = [1-d] \tau_m \dot{\epsilon}_{eq}^p \quad (3.38)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (3.38) dikkatli incelendiğinde, gevrek hasar/kırılma parametresinin iş eşitliği denkleminde kendisine yer bulmuş olmasıdır. Son olarak, (3.37) ve (3.38) göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \lambda \\ \dot{\epsilon}_{eq}^p &= \frac{\dot{\alpha}}{1-d} \end{aligned} \quad (3.39)$$

plastik pekleşme parametresi ve eşdeğer plastik şekil değişimi ifadeleri matematiksel olarak ifade edilmiştir. Dolayısıyla, plastik iş ifadesi ise,

$$[1-f_0][1-d] \dot{\epsilon}_{eq}^p \tau_m = \Sigma : \mathbf{L}^p \quad (3.40)$$

olarak genelleştirilmiştir. Denklem (3.41) toplam mekanik enerji dağılımı ifadesinde tanımlanmıştır. Diğer taraftan,  $\phi^p$  plastik potansiyelinin gerilmetensörünün izine (trace) bağlı olmasından dolayı,  $\mathbf{L}^p$  izsiz değildir. Buna bağlı olarak, hacimsel plastik davranış etkileri de model içirsinde bulunmaktadır. Sonuç itibariyle, boşluk oranı  $f$ , hacimsel plastik şekil değişimlerine, kütleinin korunumu kuralı üzerinden bağlı olmaktadır,  $\dot{f} = [1-f] \text{tr}(\mathbf{L}^p)$ .

$d$  hasar parametresinin zamana bağlı değişimi  $\dot{d}$  ise, denklem (3.32.3) ile verilmiş olan potansiyel ifadeden türetilmiş olup, gevrek hasar potansiyel fonksiyonu  $\phi^d$  için, Lemaitre-tipi hasar potansiyeli seçilmiştir.

$$\phi^d(Y) = \frac{S}{[1+m][1-d]^n} \left[ \frac{\langle Y - Y_0 \rangle}{S} \right]^{m+1} \quad (3.41)$$

Denklem (3.41) ile verilen Lemaitre tipi hasar potansiyeli ifadesinde  $m, n, S$  ve  $Y_0$  ilgili malzeme parametreleri olup,  $Y_0$  parametresi gevrek kırılmanın başlangıcını belirleyen deformasyon enerjisi açığa çıkma hızının eşik değeri olarak tanımlanmıştır.

Denklem (3.28), (3.33) ve (3.34) kullanılarak,  $\Sigma$ ,  $\beta$  ve  $Y$  için aşağıda verilen açık formlar elde edilir,

$$\begin{aligned}\Sigma &= [1-d] \left[ \kappa \text{tr}(\mathbf{e}_{log}^r) \mathbf{1} + 2\mu \text{dev}(\mathbf{e}_{log}^r) - 3\kappa\alpha_\theta [\theta - \theta_0] \mathbf{1} \right] \\ \beta &= [1-f_0] [\tau_{m,\infty} - \tau_{m,0}] [1 - \exp(-\omega_m \alpha)] \\ Y &= \kappa \left[ \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{e}_{log}^r)]^2 - 3\alpha_\theta [\theta - \theta_0] \text{tr}(\mathbf{e}_{log}^r) \right] + \mu [\text{dev}(\mathbf{e}_{log}^r) : \text{dev}(\mathbf{e}_{log}^r)]\end{aligned}\quad (3.42)$$

Burada plastik matris pekleşmesi  $\beta_m = \beta/[1-f_0] = [\tau_{m,\infty} - \tau_{m,0}] [1 - \exp(-\omega_m \alpha)]$  ifadesi ile belirtilmiştir. Plastik şekil değişimi, plastik pekleşme ve gevrek hasar parametresinin zamana bağlı değişimleri ise,

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^p &= \frac{\lambda}{1-d} \left[ \frac{3}{2} \frac{\text{dev} \bar{\Sigma}}{\tau_m} - \frac{1}{2} f \sinh \left( \frac{q_2 \text{tr} \bar{\Sigma}}{2\tau_m} \right) \mathbf{1} \right] \\ \dot{\alpha} &= \lambda \\ \dot{d} &= \frac{\lambda}{[1-d]^n} \left[ \frac{\langle Y - Y_0 \rangle}{S} \right]^m\end{aligned}\quad (3.43)$$

olarak açık formları ile verilmiştir. Bu ifadede efektif Mandel gerilme tensörü  $\bar{\Sigma} = \Sigma/[1-d]$  olarak verilmiştir. Denklem (3.42) ve (3.43) kullanılarak, mekanik enerji dağılımı ise,

$$\mathcal{D}_{loc}^{red} = [1-f_0][1-d] \dot{\epsilon}_{eq}^p \tau_{m,0} + \dot{\epsilon}_{eq}^p \frac{1}{[1-d]^{n-1}} Y \left[ \frac{\langle Y - Y_0 \rangle}{S} \right]^m \quad (3.44)$$

olarak elde edilmektedir. Denklem (3.44) ifadesindeki ikinci terim, gevrek kırılma ile ilgili hasarı yönetmektedir. Ayrıca, denklem (3.44) her zaman sıfırdan büyük olmakta olup, termodinamiğin ikinci kuralını sağlamaktadır. İlgili hiperelastik formülasyon Tablo 3.8 ile özetlenmiştir.

---

1. Deformasyon kinematığı

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^r \cdot \mathbf{F}^p \quad \text{ve} \quad \mathbf{F}^r = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^\theta$$

2. Termoelastik gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

$$\boldsymbol{\Sigma} = [1 - d] \left[ \kappa \text{tr}(\mathbf{e}_{log}^r) \mathbf{1} + 2\mu \text{dev}(\mathbf{e}_{log}^r) - 3\kappa\alpha_\theta [\theta - \theta_0] \mathbf{1} \right]$$

3. Pekleşme ve hasar eşlenik değişkenleri ifadeleri

$$\beta = [1 - f_0] [\tau_{[m, \infty]} - \tau_{m,0}] [1 - \exp(-\omega_m \alpha)]$$

$$Y = \kappa \left[ \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{e}_{log}^r)]^2 - 3\alpha_\theta [\theta - \theta_0] \text{tr}(\mathbf{e}_{log}^r) \right] + \mu [\text{dev}(\mathbf{e}_{log}^r) : \text{dev}(\mathbf{e}_{log}^r)]$$

4. Matris akma gerilmesi ve plastik pekleşme

$$\tau_m = \tau_{m,0} + \beta_m \quad \text{and} \quad \beta_m = \beta / [1 - f_0]$$

5. Gerilme uzayında tanımlı termoelastik tanım uzayı,

$$\mathbb{E}_\tau = \{ [\bar{\boldsymbol{\tau}}, \beta, f] \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^+ : \phi^p(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \beta, f) \leq 0 \}$$

(a)  $\mathbb{S}$  simetrik ikinci derece tensörlerin tanımlı olduğu vektör uzayını ve  $\phi^p$  ilgili plastik potansiyeli tanımlar

$$\phi^p(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \beta, f) = \frac{1}{2\tau_m} \left[ \bar{\tau}_{eq}^2 + 2f\tau_m^2 \cosh\left(\frac{\text{tr}\bar{\boldsymbol{\tau}}}{2\tau_m}\right) - \tau_m^2 [1 + f^2] \right]$$

6. Plastik akış denklemi (ilişkisel(associative) kural dahilinde)

$$\mathbf{L}^p = \frac{\lambda}{1 - d} \left[ \frac{3}{2} \frac{\text{dev}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}}{\tau_m} - \frac{1}{2} f \sinh\left(\frac{\text{tr}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}}{2\tau_m}\right) \mathbf{1} \right]$$

7. Plastik pekleşme, gevrek hasar ve sünek hasar (boşluk oranı) için değişim denklemleri

$$\dot{\alpha} = \lambda \quad \text{and} \quad \dot{\epsilon}_{eq}^p = \frac{\lambda}{1 - d}$$

$$\dot{d} = \frac{\lambda}{[1 - d]^n} \left[ \frac{\langle Y - Y_0 \rangle}{S} \right]^m$$

$$\dot{f} = [1 - f] \text{tr}(\mathbf{L}^p)$$

8. Karush-Kuhn-Tucker yükleme durumları ve süreklilik koşulu

$$\lambda \geq 0, \quad \phi^p(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \beta, f) \leq 0, \quad \lambda \phi^p(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \beta, f) = 0, \quad \lambda \dot{\phi}^p(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \beta, f) = 0$$

---

**Çizelge 3.8.** Hiperelastik formülasyon geçiş kırılması malzeme bünye modeli denklemleri

## 4. BULGULAR

### 4.1 Hipoelastik Yaklaşım

#### 4.1.1 Küçük Zımba deneylerine uygulama

ABAQUS/Explicit içersine Fortran üzerinden VUMAT olarak kodlanan iki geçiş kırılması modeli, tek eleman testleri ile valide edildikten sonra, küçük zımba testlerini sünek, gevrek ve geçiş kırılması durumlarında modelleyecek edilecek şekilde analizlere verilmiştir. Sünek kırılma için 22°C, gevrek kırılma için –196°C, geçiş kırılması içinse –158°C sıcaklıklarda analizler gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen analizler Turba ve arkadaşları (2011) tarafından gerçekleştirilen küçük zımba deneyleri sonuçları ile korelasyona tabi tutulmuştur.

