



GRAFLAR VE ENERJİ

FERİHA ÇELİK



T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLAR VE ENERJİ

Feriha ÇELİK

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2015
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Feriha ÇELİK tarafından hazırlanan “Graflar ve Enerji” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Üye: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Musa DEMİRCİ İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Fırat ATEŞ İmza
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

28/12/2015

İmza

Feriha ÇELİK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAFLAR VE ENERJİ

Feriha ÇELİK

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu çalışmanın amacı literatürde sık kullanılan özel grafların enerjisini hesaplamak için gerekli olan özdeğerleri kök kabul eden spektral (karakteristik) polinomlar bulmak, bulunan spektral polinomlar arasında ilişkiler kurarak indirgeme bağıntıları elde etmek, bazı graf türlerinin spektrumları arasında geçiş yapmak ve bu elde edilen bilgiler ile grafların enerjilerini hesaplamak için yeni ilişkiler kurmaktır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. Graf tanımı, tarihçesi, temel kavramlar, kullanım alanları, çeşitli graflar ve özellikleri verilmiştir. Bu bilgiler, bu tez boyunca kullanılacaktır. İkinci bölümde literatürde sık kullanılan özel graflar için spektrumlar bulunmuş, spektrumun elemanlarını kök kabul eden spektral polinomlar oluşturulmuş ve daha büyük mertebeli grafların spektral polinomlarını hesaplamada kolaylık sağlayacak indirgeme bağıntıları oluşturulmuştur. Üçüncü bölümde C_n ve P_n graflarının spektrumlarından C_{2n} ve P_{2n+1} graflarının spektrumlarına geçişler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise elde edilen bilgiler doğrultusunda grafların enerji hesaplamaları için kolaylık sağlayacak yeni bağıntılar geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf, spektrum, spektral polinom, enerji

2015, vi + 65 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

GRAPHS AND ENERGY

Feriha ÇELİK

Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL (Uludag University)

The main aim of this work is to find spectral (characteristic) polynomials of the eigenvalues to calculate the energy of some well-known graph types which appear in literature, to obtain relations between these graphs and recurrence relations that they satisfy, to obtain the spectrum of some graphs from the spectrum of others and to calculate the energy of these graph types.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, definition of a graph, historical background, fundamental notions, some applications of graphs, some graph types and graph properties are recalled. These will be used throughout the thesis. In the second chapter, the spectrums are obtained for some widely-used graph types, the spectral polynomials which has the elements of the spectrum as their roots are found, and the recurrence relations to find larger spectral polynomials in terms of smaller ones are established. In the third chapter, the spectrums of the graphs C_{2n} ve P_{2n+1} are obtained by means of the graphs C_n ve P_n . In the fourth chapter, some new relations which help to calculate the energy of graphs are established.

Key Words: Graph, spectrum, spectral polynomial, energy

2015, vi + 65 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tanıdığım günden bu yana ilminden en çok faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabır ile eğitim öğretim hayatımda büyük öneme sahip, iyi insan kimdir diye sorduklarında aklıma gelen ilk isimlerden birisinin kendisine ait olduğu değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci Cangül'e,

varlıklarının gölgesine sığındığım, dünden bugüne sevgi ve şefkatle kuşatıcı kollarını ve ruhlarını hep hissettiğim, kendimi varlıklarının muhabbet potasında erittiğim, fedakarlık mefhumunun somutlaşmış hali olan, diğergamlık hissinin kelimedede can bulduğu, hayatımın, gönlümün, inancımın dayanağı olan; Ancak, kelimelerin acziyetinin ifade edebileceği şükran duygularımı tüm mahcubiyetimle önlerine serdiğim canım aileme

sonsuz teşekkürler...

Feriha ÇELİK
28/12/2015

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. GRAFLARIN SPEKTRUMLARI	9
2.1. Genel Kavramlar	9
2.2. Grafların Spektral Polinomları	10
3. SPEKTRUMLAR ARASI GEÇİŞ	39
3.1. C_n ve C_{2n} Arasında Spektral Geçiş	39
3.2. P_n ve P_{2n+1} Arasında Spektral Geçiş	47
4. GRAFLARDA ENERJİ	54
4.1. C_n Devirli Graflarının Enerjisi	55
4.2. P_n Yol Graflarının Enerjisi	59
4.3. K_n Tam Graflarının Enerjisi	61
4.4. S_n Yıldız Graflarının Enerjisi	61
4.5. $K_{m,n}$ İki Parçalı Graflarının Enerjisi	62
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	65