#### Küçük zımba deneyleri sınır şartları

Küçük zımba deneyinde silindirik kesitli küresel uçlu rijit bir zımba, Yuvarlak ve yassı bir numuneyi sabit bir hız ile numuneyi yüklemektedir. Deney süresince, yükleme kuvveti  $F$  ile, numune ortasından alınan düşey deplasman  $\delta$  ölçülmektedir. Küçük zımba testinin önemi, test sonuçlarının bir çok parametrenin tayininde kullanılabilmesidir. Örneğin, ilgili yük-deplasman eğrileri malzemenin akma gerilmesi, kırılma gerilmesi, elastisite modülü, kırılma tokluğu, geçiş kırılması sıcaklık aralığı, yüksek sıcaklık sürünme özellikleri..vb bir çok önemli malzeme parametresi test sonuçlarında elde edilebilmektedir. Diğer taraftan, testin çok küçük numuneleri test edebilme yeteneği olduğundan, halihazırda kullanılan yapılardan alınan çok küçük numuneler ile deneyler gerçekleştirilebilmektedir. Bu durumda, mevcutta kullanılan yapıların mekanik ya da termal malzeme karakteri-zasyonu gerçekleştirilebilmekte, böylelikle kullanılan yapının ömür ve dayanım özellikleri hasarsız bir şekilde tayin edilebilmektedir. Küçük zımba testi ve ilgili prosedürler için CEN standardı (2006) incelenebilir,

Küçük zımba deneyler süreci ilk aşamasında, zımba teması ile birlikte elastik eğilme durumu gözlenmektedir. Bununla beraber, zımbanın numuneye dokunduğu bölgede çok küçük miktarda plastik şekil değişimi de görülür. Zımba üzerinden yükleme devam e-

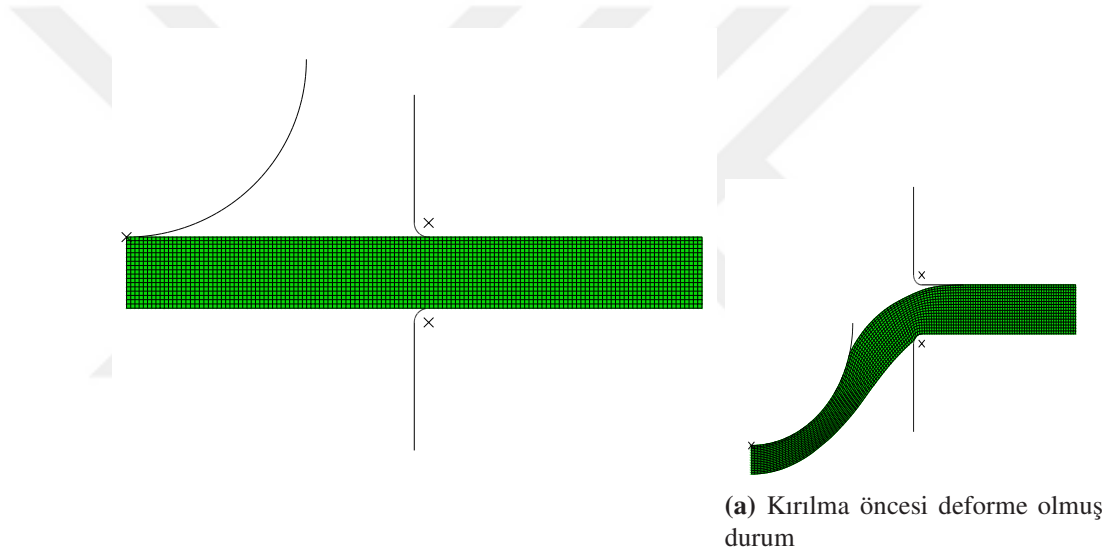
derken, numune kesitinde plastik eğilme durumunun oluşmasına sebep olmaktadır. Yüklemenin daha ilerki durumlarında, zımba ile numune arasındaki temas alanının artması ile birlikte deformasyon modu plastik eğilme durumundan membran gerilmesine dönmektedir. Bu fazdan sonra yüklemenin devam etmesi ile birlikte uygulanan kuvvet maksimum değere ulaşır ve numunenin alt yüzeyinde plastik dengesizlik (instability) oluşumu ile birlikte kesit belvermesi (necking) görülmektedir. Bu durumdan sonra ile kırılma izlenir.

Literatürde, küçük zımba üzerine oldukça deneysel çalışmaları bulunmaktadır. Bunlardan bazıları Baik ve ark. (1986), Mao ve Takahashi (1987), Ha ve Fleury (1998), Zidan ve Brookfield (2003), Linse ve ark. (2008), Foletti ve ark. (2011), Gülçimen ve ark. (2013), Turba ve ark. (2011), Abendroth ve Kuna (2003) tarafından yayınlanmıştır. Bunlardan Turba ve arkadaşları tarafından yapılmış olanı 22°C ila -196°C arasında değişen sıcaklıklarda, geçiş kırılmasını da kapsayacak şekilde deneysel çalışma ihtiva etmektedir. Bu çalışma 0.5mm kalınlığındaki düz ve 1mm kalınlığında öntanımlı çentik bulunan numunelerin yük-deplasman eğrilerini kapsamaktadır. Turba ve arkadaşları tarafından yapılmış olan bu çalışma dahilindeki 0.5mm düz numuneli deneysel kurgunun sonuçları ele alınarak, geliştirilmiş geçiş kırılması modellerinin simülasyonları gerçekleştirilmiştir. Öntanımlı çatlağa sahip olan numunelerin deneysel sonuçlarının önerilen modelin validasyonu için kullanılmamasının sebebi, Turba ve arkadaşları tarafından da verildiği gibi, ilgili öntanımlı çatlakların elektro erozyon yöntemi (EDM) ile açılmış olması ve bu yöntem ile oluşacak mikro çatlak ve çapakların hali hazırda istatistiksel davranış gösteren gevrek kırılmadaki bilinmezlik oranını arttıracak olmasıdır. Dolayısıyla, bu numunelerin gevrek kırılma test sonuçları da önemli oranda sapma gösterdiği gibi, geliştirilmiş nümerik modellerin kıyaslarındaki bilinmezliği de arttıracaktır (Van Dijk 1973).

### **Küçük zımba nümerik sonuçları**

Düz numunelerin analizlerini gerçekleştirebilmek için, ABAQUS sonlu elemanlar yazılımı içerisinde aksel simetrik bir model oluşturulmuştur.  $\varnothing \times 0.5\text{mm}$  boyutlarındaki dairesel numuneler 4 düğüm noktasına sahip  $0.02 \times 0.02\text{mm}$  boyutlarındaki doğrusal sonlu elemanlar ile modellenmiştir. Zımba  $\varnothing 2.5\text{mm}$  boyutunda ve rijit olarak modellenmiş olup,  $0.005\text{mm/s}$  sabit hız sınır koşuluna analiz süresince sahiptir. Zımba ve numune

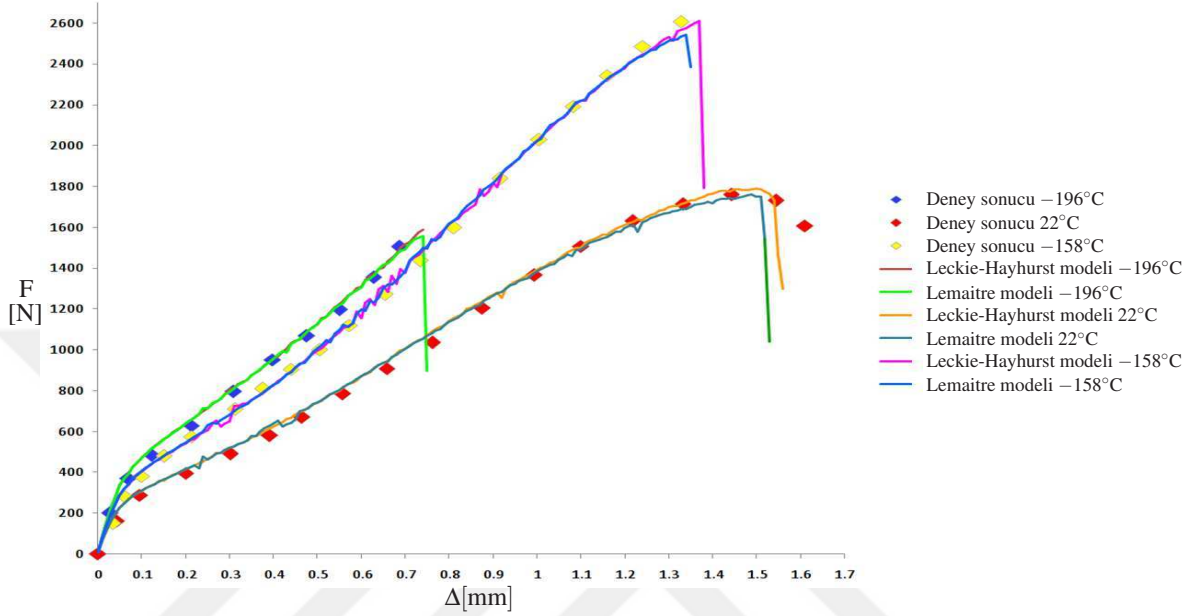
arasında sürtünmeli temas tanımlanmış, sürtünme katsayısı 0.19 olarak alınmıştır. Toplam simülasyon süresi zamana bağlı deformasyon etkilerini nötralize edebilmek adına 500s olarak alınmıştır. Simülasyonlar üç farklı sıcaklık değerinde koşturulmuştur ve Turba ve arkadaşları tarafından verilen ilgili sıcaklıktaki yük deplasman eğrileri ile simülasyon sonuçları karşılaştırılmıştır. Bu sıcaklıklar 22°C, -158°C ve -196°C'dir. Bu simülasyonlarda kullanılan malzeme parametreleri, tek eleman simülasyonlarında kullanılan ve Tablo 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 ve 3.7 ile verilen parametrelerdir. Farklı olarak, Leckie-Hayhurst modeli için tüm sıcaklıklarda  $Y^0 = 1300\text{MPa}$  olarak, Lemaitre-tipi modelde ise -196°C'de  $\epsilon_{eq}^{p,crit} = 1 \times 10^{-3}$ , -158°C'de  $\epsilon_{eq}^{p,crit} = 1 \times 10^{-2}$  ve 22°C'de  $\epsilon_{eq}^{p,crit} = 1.5 \times 10^{-2}$  olarak alınmıştır.



**Şekil 4.1.** Deforme olmamış durum ve sonlu elemanlar ağ örgüsü

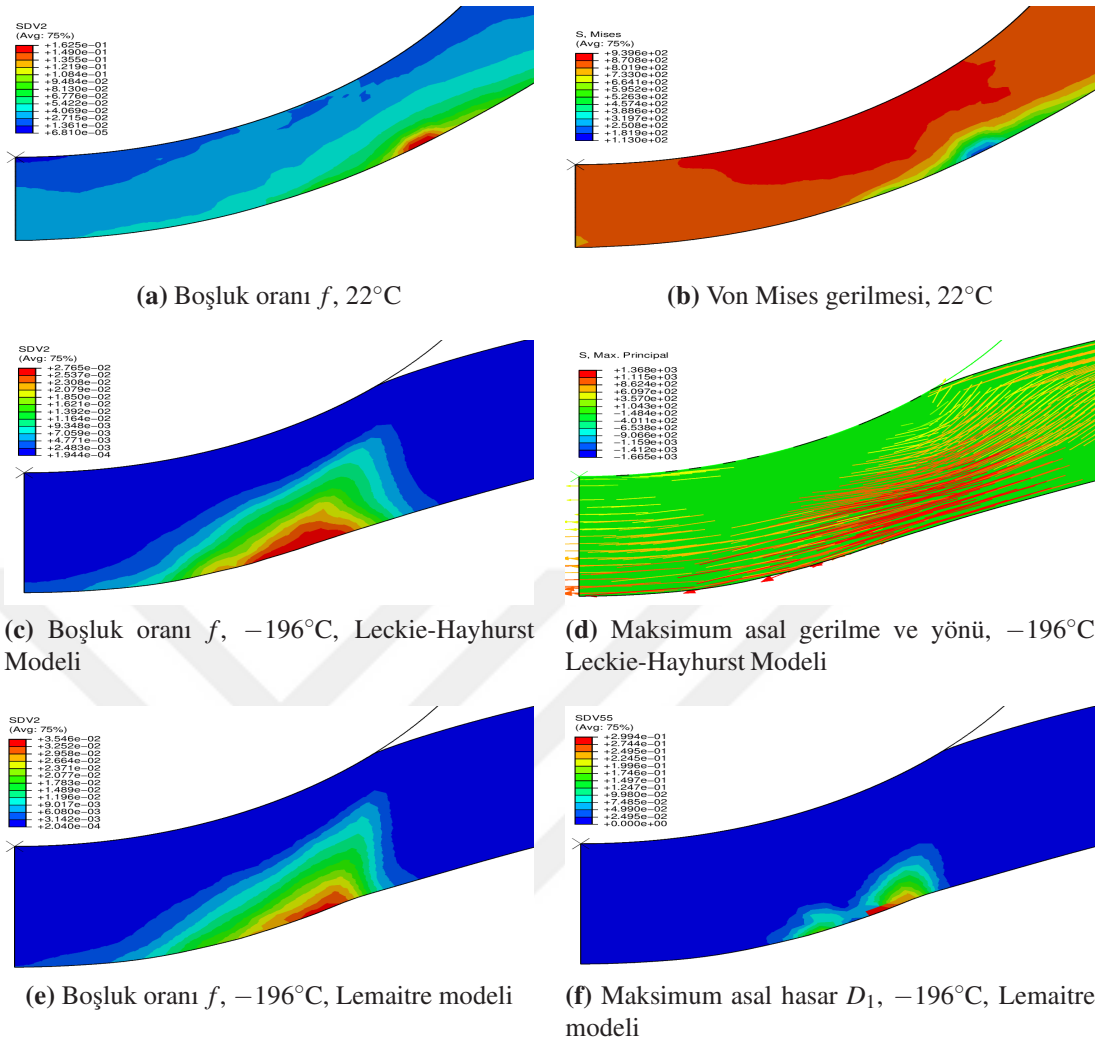
Sonlu elemanlar modeli ve ağ yapısı Şekil 4.1 ile verilmiştir. Nümerik analizler sonucunda elde edilen yük-deplasman eğrileri ve ilgili deneysel sonuçlar ile karşılaştırılması ise Şekil 4.2'da verilmiştir. Şekil 4.2 incelendiğinde görüldüğü üzere, her iki model de sadece sıcaklık değişimi altında, ilgili yük-deplasman eğrilerini deneysel sonuçlar ile oldukça uyumlu olarak karşılamaktadır. Diğer taraftan benzer uyum hem kırılma anları karşılaştırıldığında, hem de maksimum kuvvet değerinin oluştuğu yerler açısından da görülmektedir. Leckie-Hayhurst modeli ile elde edilen maksimum kuvvet, Lemaitre modeli ile elde edilen maksimum kuvvete göre daha düşük hesaplanmıştır. Bunun sebebi, Lemaitre modelindeki hasar oluşumunun plastik şekil değişimine bağlanması ve yüksel plastik deformasyonlarda ekstra enerji dağılımını modele yansıtmış olmasıdır. Leckie-

Hayhurst modeli ise maksimum asal gerilmeler üzerinden çalıştığı için böyle bir durum gözükmemektedir. Yine de, iki model arasındaki fark kabul edilebilir seviyelerdedir ve deneysel sonuçlar ile uyumludur.