SİMGELER DİZİNİ

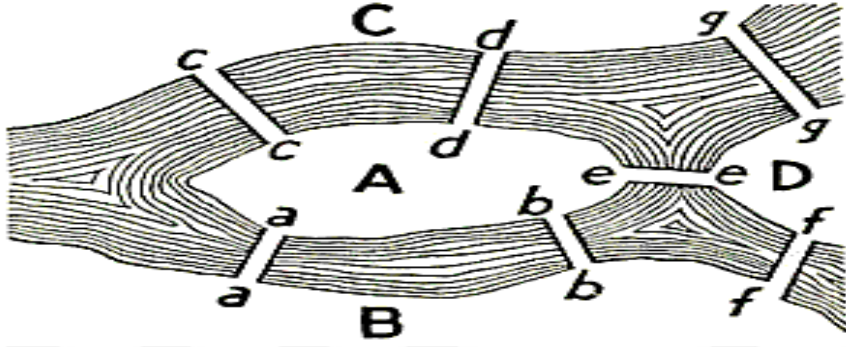
Simgeler	Açıklama
G	Graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$\deg(v)$	v köşesinin derecesi
\bar{G}	G grafının tümleyeni
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir grafi
P_n	n köşeli yol grafi
S_n	n köşeli yıldız graf
T_n	n köşeli ağaç graf
$K_{r,s}$	İki parçalı tam graf
$N(v)$	v köşesinin açık komşuluğu
A	G grafının komşuluk matrisi
$S(G)$	G grafının spektrumu
$Pol(G)$	G grafının spektral polinomu
I_n	$n \times n$ tipindeki birim matris
$E(G)$	G grafının enerjisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Pregel Nehri	1
Şekil 1.2. Königsberg Çizgesi	2
Şekil 1.3. Basit graf	4
Şekil 1.4. Basit olmayan graf	4
Şekil 1.5. Basit olmayan graf	4
Şekil 1.6. G ve \bar{G} grafları	4
Şekil 1.7. E_6 boş grafı	5
Şekil 1.8. P_5 yol grafı	5
Şekil 1.9. C_5 devir grafı	5
Şekil 1.10. $K_{2,4}$ iki parçalı grafı	6
Şekil 1.11. 16 köşeli bir T_{16} ağacı	6
Şekil 1.12. S_6 yıldız grafı	6
Şekil 1.13. K_2 tam grafı	7
Şekil 1.14. K_3 tam grafı	7
Şekil 1.15. K_4 tam grafı	7
Şekil 1.16. Bir G grafı	7
Şekil 2.1. P_1 grafı	11
Şekil 2.2. P_2 grafı	12
Şekil 2.3. P_3 grafı	12
Şekil 2.4. P_4 grafı	13
Şekil 2.5. S_3 grafı	21
Şekil 2.6. S_4 grafı	21
Şekil 2.7. S_5 grafı	22
Şekil 2.8. $K_{2,2}$ grafı	27
Şekil 2.9. $K_{2,3}$ grafı	28
Şekil 2.10. $K_{3,3}$ grafı	29
Şekil 2.11. C_3 grafı	35
Şekil 2.12. C_4 grafı	35

1. GİRİŞ

18. yüzyıl ortalarında Königsberg Şehri, Pregel Nehri'nin iki yakası ve nehirdeki iki ada üzerinde kurulmuştur. Bu adalardan büyük olanı şehrin iki yakasına ikişer köprü; diğeri de birer köprü ile bağlanmıştır. Ayrıca iki ada arasına da, bu iki adayı birbirine bağlayan bir köprü inşa edilmiştir.

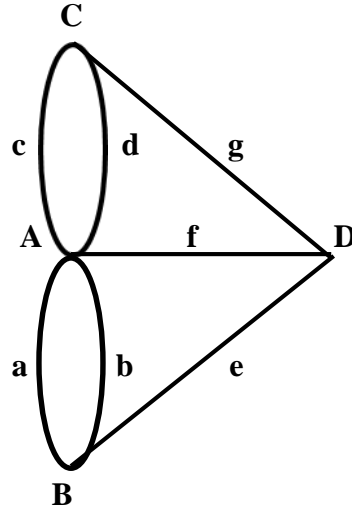


Şekil 1.1. Pregel Nehri

Şehir sakinlerinin aşağıdaki sorunun cevabını arayarak eğlendikleri söylentisi günümüze kadar ulaşmıştır:

“Herhangi bir noktadan harekete başlayıp, yedi köprünün hepsinden bir ve yalnız bir kez geçip şehrin bütün bölümlerini dolaştıktan sonra başlangıç noktasına varılabilir mi?”