**Şekil 4.2.** Önerilen modellerin nümerik analiz sonuçlarının Turba ve ark. (2011)'da verilen deneysel sonuçlar ile karşılaştırması

Boşluk büyümesi ve mikro çatlak ilerlemesi tabanlı hasar parametresi sonuçları ile, Von Mises ve maksimum asal gerilme sonuçları ise Şekil 4.3 ile verilmiştir. Grafiksel sonuçlar çatlak oluşumundan tam önceki zaman adımıyla alınmıştır. Boşluk oranı ve Von Mises gerilme sonuçlarından anlaşıldığı gibi 22°C'de ana kırılma mekanizması boşluk büyümesi tabanlıdır ve sünekliklidir. Boşluk oranı parametresinin -196°C'deki sonuçları her iki gevrek kırılma durumu için incelendiğinde ise, boşluk oranının kırılmayı tetikleyecek bir değere ulaşmadığı görülmektedir. Diğer taraftan Leckie-Hayhurst modeli gevrek kırılma için, maksimum asal gerilme olan  $\sigma_1$  değerinin gevrek kırılma eşik parametresi olan  $Y^0 = 1300\text{MPa}$  değerini aştığı görülmektedir. Diğer taraftan, Lemaitre-tipi gevrek kırılma modeli içinse, gevrek kırılmayı tetikleyecek olan maksimum asal hasar değeri  $D_1$ 'in, kritik değeri olan  $D_c = 0.30$  seviyesine ulaştığı görülmektedir. Dikkat edilebilecek bir diğer nokta ise, Lemaitre-tipi modelde, hasar ve plastik şekil değişimi tensörlerinin eş eksenli olma durumları sebebiyle  $f$  ve  $D_1$  dağılımlarının benzer karakteristik göstermesidir. Ferritik metallerdeki sıcaklığa bağlı sünek-gevrek geçiş kırılmasının modellenmesi için



**Şekil 4.3.** 22°C, -158°C ve -196°C sıcaklıklardaki boşluk oranı, hasar ve gerilme dağılımları.

hipoelastik formülasyon baz alınarak iki farklı malzeme bünye teorisi önerilmiştir. Bu modeller, sünek kırılmanın Gurson tipi bir plastisite ve gözenek büyümesi hasarı modeli üzerine oturtulması, gevrek kırılmanın ise sürekli ortamlar hasar mekaniği temelleri ile modellenmesi ile geliştirilmiştir. Bir diğer deyişle, metallerdeki boşluk büyümesi ve birleşmesi tabanlı sünek kırılma Gurson tipi malzeme bünye modeli ile modellenirken, mikro çatlak oluşumu ve ilerlemesi tabanlı gevrek kırılma  $D$  hasar parametresi tensörü üzerinden tanımlanmıştır. Geçiş kırılması durumunu modelleyebilmek, bu iki farklı parametrenin farklı sıcaklıklardaki değişimleri ile gerçekleşmektedir. Gevrek kırılma için iki farklı model önerilmiş ve sonuçları karşılaştırılmıştır. Leckie-Hayhurst sürünme hasarı modeli değiştirilerek, gevrek kırılmayı başlatıp ilerletecek bir gevrek kırılma modeline



genişletilmiştir. Diğer taraftan, metallerde gevrek kırılma ile birlikte her zaman az da olsa plastik deformasyonun da görölmesi durumu ele alınarak, Lemaitre ve arkadaşları tarafından önerilmiş plastisite tabanlı hasar modeli geliştirilmiş ve gevrek kırılma için ikinci model olarak önerilmiştir. Her iki modelin, literatürde var olan diğer modellere göre avantajı, gevrek ve/veya geçiş kırılması durumunda oluşan mikroçatlak oluşumu ve ilerlemesine bağlı katılık azalmasını (enerji dağıtımını) modelleyebilmesidir. Önerilen her iki model de ABAQUS Explicit için kullanıcı tanımlı malzeme kodu olarak kodlanmıştır. Kodlanan modelin tek elemanlı testler ile doğruluğu valide edilmiştir.

Turba ve arkadaşları (2011) tarafından düz yuvarlak numuneler ile 22°C, –158°C ve –196°C sıcaklıklarda gerçekleştirilmiş küçük zımba deneyleri baz alınarak, ilgili deneysel çalışma, nümerik olarak modellenmiştir. İki farklı geçiş kırılması modeli kullanılarak gerçekleştirilmiş sayısal analizlerden elde edilen yük ve deplasman eğrileri, deneysel çalışmalardan elde edilen eğriler ile karşılaştırılmıştır. Her iki modelin ürettiği sonuçlar ile deneysel çalışmaların sonuçları oldukça yakın sonuçlar üretmiştir. Sonuçlar, hem yük deplasman eğrisinin rejimi, hem maksimum yük noktasının yeri hem de maksimum yük noktası sonrası oluşan yumuşama davranışı yönünden değerlendirilmiş ve birbirlerine göre oldukça tutarlı oldukları görölmüştür. Hem Leckie-Hayhurst tipi hem de Lemaitre tipi model, 22°C sıcaklıkta sünek, –196°C sıcaklıkta gevrek, –158°C sıcaklıkta ise az miktar plastik deformasyon ile birlikte gevrek olarak elde edilmiştir. Bu değerler, deneysel sonuçlar ile uyumlu ve teorik olarak öngöröldüğu gibidir. Diğer taraftan, Lemaitre tipi model ile elde edilen yük-deplasman grafiklerinin maksimum yük değerleri, Leckie-Hayhurst tipi ile elde edilene göre daha düşük olarak hesaplanmıştır. Bunun sebebi, Lemaitre tipi modelin plastik deformasyon oluşumu ile ek hasar oluşumu göstermesidir.

Kullanılan hipoelastik formölasyon, bünye denklemlerinin malzeme çerçevesi (eksenleri) değişmezliği prensibini sağladığından dolayı (material frame indifference), potansiyel ve serbest enerji fonksiyonlarının izotrop olması koşulunu getirmektedir (Simo ve Hughes 1998). Bu kısıtlamayı kaldırmak, anizotropi durumunu da kullanabilmek ve termodinamik uygunluk prensibini tam olarak sağlayabilmek için, ilgili bünye denklemlerini hiperelastik olarak formölize etmek gerekmektedir. İlgili hiperelastik formölasyon, bu çalışmanın bir sonraki bölümünde verilmiştir.

## 4.2 Hiperelastik Yaklaşım

### 4.2.1 Tek eksenli yükleme durumu

Bu kısımda, yukarıdaki kısımlarda 3 boyutta tanımlanmış geçiş kırılması modelinin tek eksenli yükleme durumlarına indirgenmiş uygulaması verilmiştir.

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  ve  $\mathbf{e}_3$  sırası ile  $x, y$  ve  $z$  yönlerindeki ortogonal birim vektörler olsun. İlgili tek eksenli yükleme koşulunun  $x$  yönünde olduğu ve malzemenin hareketinin  $y$  ve  $z$  yönlerinde serbest bırakıldığı varsayılmıştır. Bu durum, tek eksenli gerilme ve üç eksenli deformasyon durumu oluşturmaktadır. Matematiksel olarak,

$$\boldsymbol{\tau} = \tau \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad \text{ve} \quad \mathbf{F} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \quad (4.1)$$

ifade edilebilir. Denklem (4.1) ile verilen ifadede  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  sırası ile  $x$  ve  $y$  yönlerindeki asal uzamaları (principal stretch) temsil etmektedir. Tek eksenli gerilme durumu olduğundan dolayı  $y$  yönündeki asal uzama ile  $z$  yönündeki asal uzama birbirine eşit olmaktadır.