Ünlü matematikçi Leonhard EULER (1707-1783) bu problemin çözümü olmadığına dair 1736 yılında ‘‘Königsberg Köprü Problemi’’ adında bir makale yayımlamıştır. Bunun sonucunda ise Graf Teori kavramı ortaya çıkmıştır. Örneğin yukarıdaki problem aşağıdaki graf gösterimine sahiptir:



Şekil 1.2. Königsberg Grafı

Günümüzde graflar tüm bilim dallarında oldukça faydalı bir şekilde kullanılmakta ve birçok problemin çözümüne yardımcı olmaktadır. Bunlar arasında ilk akla gelenler pazarlamacı problemi, tesisat problemi; birçok benzeri optimizasyon problemleri, kimyasal atom ve moleküllerin çalışılması, dört renk problemi, kişilerin - toplumların aralarındaki ilişkilerin çalışılması olarak sıralanabilir.

Bazı özel grafların enerjileri literatürde yer almaktadır. Biz burada bu enerjilerin elde edilmişlerini detaylı olarak ele alıp enerjiyi oluşturan özdeğerleri kök kabul eden bir polinomu hesaplayacak ve bu polinomun sağladığı bazı bağıntıları elde edeceğiz.

Aşağıdaki kısımda bu tezde kullanılacak olan temel kavramları göreceğiz. Bu kavramları daha geniş bir şekilde ele almak istenirse şu kaynaklara bakılabilir: Harris, Hirst, Mossinghoff, [Combinatorics and Graph Theory, 2008], Cvetkovic, Doob, Sachs, [Spectra of Graphs, 1995], Aldous, Wilson, [Graphs and Applications, 2004], Berge, [The Theory of Graphs, 2001], Bollobas, [Modern Graph Theory, 1998], Bondy, Murty, [Graph Theory, 2008], Biggs, Lloyd, Wilson, [Graph Theory 1736-1936, 1986], Balakrishnan, Ranganathan, [A Textbook of Graph Theory, 2012], Chen, [Applied Graph Theory, 1976], Foulds, [Graph Theory Applications, 1992], Golumbic, Hartman, [Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, 2005], Harary, [Graph Theory, 1994] and West, [Introduction to Graph Theory, 1996].

1.1 Tanım. Adına *köşeler (vertex)* denilen elemanlardan oluşan bir küme ile adına *kenarlar (edge)* denilen, her biri iki köşeyi birleştiren elemanlardan oluşan ikinci bir kümenin oluşturduğu bir sıralı ikiliye *graf (graph)* denir.

Bir grafi çizebilmek için her şeyden önce $V(G)$ ile gösterilen ve çizilecek G grafının köşelerinden oluşan bir köşe kümesi ve $V(G)$ 'den seçilen köşelerin birleştirilmesiyle oluşan kenarları içeren $E(G)$ kenar kümesi bilinmelidir.

1.2 Tanım. $V(G)$ 'nin eleman sayısı *mertebe (order)*, $E(G)$ 'nin eleman sayısı ise *boyut (size)* olarak adlandırılır.

1.3 Tanım. Aralarında en az bir kenar bulunan köşelere *komşu (adjacent) köşeler*, ortak bir ucu bulunan kenarlara ise *komşu kenarlar* denir. Örneğin $u, v \in V(G)$ için $uv \in E(G)$ ise u ile v köşeleri komşu köşelerdir. Eğer $uv \notin E(G)$ ise u ile v 'ye *komşu olmayan (non-adjacent) köşeler* denir.

Bir $e \in E(G)$ alındığında, bu e kenarı, $u \in V(G)$ köşesi ile birleşiyorsa e kenarı u köşesi ile *bitişiktir (incident)* denir.

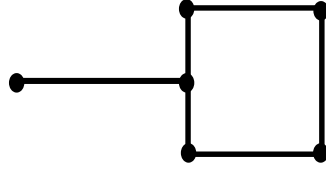
Bir v köşesini uç kabul eden kenarların sayısına o köşenin *derecesi* denir ve $deg(v)$ ile gösterilir.

Başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olan bir kenara *döngü (loop)* adı verilir. $v \in V(G)$ olmak üzere;

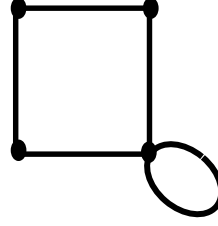
$$N = \{x \in V \mid xv \in E(G)\}$$

kümesine ise v köşesinin *açık komşuluğu* denir.

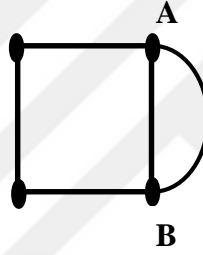
1.4 Tanım. Herhangi iki köşesi arasında birden fazla kenara sahip olmayan ve döngü içermeyen graflara *basit (simple) graf* denir.



Şekil 1.3. Basit bir graf



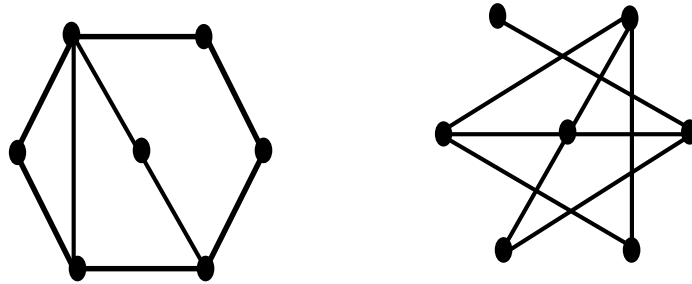
Şekil 1.4. Basit olmayan bir graf



Şekil 1.5. Basit olmayan bir graf

Yukarıda verilen Şekil 1.3.'deki graf basit graf iken, Şekil 1.4.'deki graf içerdiği döngüden dolayı basit graf değildir. Şekil 1.5.'deki grafta A ile B köşeleri arasında iki kenar bulunduğu için bu graf ta bir basit graf değildir.

1.5 Tanım. Bir G grafında her $u, v \in V(G)$ için $uv \notin E(G)$ olacak şekildeki uv kenarlarının oluşturduğu grafa **tümleyen (complement) graf** denir ve \bar{G} ile gösterilir.



Şekil 1.6. G ve \bar{G} grafları

1.6 Tanım. Bir G grafında $\forall u \in V(G)$ için tüm $deg(v)$ değerleri eşit ise bu grafa **düzenli (regular) graf** denir. Eğer $deg(v) = n$ ise grafa **n -düzenli (n -regular)** de denilir.

Şimdi bazı özel graf türlerini hatırlayalım:

1.7 Tanım. n köşeye sahip bir G grafında, eğer $\forall u, v \in V(G)$ için $uv \notin E(G)$ ise bu grafa **boş (empty) graf** denir. Boş graf yalnızca noktalardan oluşur ve E_n ile gösterilir.



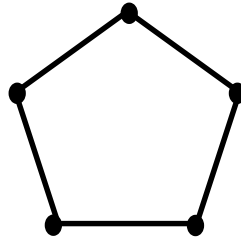
Şekil 1.7. E_6 boş grafi

1.8 Tanım. n köşeye sahip bir G grafında, kenarlar bir yol oluşturuyorsa bu grafa **yol (path) grafi** denir ve P_n ile gösterilir.



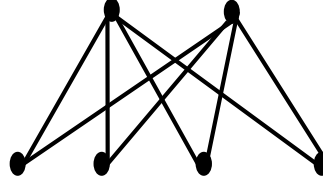
Şekil 1.8. P_5 yol grafi

1.9 Tanım. n köşeye sahip bir G grafında, kenarlar bir çember oluşturuyorsa bu grafa **devir (cycle) grafi** denir ve C_n ile gösterilir.