Denklem (4.1.1) incelendiğinde  $\tau_{eq} = \tau = \text{tr}(\boldsymbol{\tau})$  olduğu görülmektedir. Ayrıca, rotasyon tensörünün olmadığı bu durum için  $\mathbf{R}^r = \mathbf{1}$  olmakta, bu durum da  $\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\Sigma}$  eşdeğerliğini oluşturmaktadır. Denklem (4.1.2) kullanıldığında, deformasyon gradyanı tensörünün Jacobianı  $J = \lambda_1 \lambda_2^2$  olarak elde edilir. Deformasyon gradyanının geri çevrilebilir ve geri çevrilemez kısımları ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^r &= \lambda_1^r \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2^r [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \\ \mathbf{F}^p &= \lambda_1^p \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2^p [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \end{aligned} \quad (4.2)$$

olarak elde edilir. Denklem (4.2) ile verilen geri çevrilebilir deformasyon gradyanı, lastik ve termal kısımlarına da  $\mathbf{F}^r = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^\theta$  olarak ayrılabilir. Burada termal olarak izotrop malzeme arsayımı kullanılarak  $\mathbf{F}^\theta := \lambda^\theta \mathbf{1}$  eşitliği yapılmıştır. Bu çerçeveye göre (4.2),

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^e &= \lambda_1^e \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2^e [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \\ \mathbf{F}^\theta &= \lambda^\theta [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \end{aligned} \quad (4.3)$$

denklemlerine dönüştürülebilmektedir. Bu ifade kullanılarak sağ Cauchy Green deformasyon tensörü  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  ifadesi,

$$\mathbf{C} = [\lambda_1^e]^2 [\lambda_1^p]^2 [\lambda^\theta]^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + [\lambda_2^e]^2 [\lambda_2^p]^2 [\lambda^\theta]^2 [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \quad (4.4)$$

olarak elde edilir. Logaritmik birim şekil değiştirme tensörü tanımı  $\mathbf{e}_{log} = 1/2 \log \mathbf{C}$ ,

$$\mathbf{e}_{log} = \mathbf{e}_{log}^e + \mathbf{e}_{log}^p + \mathbf{e}_{log}^\theta \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanarak kullanılırsa, logaritmik birim şekil değiştirme ifadeleri,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{log}^e &= \log \lambda_1^e \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \log \lambda_e^2 [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \\ \mathbf{e}_{log}^p &= \log \lambda_1^p \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \log \lambda_p^2 [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \\ \mathbf{e}_{log}^\theta &= \log \lambda^\theta [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Denklem (4.6) ile çarpımsal olarak ayrıştırılan deformasyon gradyanından, toplamsal olarak ayrıştırılan logaritmik birim şekil değişimine varılmıştır. Bu noktada notasyon olarak  $e_{log}^e = \log \lambda_1^e$ ,  $e_{log}^p = \log \lambda_1^p$  ve  $e_{log}^\theta = \log \lambda^\theta$  kullanılacaktır.

Termal uzama katsayısı  $\lambda^\theta$  ifadesinin sıcaklığa bağlı değişimi ihmal edilir ve kendisi de izotrop olarak ele alındığı takdirde,

$$J^\theta := \det(\mathbf{F}^\theta) = [\lambda^\theta]^3 = \exp[3\alpha_\theta[\theta - \theta_0]] \quad (4.7)$$

elde edilen ifade deformasyon gradyanının termal kısmının Jacobianı olmaktadır. İlgili denklemde  $\lambda^\theta = \exp[\alpha_\theta[\theta - \theta_0]]$  olup,  $e_{log}^\theta = \alpha_\theta[\theta - \theta_0]$  ifadesi elde edilmektedir. Denklem (3.42) ile verilen gerilme ifadesi üzerinden gidilerek ve  $y$  ile  $z$  eksenlerinde gerilmelerin sıfır olması sınır koşulu kullanılarak  $\log \lambda_2^e = -\nu \log \lambda_1^e$  ifadesine varılmaktadır. Bu ifadede  $\nu$  Poisson oranını temsil etmektedir. Dolayısıyla, tek eksenli durum için gerilme durumu,

$$\tau = [1 - d]E[e_{log}^r - \alpha_\theta[\theta - \theta_0]] \quad (4.8)$$

$E$  değişkeninin lineer izotrop elastisite modülünü temsil etmesi üzerinden ifade edilebilmektedir. Burada logaritmik şekil değiştirme tensörünün geri çevrilebilir kısmı  $\mathbf{e}_{log}^r = \mathbf{e}_{log}^e + \mathbf{e}_{log}^\theta$  olarak tanımlanmış olup,

$$\mathbf{e}_{log}^r = [e_{log}^e + e_{log}^\theta] \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + [-\nu e_{log}^e + e_{log}^\theta] [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \quad (4.9)$$

şeklinde açık olarak ifade edilmektedir. Logaritmiş birim şekil değiştirme tensörünün geri çevrilebilir kısmının volumetrik ve deviyatorik kısımları ise,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{e}_{log}^r) &= [1 - 2\nu]e_{log}^e + 3e_{log}^\theta \\ \text{dev}(\mathbf{e}_{log}^r) &= \frac{2}{3}[1 + \nu]e_{log}^e \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}[1 + \nu]e_{log}^e [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Benzer derivasyon, gevrek kırılmayı yöneten deformasyon enerjisi açığa çıkma hızı parametresi  $Y$  için de takip edilirse,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2}[E[e_{log}^e]^2 - 9\kappa[\alpha_\theta]^2[\theta - \theta_0]^2] \\ &= \frac{1}{2}E[e_{log}^r]^2 - Ee_{log}^r \alpha_\theta [\theta - \theta_0] - 3\kappa[1 + \nu][\alpha_\theta]^2[\theta - \theta_0]^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

ifadeleri elde edilir. Son olarak  $\mathbf{L}^p := \dot{\mathbf{F}}^p \cdot [\mathbf{F}^p]^{-1}$  ifadesi kullanılarak plastik deformasyon hızı değişimi eşitliği,

$$\mathbf{L}^p = \frac{\dot{\lambda}_1^p}{\lambda_1^p} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{\dot{\lambda}_2^p}{\lambda_2^p} [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \equiv \dot{\mathbf{e}}^p \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. Tek eksenli yükleme maruz hiperelastik olarak formülize edilmiş sünek-gevrek geçiş kırılması modeli ise Tablo 4.1 ile verilmiştir.

---

1. Toplamsal deformasyon kinematığı

$$e_{log} = e_{log}^r + e_{log}^p \quad \text{ve} \quad e_{log}^r = e_{log}^e + e_{log}^\theta, \quad e_{log}^\theta = \alpha_\theta [\theta - \theta_0]$$

2. Termoelastik gerilme-biriş şekil değiştirme ilişkisi

$$\tau = [1 - d]E[e_{log}^r - \alpha_\theta[\theta - \theta_0]]$$

3. Plastik pekleşme ve gevrek hasar parametreleri eşlenik değişkenleri

$$\beta = [1 - f_0][\tau_{m,\infty} - \tau_{m,0}][1 - \exp(-\omega_m \alpha)]$$

$$Y = \frac{1}{2}E[e_{log}^r]^2 - Ee_{log}^r \alpha_\theta [\theta - \theta_0] - 3\kappa \alpha_\theta^2 [1 + \nu][\theta - \theta_0]^2$$

4. Plastik matris akma gerilmesi ve pekleşme

$$\tau_m = \tau_{m,0} + \beta_m \quad \text{ve} \quad \beta_m = \frac{\beta}{1 - f_0}$$

5. Gerilme uzayındaki termoelastik alan

$$\mathbb{E}_\tau = \{[\bar{\tau}, \beta, f] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \phi^p(\bar{\tau}, \beta, f) \leq 0\}$$

(a) İlgili plastik potansiyel fonksiyonu

$$\phi^p = (\bar{\tau}, \beta, f) = \frac{1}{2\tau_m} \left[ \bar{\tau}^2 + 2f\tau_m^2 \cosh\left(\frac{\bar{\tau}}{2\tau_m}\right) - \tau_m^2 [1 + f^2] \right]$$