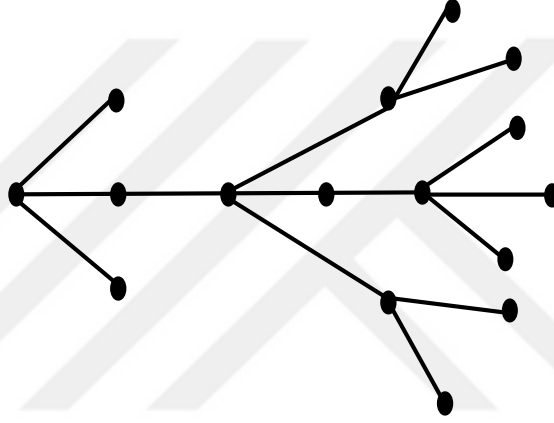
Şekil 1.9. C_5 devir grafi

1.10 Tanım. Bir G grafi, graftan alınan her bir kenarın bir köşesi M 'ye ait, diğer köşesi N 'ye ait olacak şekilde M ve N şeklinde iki alt köşe kümesine ayrılabiliriyorsa bu grafa **iki parçalı (bipartite) graf** denir. $s(M) = m$ ve $s(N) = n$ ise bu graf $K_{m,n}$ ile gösterilir.



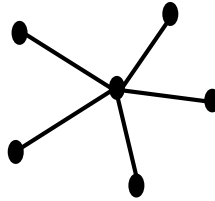
Şekil 1.10. $K_{2,4}$ iki parçalı grafi

1.11 Tanım. Bağlantılı olan ve döngü içermeyen graflara *ağaç (tree) graf* denir. T_n ile gösterilir.



Şekil 1.11. 16 köşeli bir T_{16} ağacı

1.12 Tanım. n köşeye sahip, ağaç özelliğini taşıyan ayrıca yalnızca bir köşesinin derecesi $n-1$, diğer köşelerinin dereceleri ise 1 olan graflara *yıldız (star) graf* denir. S_n ile gösterilir.

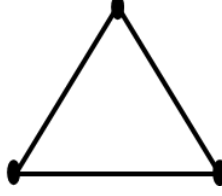


Şekil 1.12. S_6 yıldız grafi

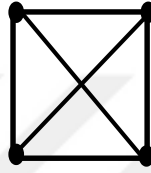
1.13 Tanım. n köşeye sahip bir G grafında, eğer $\forall u, v \in V(G)$ için $uv \in E(G)$ oluyorsa bu grafa *tam (complete) graf* denir ve K_n ile gösterilir.



Şekil 1.13. K_2 tam grafi



Şekil 1.14. K_3 tam grafi



Şekil 1.15. K_4 tam grafi

1.14 Örnek. Tam graflar, düzenli grafa birer örnektir. $\forall u \in V(K_n)$ için

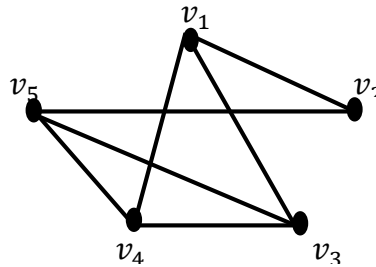
$$\deg(u) = n - 1$$

dir.

1.15 Tanım. Köşeleri $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ olan n köşeli bir G grafında

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ ve } v_j \text{ komşu (adjacent) köşeler ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde $n \times n$ tipinde yazılan $[A]_{i,j}$ kare matrisine G grafının *komşuluk (adjacency) matrisi* denir ve A ile gösterilir.



Şekil 1.16. Bir G grafi

Yukarıda Şekil 1.16.'da verilen grafın komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.



2. GRAFLARIN SPEKTRUMLARI

2.1. Genel Kavramlar

Grafların uygulamada kullanılan önemli bir özelliği graf enerjisidir. Bu kavram ilk olarak 1930'larda Alman Matematikçi Erich Hückel tarafından bir organik molekül sınıfı için Schrödinger denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmaya yarayan bir metod arayışı sırasında ortaya atılmıştı. Schrödinger denklemi, içinde sistemin enerjisi kavramının da bulunduğu ikinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklemdir. Daha sonra 1978'de Ivan Gutman, o zamana kadar moleküler graflar için tanımlı olan bu kavramı tüm graflara genelleştirmiştir.

Bir G grafinin enerjisi, aşağıda tanımlayacağımız özel bir kümenin elemanlarının mutlak değerlerinin toplamı olarak tanımlanmaktadır.

2.1 Tanım. Verilen n köşeli basit bir G grafinde komşuluk matrisinin özdeğerlerinin oluşturduğu kümeye **G grafinin spektrumu** denir ve $S(G)$ ile gösterilir. Komşuluk matrisinin özdeğerlerine aynı zamanda **grafin özdeğerleri** de denilir.

n köşeli bir G grafinin komşuluk matrisi $n \times n$ tipinde bir A kare matrisi olsun. I_n , $n \times n$ tipindeki birim matrisi göstermek üzere, A matrisinin özdeğerlerinin

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

denklemini sağlayan λ sayıları olduğunu hatırlayalım. Bu durumda her bir özdeğer, spektrumun bir elemanı olacağından n mertebeli bir grafin spektrumu; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ grafin özdeğerleri olmak üzere

$$S(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$$

şeklinde olacaktır.