6. Plastik akış denklemi (ilişkisel kural dahilinde)

$$\dot{e}_{log}^p = \frac{\lambda}{1 - d} \left[ \frac{\bar{\tau}}{\tau_m} - \frac{1}{2}f \sinh\left(\frac{\bar{\tau}}{2\tau_m}\right) \right]$$

7. Plastik pekleşme, gevrek hasar ve boşluk oranı için değişim denklemleri

$$\dot{\alpha} = \lambda \quad \text{ve} \quad \dot{e}_{eq}^p = \frac{\lambda}{1 - d}$$

$$\dot{d} = \frac{\lambda}{[1 - d]^n} \left[ \frac{\langle Y - Y_0 \rangle}{S} \right]^m$$

$$\dot{f} = \frac{3\lambda[1 - f]}{2[1 - d]} f \sinh\left(\frac{\bar{\tau}}{2\tau_m}\right)$$

8. Karush-Kuhn-Tucker yükleme durumları ve süreklilik koşulu

$$\lambda \geq 0, \phi^p(\bar{\tau}, \beta, f) \leq 0, \lambda \phi^p(\bar{\tau}, \beta, f) = 0, \lambda \dot{\phi}^p(\bar{\tau}, \beta, f) = 0$$

---

**Çizelge 4.1.** Tek eksenli yükleme durumu için hiperelastik geçiş kırılması malzeme modeli bünye denklemleri

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Metallik malzemelerdeki kırılma tipleri, temel olarak gevrek ve sünek olmak üzere iki ana başlıkta toplanmaktadır. Bunlardan gevrek kırılma, ani ve yüksek deformasyon göstermeden oluşan bir kırılma tipi iken, sünek kırılma ise, yüksek plastik şekil değişimi ya da uzama ile gerçekleşen daha kontrollü ve yüksek enerji dağılımlı bir kırılmadır. Genel olarak üç farklı durumun etkileşimi altında metal yapıları malzemelerdeki kırılma tipi farklılık gösterebilir. Bu üç durum ise birim şekil değiştirme hızı, sıcaklık ve gerilme üç eksenliliğidir. Geçiş kırılması ya da bir diğer tabir ile gevrek-sünek geçiş kırılması olarak isimlendirilen kategori ise, bahsedilen bu üç durumun etkisi altında gevrek ve sünek kırılmanın özelliklerini gösterebilen gri bölgeye düşen kırılma tipidir.

Bu çalışma dahilinde öncelikle literatürde bulunan gevrek, sünek ve geçiş kırılması modelleri incelenmiştir. Yapılan literatür araştırması dahilinde özellikle mevcuttaki geçiş kırılması modellerinin, geçiş bölgesinde görülebilen fakat etkisi teorik modellere yansıtılmayan gevrek kırılmaya karakteristik mikro çatlak oluşumu ve bunlar kaynaklı enerji dağılımı - malzeme katılığı azalmasını modellemedikleri görülmüştür. Bu bağlamda iki farklı yaklaşım ile, birbirine benzer iki farklı model geliştirilmiştir.

Birinci yaklaşım, sürekli ortamlar mekaniğini temel alan hipoeplastik bir çerçeveye oturtulmuş geçiş kırılması modelidir. Bu modelde, metal matrisinde bulunan tanecik sınırları ve inklüzyonlardan oluşan boşluk büyümesi ve birleşmesi tabanlı sünek kırılma Gurson-Tvergaard-Needleman gözenekli plastisite modeli ile tanımlanmıştır. Plastik şekil değişimi ve sünek kırılma tabanlı hasar bu modelde, temsili hacim elemanı (representative volume element) bünyesindeki boşlukların, toplam eleman hacmine oranı olarak tanımlanmış boşluk oranı,  $f$  parametresi ile temsil edilmektedir. Boşluk oranının malzeme bünyesindeki katılık azalmasına olan etkisi efektif gerilme tanımı ile gerçekleşmektedir. Gevrek kırılma içinse, iki farklı yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşımlardan ilki Leckie-Hayhurst tipi sürünme modelinin modifikasyonu ile asal gerilme etkilerini de kapsayacak şekilde teorik modele tanımlanması ile oluşturulmuştur. Burada, sünek kırılmadakine benzer bir hasar parametresi tanımı yapılmıştır ve bu parametre katılık azalmasını benzer şekilde efektif gerilmeler üzerinden yapmaktadır. İkinci gevrek kırılma modeli ise, Lemaitre-tipi

hasar modelidir. Bu model, plastik deformasyonları gevrek kırılma üzerindeki etkisini de hesaba katabilmektedir. Dolayısıyla, sünek ve gevrek hasar için iki farklı parametre ve hasar potansiyeli tanımlanmış olup, kırılmaya etki etmektedirler.

Önerilen hipoelastik yaklaşım ABAQUS Sonlu Elemanlar programına kullanıcı tanımlı malzeme kodu (VUMAT) olarak kodlanmıştır. Zaman integrasyonu açık çözüm (explicit) ile gerçekleştirilmiştir. Kod dahilinde sıcaklık, şekil değiştirme hızı ve gerilme üç eksenliliği etkileri de bulunmasına rağmen, model validasyonu ve uygulama sadece sıcaklık etkileri altındaki geçiş kırılması modellenmesi için gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen kodun validasyonu tek eleman testleri ile gerçekleştirilmiş ve teorik olarak tutarlı sonuçlar ürettiği görülmüştür. Sonrasında ilgili kod, literatürde yapılmış küçük zımba kırılma deneyine uygulanmıştır. Bu kapsamda Turba ve arkadaşları (2011) tarafından yapılmış küçük zımba deneyi sonuçları baz alınmıştır. İlgili malzeme parametreleri kullanılarak yapılan analizler sonucunda, geliştirilen modelin hem sıcaklığa bağlı kırılma davranışını oldukça yüksek doğrulukta hesapladığı görülmüştür. Sıcaklık azalması ile gevrek hasar parametresi dominant olmakta ve kırılma başlangıcı maksimum asal gerilmelerin lokalize olduğu bölgeden başlamaktadır.

Sünek kırılma içinse, boşluk oranı parametresi dominant olmakta ve kırılma özellikle eşdeğer gerilmelerin lokalize olduğu bölgeden başlamaktadır. Tüm kırılma tipleri içinse, Turba ve arkadaşları tarafından verilmiş deneysel yük-deplasman eğrileri ile oldukça uyumlu sonuçlar üretilmiştir. Uyumlu sonuçlar üretmekle birlikte hipoelastik modelin eksik kaldığı bazı noktalar bulunduğu belirtilmiştir. Bu noktalar, hipoelastik yaklaşımın izotropi koşulunu teorik formülasyona zorlaması ve termodinamik enerji dağılımı uyumluluğunu bozduğu bazı noktalar olmasıdır. Termodinamik eksikliği tamamlamak ve özellikle gevrek kırılma öncesinde oluşabilecek anizotrop çatlak dağılımlarını da modelleyebilecek bir çerçeve yaratmak adına, aynı modele yeni bir yaklaşım önerilmiştir.

Hiperelastik yaklaşım olarak isimlendirilen ikinci yaklaşım, sürekli ortamlar mekaniğinin temel prensiplerinden birisi olan termodinamik enerji dağılımı prensibinden yola çıkarak, tam enerji dağılımı uyumlu bir geçiş kırılması modeli olmuştur. Deformasyon gradyanı geri çevrilebilir ve geri çevrilemez olarak ikiye ayrılmış olup, efektif gerilme tensörü

tanımı, ara konumda (intermediate configuration) Mandel gerilmesi üzerinden gerçekleştirilmiştir. İlgili çerçeve, anizotrop etkileri modelleyebilecek alt yapıya sahip olmasına rağmen, gevrek kırılma için izotrop hasar tanımı yapılmıştır. Model son olarak tek eksenli yükleme konumuna indirgenmiştir. Hipoelastik modele göre daha geniş kapsamlı bir model olmasına rağmen nümerik olarak uygulanması oldukça zor ve pahalı bir model olarak geliştirilmiştir.