2.2 Örnek. K_3 grafinin komşuluk matrisini bulup, spektrumunu hesaplayalım.

Şekil 1.7.'de verilen K_3 grafinin komşuluk matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. K_3 'ün spektrumunu bulmak için $|A - \lambda I_n| = 0$ denklemindeki λ değerlerini bulmalıyız.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_n) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 1) + 2(\lambda + 1) \\ &= -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) \end{aligned}$$

olur ve buradan da $|A - \lambda I_n| = 0$ için,

$$\lambda_{1,2} = -1 \text{ ve } \lambda_3 = 2$$

bulunur. Yani A matrisinin özdeğerleri $-1, -1$ ve 2 'dir. Bir başka deyişle de

$$S(K_3) = \{-1^{(2)}, 2\}$$

olur. Burada -1 'in üstündeki parantez içinde 2 sayısı iki tane özdeğerin -1 olduğunu belirtmek için kullanılmaktadır.

2.2. Grafların Spektral Polinomları

Yukarıda bahsedildiği gibi n boyutlu bir G grafinin komşuluk matrisi A olmak üzere $|A - \lambda I_n| = 0$ denkleminin kökleri bize G grafinin özdeğerlerini vermekteydi. Aslında bu denklemin sol tarafındaki determinantın açık hali bize λ 'ya bağlı derecesi n olan bir polinom vermektedir. Bu bölümde,

$$Pol(G) = |A - \lambda I_n|$$

tanımlayarak bu polinomu bazı sık kullanılan graf türleri için açık bir şekilde hesaplayacağız. Daha önce literatürde bazı grafların özdeğerleri bulunmuş olsa da bu polinom burada ilk kez hesaplanmıştır.

Şimdi sık kullanılan $G = P_n, S_n, K_n, C_n$ ve $K_{m,n}$ graf türleri için $Pol(G)$ polinomları, bu polinomların tam ifadeleri, sağladıkları indirgeme bağıntıları, buradan hareketle de özdeğerlerinin nasıl elde edildiği gösterilecek ve bu sayede grafların spektrumları bulunacaktır.

$Pol(P_n)$

Bu kısımda P_n yol grafının özdeğerlerini veren polinom hesaplanacaktır. İlk olarak $n = 1, 2, 3$ ve 4 için P_n graflarının komşuluk matrisleri oluşturulacak ve buradan determinant özellikleri kullanılarak bu dört durumdaki polinomlar hesaplanacak ve buradan hareketle genel durumda herhangi bir yol grafının spektral polinomu için bir formül elde edilecektir. Daha sonra da bu polinomun sağladığı indirgeme bağıntısı oluşturulacaktır.

2.2.1 Örnek. P_1 yol grafi



Şekil 2.1 P_1 grafi

şeklinde olduğundan P_1 'in komşuluk matrisi,

$$A = [0]$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} Pol(P_1) &= |A - \lambda I_1| \\ &= | -\lambda | \\ &= -\lambda \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.2 Örnek. Şimdi de P_2 yol grafını ele alalım.



Şekil 2.2. P_2 grafi

olduğundan P_2 'nin komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} Pol(P_2) &= |A - \lambda I_2| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.3 Örnek. P_3 grafi için de benzer şekilde,



Şekil 2.3. P_3 grafi

olduğundan P_3 'ün komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

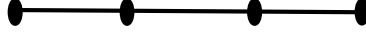
şeklindedir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} Pol(P_3) &= |A - \lambda I_3| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda^3 + 2\lambda \\
&= -\lambda (\lambda^2 - 2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.4 Örnek. Son olarak P_4 grafi için



Şekil 2.4. P_4 grafi

olduğundan P_4 'ün komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned}
Pol(P_4) &= |A - \lambda I_4| \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda [Pol(P_3)] - Pol(P_2) \\
&= \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned}
Pol(P_1) &= -\lambda \\
Pol(P_2) &= \lambda^2 - 1 \\
Pol(P_3) &= -\lambda^3 + 2\lambda \\
Pol(P_4) &= \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 \\
Pol(P_5) &= -\lambda^5 + 4\lambda^3 - 3\lambda \\
Pol(P_6) &= \lambda^6 - 5\lambda^4 + 6\lambda^2 - 1
\end{aligned}$$

⋮

şeklinde $Pol(P_n)$ polinomlarını yazabiliriz.

2.2.5. Teorem. $Pol(P_n)$ polinomu,

- n çift ise,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \frac{n}{2} \text{ çift iken} \\ -1, & \frac{n}{2} \text{ tek iken} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} Pol(P_n) &= \binom{n}{0}\lambda^n - \binom{n-1}{1}\lambda^{n-2} + \binom{n-2}{2}\lambda^{n-4} \dots - \varepsilon \binom{\frac{n+2}{2}}{\frac{n-2}{2}}\lambda^{n-(n-2)} + \varepsilon \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\lambda^{n-n} \\ &= \lambda^n - (n-1)\lambda^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\lambda^{n-4} - \dots - \varepsilon \cdot T_{n/2} \cdot \lambda^2 + \varepsilon; \end{aligned}$$

- n tek ise,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \frac{n+1}{2} \text{ çift iken} \\ -1, & \frac{n+1}{2} \text{ tek iken} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} -Pol(P_n) &= \binom{n}{0}\lambda^n - \binom{n-1}{1}\lambda^{n-2} + \binom{n-2}{2}\lambda^{n-4} \dots + \varepsilon \binom{\frac{n+3}{2}}{\frac{n-3}{2}}\lambda^{n-(n-3)} - \varepsilon \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}\lambda^{n-(n-1)} \\ &= \lambda^n - (n-1)\lambda^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\lambda^{n-4} - \dots + \varepsilon \cdot \binom{\frac{n+3}{2}}{\frac{n-3}{2}} \cdot \lambda^3 - \varepsilon \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}\lambda \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ifadesi n . üçgensel sayıyı göstermektedir.

2.2.6 Teorem. P_n için $Pol(P_n)$ polinomunun sağladığı indirgeme bağıntısı,

$$Pol(P_n) = -\lambda Pol(P_{n-1}) - Pol(P_{n-2}), \quad n \geq 3$$

şeklindedir.

İspat. n köşeli bir P_n yol grafının komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olup,

$$Pol(P_n) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{n \times n}$$

şeklindedir. Bu determinant birinci satıra göre açılırsa,

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

Birinci determinant $Pol(P_{n-1})$ 'e eşit olup, ikinci determinanti birinci sütuna göre tekrar açarsak,

$$= -\lambda Pol(P_{n-1}) - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}$$

elde edilir. Son ifadede elde edilen determinant ise $Pol(P_{n-2})$ 'yi veren determinanttır. Dolayısıyla,

$$Pol(P_{n-1}) = -\lambda Pol(P_{n-1}) - Pol(P_{n-2})$$

olduğu kolayca görülür.

Yukarıda bulduğumuz $Pol(P_n)$ polinomunun köklerinin

$$\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n+1}\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

şeklinde olduğu iyi bilinen bir sonuçtur, Li, Shi, Gutman, [Graph Energy, 2013] ve Brouwer, Haemers, [Spectra of Graphs, 2012]. Dolayısıyla,

$$S(P_n) = \left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n+1}\right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \right\}$$

şeklindedir.

$Pol(K_n)$

Bu kısımda K_n tam grafi için, yukarıda P_n grafına uyguladığımız işlemlerin benzerleri uygulanacak, komşuluk matrisleri oluşturulacak ve buradan determinant özellikleri kullanılarak bu polinomun sağladığı indirgeme bağıntısı oluşturulacaktır.

2.2.7 Örnek. K_1 tam grafi ele alınırsa Şekil 2.1'de verilen P_1 grafi, K_1 grafına eşit olduğu için,

$$\begin{aligned} Pol(K_1) &= |A - \lambda I_1| \\ &= |-\lambda| \\ &= -\lambda \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülmektedir.

2.2.8 Örnek. K_2 tam grafını ele alalım. Şekil 2.2'de verilen P_2 grafi, K_2 grafına eşit olduğu için,

$$\begin{aligned}
Pol(P_2) &= |A - \lambda I_2| \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 - 1
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülmektedir.