Önerilen her iki model (hipo ve hiperelastik olarak) daha geniş kapsamlı araştırma faaliyetlerine bir basamak oluşturmuştur. Örneklendirmek gerekirse, hipoelastik yaklaşımın birim şekil değiştirme hızı ve gerilme üç eksenliliği etkileri altındaki performansı ile, küçük zımba deneyi haricindeki başka çalışmalar altındaki uygulanması sayılabilir. Hiperelastik yaklaşım için ise, üç boyut etkilerini ele alacak şekilde malzeme koduna dönüştürülmesi ve gevrek hasarın anizotrop olması durumuna genelleştirilmesi sayılabilir.



## KAYNAKLAR

**Abendroth, M., Kuna, M. 2003.** Determination of deformation and failure properties of ductile materials by means of the small punch test and neural networks, *Computational Materials Science*, 28: 633-644

**Abu Al-Rub, R.K., Voyiadjis, G. 2003.** On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials, *International Journal of Solids and Structures*, 40: 2611-2643

**Anderson, T. 2004.** Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, CRC Press

**Asaro, R., 1985.** Material modeling and failure modes in metal plasticity, *Mechanics of Materials*, 4: 343-373

**Baik, J., Kameda, J., Buck, O. 1986.** Development of small punch tests for ductile-brittle transition temperature measurement of embrittled Ni-Cr steels, *ASTM STP*, 888-EB: 92-111

**Bao, T., Wierzbicki, T. 2004.** On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space, *International Journal of Mechanical Sciences*, 46: 81-98

**Barsoum, I., Faleskog, J. 2007.** Rupture in combined tension and shear: experiments, *International Journal of Solids and Structures*, 44: 1768-1786

**Batra, R.C., Lear, M. 2004.** Simulation of brittle and ductile fracture in an impact loaded prenotched plate, *International Journal of Fracture*, 126: 179-203

**Bazant, Z.P., Jirasek, M. 2002.** Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress, *Journal of Engineering Mechanics*, 128: 1119-1149

**Bazant, Z.P., Belytschko, T.B., Chang, T.P. 1984.** Continuum theory of strain softening, *Journal of Engineering Div ASCE*, 110: 1666-1692

**Beremin, F., 1983.** A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel, *Metallurgical Transactions*, 14A: 2277-2287

**Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.L., Forest, S. 2010.** Nonlinear mechanics of materials, Springer-Verlag, Berlin

**Brown, L.M., Embury, J. 1973.** The initiation and growth of voids at second phase particles, Proceedings of the Third International Conference on the Strength of Metals and Alloys, Institute of Metals, London

**Brunig, M. 2003.** An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics, *International Journal of Plasticity*, 19: 1679-1713

**Cen Workshop Agreement. 2006.** Small punch test method for metallic materials, Technical Report, CWA 15627

**Chaboche, J.L. 1977.** Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endommagement. Symposium Franco-Polonnois de Rhéologie et Mécanique, 137-159

**Chaboche, J.L., Boudifa, M., Saanouni, K. 2006.** A cdm approach of ductile damage with plastic compressibility, *International Journal of Fracture*, 137: 51-75

**Choundhary, B.K., Rao Palaparti, D.P., Samuel, I. 2013.** Analysis of tensile stress-strain and work-hardening behavior in 9Cr-Mo ferritic steel, *Metallurgical and Materials Transactions A*, 44A: 212-223

**Chow, C.L., Wang, J. 1987.** An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, 27: 547-558

**Chu, C.C., Needleman, A. 1980.** Void nucleation effects in biaxially stretched sheets, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 102: 249-256

**Cordebois, J.P., Sidoroff, F. 1982.** Damage induced elastic anisotropy, *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, 761-774

**Curry, D.A., Knott, F. 1976.** The relationship between fracture toughness and microstructure in the cleavage fracture of mild steel, *Materials Science*, 1-6

**Foletti, S., Madia, M., Cammi, A., Torsello G. 2011.** Characterization of the behavior of a turbine rotor steel by inverse analysis on the small punch test, *Procedia Engineering*, 10: 3628-3635

**Fracture Handbook 1996,** Handbook Vol.19: Fatigue and Fracture, American Society for Metals, ASM International

**Germain, P., Nguyen, Q.S., Suquet, P. 1983.** Continuum thermodynamics, *Journal of Applied Mechanics*, 50: 1010-1020

**Gülçimen, B., Durmuş, A., Ülkü, S., Hurst, R.C., Turba, K., Haehner, P. 2013.** Mechanical characterization of a P91 weldment by means of small punch fracture testing, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 105-106: 28-35

**Gurson, A. 1977.** Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth – Part 1: Yield criteria and rules for porous ductile media, *Journal of Engineering Materials Technology*, 99: 2-15

- Ha, J.S., Fleury, E. 1998.** Small punch tests to estimate the mechanical properties of steels for steam power plant: 2. Fracture toughness, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 75:707-713
- Hakansson, P., Wallin, M., Ristinmaa, M. 2006.** Thermomechanical response of non-local porous material, *International Journal of Plasticity*, 22: 2066-2090
- Hayakawa, K., Murakami, S. 1997.** Thermodynamical modeling of elastic-plastic damage and experimental validation of damage potential, *International Journal of Damage Mechanics*, 6: 333-362
- Hayhurst, D., Leckie, F. 1973.** The effect of creep constitutive and damage relationships upon rupture time of solid and circular torsion bar, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 21: 431-446
- Hockett, J.E., Sherby, O. 1975.** Large strain deformation of polycrystalline metals at low homologous temperatures, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 23-2: 87-98
- Huespe, A.E., Needleman, A., Oliver, J., Sanchez, P.J. 2009.** A finite thickness band method for ductile fracture analysis, *International Journal of Plasticity*, 25: 2349-2365
- Hull, D. 1999.** Fractography: Observing, Measuring and Interpreting Fracture Surface Topography, Cambridge University Press
- Hütter, G., Linse, T., Roth, T., Muhlich, U., Kuna, M. 2014.** A modeling approach for the complete ductile-to-brittle transition region: cohesive zone in combination with a nonlocal Gurson-model, *International Journal of Fracture*, 185: 129-153
- Jia, X., Dai, Y. 2003.** Small punch tests on martensitic/ferritic steels F82H, T91 and Optimax-A irradiated in SINQ Target-3, *Journal of Nuclear Materials*, 323: 360-367
- Kachanov, L. 1958.** Time of the rupture process under creep conditions, *Isv. Akad. Nauk. SSR*, 8: 26-31
- Klueh, R.L., Nelson, A. 2007.** Ferritic/martensitic steels for next-generation reactors, *Journal of Nuclear Materials*, 371: 37-52
- Krajcinovic, D. 1984.** Continuum damage mechanics, *Applied Mechanics Rev.*, 37: 1-6
- Krajcinovic, D., Fonseka, G. 1981.** The continuous damage theory of brittle materials part 1 and 2, *Journal of Applied Mechanics*, 48: 809-824
- Leckie, F., Hayhurst, D. 1977.** Constitutive equations for creep rupture, *Acta Metallurgica*, 25: 1059-1070
- Lemaitre, J. 1985.** A continuous damage mechanics model for ductile fracture, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107: 83-89

- Lemaitre, J. 1996.** A Course on Damage Mechanics, Springer Verlag, Berlin
- Lemaitre, J., Desmorat, R. 2005.** Engineering Damage Mechanics, Springer Verlag, Berlin
- Lemaitre, J., Desmorat, R., Sauzay, M. 2000.** Anisotropic damage law of evolution, *European Journal of Mechanics and Solids*, 19: 187-208
- Lemonds, J., Needleman, A. 1986.** Finite element analysis of shear localization in rate and temperature dependent solids, *Mechanics of Materials*, 5: 339-361
- Lin, Y.C., Chen, X.M. 2010.** A combined Johnson-Cook and Zerilli-Armstrong model for hot compressed typical high strength alloy steel, *Computational Materials Science*, 49: 628-633
- Linse, T., Kuna, M., Schuhknecht, J., Viehrig, H.W. 2008.** Usage of the small-punch-test for the characterization of reactor vessel steels in the brittle–ductile transition region, *Engineering Fracture Mechanics*, 75: 3520-3533
- Lodygowski, A., Voyiadjis, G., Deliktaş, B., Palazotto, A. 2011.** Non-local and numerical formulations for dry sliding friction and wear at high velocities, *International Journal of Plasticity*, 27: 1004-1024
- Malcher, L., Andrade Pires, F.M., Cesar de Sa, J.M.A. 2012.** An Assessment of isotropic constitutive models for ductile fracture under high and low stress triaxiality, *International Journal of Plasticity*, 30-31: 81-115
- Mao, X., Takahashi, H. 1987.** Development of a further miniaturized specimen of 3mm diameter from tem disk (Ø3 mm) small punch tests, *Journal of Nuclear Materials*, 150: 42-52
- McAuliffe, C., Waisman, H. 2015.** A unified model for metal failure capturing shear banding and fracture, *International Journal of Plasticity*, 65: 131-151
- McClintock, F. 1968.** A criterion for ductile fracture by the growth of voids, *Journal of Applied Mechanics*, 35: 363-371
- Metlab Ltd. 2018.** Ductile and brittle fracture, Technical Report, [www.metlab.co.nz](http://www.metlab.co.nz)
- Meyers, M.A., Chawla, K. 2009.** Mechanical Behavior of Materials, 2<sup>nd</sup> Edition, Cambridge University Press
- Mudry, F. 1987.** A local approach to cleavage fracture, *Nuclear Engineering and Design*, 105: 65-76

- Murakami, S., Ohno, N.A. 1980.** A continuum theory of creep and creep damage, 3<sup>rd</sup> Creep in Structures Symposium, 422-443
- Nahshon, K., Hutchinson, J. 2008.** Modification of the Gurson model to shear failure, *European Journal of Mechanics and Solids*, 1-17
- Nahshon, K., Xue, Z. 2009.** A modified Gurson model and its application to punch-out experiments, *Engineering Fracture Mechanics*, 76: 997-1009
- Needleman, A., Tvergaard, V. 1998.** Dynamic crack growth in a nonlocal progressively cavitating solid, *European Journal of Mechanics and Solids*, 17-3: 421-438
- Needleman, A., Tvergaard, V. 2000.** Numerical modeling of the ductile-brittle transition, *International Journal of Fracture*, 101: 73-97
- Nielsen, K. 2008.** 3D modeling of plug failure in resistance spot welded shear-lap specimens (DP600 steel), *International Journal of Fracture*, 153: 125-139
- Norris, S. 1997.** A comparison of the disk bend test and the charpy impact test for fracture property evaluation of power station steels, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 74: 135-144
- Ortiz, M., Simo, J.C. 1986.** An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23: 353-366
- Park, K.C., Felippa, C. 1980.** Partitioned transient analysis procedures for coupled field problems: Accuracy analysis, *Journal of Applied Mechanics*, 47: 919-926
- Park, K.C., Felippa, C., DeRuntz, J. 1977.** Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structures interaction analysis, *ASME Applied Mechanics Symposia Series*, 26: 94-124
- Pijaudier-Cabot, G., Bazant, Z. 1987.** Nonlocal damage theory, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 113: 1512-1533
- Rabotnov, Y. 1969.** Creep problems in structural members, North-Hollve, Amsterdam
- Rice, J.R., Tracey, D. 1969.** On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 17: 201-217
- Rice, J.R., Thomson, R. 1974.** Ductile versus brittle behavior of crystals, *Philosophical Magazine*, 29: 73-97

**Ritchie, R.O., Knott, J.F., Rice, J.R. 1973.** On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 21: 395-410

**Sathyanarayanan, S., Moitra, A., Samuel, K.G., Sasikala, G., Raya, S.K., Singh, V. 2008.** Evaluation of dynamic fracture toughness based reference temperature of modified 9Cr–1Mo steel in phosphorus embrittled and cold-worked condition, *Materials Science and Engineering A*, 488: 519-528

**Shashank Dutt, B., Nani Babu, M., Venugopal, S., Sasikala, G., Bhaduri, A.K. 2011.** Effect of test temperature on fracture toughness of modified 9Cr-Mo steel, *Materials Science and Technology*, 27(10): 1527-1533

**Shterenlikht, A. 2003.** 3D CAFE modeling of transitional ductile-brittle fracture in steels, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Sheffield

**Simo, J.C., Hughes, T.J.R. 1998.** Computational Inelasticity, Springer-Verlag.

**Skrzypek, J., Ganczarski, A.W., Rustichelli, F., Egner, H. 2008.** Advanced Materials and Structures for Extreme Operating Conditions, Springer-Verlag, Berlin.

**Taylor, G.I., Quinney, H. 1934.** The latent energy remaining in a metal after cold working, *Proceedings of Royal Society London*, A143: 307-326

**Thomason, P. 1968.** A theory for ductile fracture by internal necking of cavities, *Journal of the Institute of Metals*, 96: 360-365

**Turba, K., Gülçimen, B., Li, Y.Z., Blagoeva, D., Haehner, P., Hurst, R.C., 2011.** Introduction of a new notched specimen geometry to determine fracture properties by small punch testing, *Engineering Fracture Mechanics*, 78-16: 2826-2833

**Tvergaard, V., Needleman, A. 1984.** Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar, *Acta Metallurgica*, 32: 157-169

**Tvergaard, V., Needleman, A. 1995.** Effects of nonlocal damage in porous plastic solids, *International Journal of Solids and Structures*, 32: 1063-1077

**Tvergaard, V. 1981.** Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions, *International Journal of Fracture*, 17: 389-407

**Tvergaard, V. 1982a.** On localization in ductile materials containing spherical voids, *International Journal of Fracture*, 18: 237-252

**Tvergaard, V. 1982b.** Influence of void nucleation on ductile shear fracture at a free surface, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 30: 399-425

**Tvergaard, V. 1989.** Numerical study of localization in a void-sheet, *International Journal of Solids and Structures*, 10: 1143-1156

**Van Dijck, F. 1973.** Physico-mathematical analysis of the electro discharge machining process, PhD Thesis, Katholieke Universiteit Leuven

**Wang, W.M., Sluys, L.J., de Borst, R. 1997.** Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain rate softening, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40: 3839-3864

**Wen, J., Huang, Y., Hwang, K.C., Liu, C., Li, M. 2005.** The modified Gurson model accounting for the void size effect, *International Journal of Plasticity*, 21: 381-395

**Xia, L., Fong Shih, C. 1996.** A fracture model applied to the ductile/brittle regime, *Journal de Physique*, 6: 363-372

**Ying, S., Xifeng, L., Xiangyu, Y., Delong, G., Chen, J., Chen, J. 2014.** Fracture morphologies of advanced high strength steel during deformation, *Acta Metallurgica Sinica*, 27: 101-106

**Zaera, R., Fernandez Saez, J. 2006.** An implicit consistent algorithm for the integration of thermoviscoplastic constitutive equations in adiabatic conditions and finite deformations, *International Journal of Solids and Structures*, 43(6): 1594-1612

**Zidan, A.D., Brookfield, J. 2003.** A technique for the determination of post-yield materials properties from the small punch test, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 38(4): 367-376

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İsmail Cem TÜRTÜK  
Doğum Yeri : Bursa  
Yabancı Dili : İngilizce, Almanca

### Eğitim Durumu

Lise : Bursa Anadolu Lisesi, 1993 – 2000  
Lisans : Ortadoğu Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü  
2000 – 2004  
Lisans (yandal) : Ortadoğu Teknik Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü  
İmalat yandal programı, 2002 – 2004  
Yüksek Lisans : Stuttgart Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Katılar ve  
Malzemelerin Hesaplamalı Mekaniği A.B.D., 2004 – 2006  
Çalıştığı Kurum : Meteksan Savunma A.Ş., Mekanik Tasarım Başmühendisi  
İletişim (e-posta) : [ismail.turtuk@gmail.com](mailto:ismail.turtuk@gmail.com)  
[icturtuk@meteksan.com](mailto:icturtuk@meteksan.com)

### Yayınları:

**Türtük, İ.C., Deliktaş, B., 2016.** Coupled porous plasticity – continuum damage mechanics approaches for modeling temperature driven ductile-to-brittle transition fracture in ferritic steels, *International Journal of Plasticity*, 2016:77, 246-261

**Soyarslan, C., Türütük, İ.C., Deliktaş, B., Bargmann, S., 2016.** A Thermomechanically consistent theory for modeling micro-void and/or micro-crack driven failure in metals at finite strains, *International Journal of Applied Mechanics*, 2016:8-1, 1650009-1--20