2.2.9 Örnek. Şekil 1.14'de verilen K_3 grafi için, K_3 'ün komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned}
Pol(K_3) &= |A - \lambda I_3| \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda Pol(K_2) - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda Pol(K_2) + 2(\lambda + 1) \\
&= -\lambda Pol(K_2) + 2(\lambda + \lambda^2 - Pol(K_2)) \\
&= -(\lambda + 2) Pol(K_2) + 2(\lambda + \lambda^2) \\
&= -(\lambda + 2) Pol(K_2) + 2\lambda(\lambda + 1) \\
&= -(\lambda + 2) Pol(K_2) - \lambda(\lambda + 1)Pol(K_1) \\
&= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \\
&= -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.10 Örnek. Son olarak Şekil 1.15’de verilen K_4 grafi için, K_4 ’ün komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} Pol(K_4) &= |A - \lambda I_4| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda Pol(K_3) - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda Pol(K_3) - 3(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ &= -\lambda Pol(K_3) - 3(\lambda + 1)^2 \\ &= -(\lambda + 3) Pol(K_3) - 3(\lambda + 1) Pol(K_2) \\ &= \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 \\ &= (\lambda + 1)^3(\lambda - 3) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hareketle $Pol(K_n)$ polinomlarını

$$Pol(K_1) = -\lambda$$

$$Pol(K_2) = \lambda^2 - 1$$

$$Pol(K_3) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

$$Pol(K_4) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 = (\lambda + 1)^3(\lambda - 3)$$

$$Pol(K_5) = -\lambda^5 + 10\lambda^3 + 20\lambda^2 + 15\lambda + 4 = -(\lambda + 1)^4(\lambda - 4)$$

⋮

şeklinde yazabiliriz.

2.2.11 Teorem. K_n için $Pol(K_n)$ polinomunun sağladığı indirgeme bağıntısı,

$$Pol(K_n) = -\lambda Pol(K_{n-1}) - (n-1)(-\lambda-1)^{n-2}$$

şeklindedir.

İspat. n köşeli bir K_n tam grafinin komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olup, köşegen elemanları 0, diğer tüm elemanları 1 olan $n \times n$ tipinde bir matristir. Dolayısıyla,

$$Pol(K_n) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{n \times n}$$

şeklindedir. Bu determinant birinci sütuna göre açılırsa,

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} - (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$= -\lambda Pol(K_{n-1}) - (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \quad (2.1)$$

elde edilir. Son determinanttaki birinci satır -1 ile çarpılıp diğer satırlara eklenirse,

$$\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (-1-\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (-1-\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1-\lambda) \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}$$

determinantı elde edilir ve bu determinantın değeri olan $(-1-\lambda)^{n-2}$ değeri (2.1)'de yerine konulursa,

$$Pol(K_n) = -\lambda Pol(K_{n-1}) - (n-1)(-1-\lambda)^{n-2}$$

elde edildiği kolayca görülür. Benzer şekilde aşağıdaki bağıntı da elde edilir:

2.2.12 Sonuç. K_n grafının özdeğerlerini kök kabul eden $Pol(K_n)$ polinomunun indirgeme bağıntısı,

$$Pol(K_n) = -(\lambda + n - 1) Pol(K_{n-1}) - (n-1)(\lambda + 1) Pol(K_{n-2})$$

şeklindedir.

Yukarıda bulduğumuz $Pol(K_n)$ polinomunun köklerinin,

$$\lambda_i = \begin{cases} -1, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ n-1, & i = n \end{cases}$$

şeklinde olduğu iyi bilinen bir sonuçtur. Dolayısıyla,

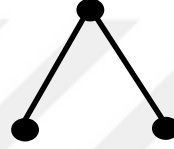
$$\begin{aligned} S(K_n) &= \{\lambda_i : \lambda_i = -1, i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{ ve } \lambda_n = n-1\} \\ &= \{n-1, -1^{(n-1)}\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$Pol(S_n)$

Bu kısımda da S_n yıldız grafinin özdeğerlerini veren polinom hesaplanacaktır. Yukarıda P_n ve K_n graflarına uyguladığımız işlem basamakları uygulanacak, komşuluk matrisleri oluşturulacak, determinant özellikleri kullanılarak S_n için polinomlar hesaplanacak ve buradan hareketle genel durumda herhangi bir yıldız grafinin spektral polinomu için bir formül elde edilecektir. Daha sonra da bu polinomun sağladığı indirgeme bağıntısı oluşturulacaktır.

2.2.13 Örnek. İlk olarak S_3 grafi



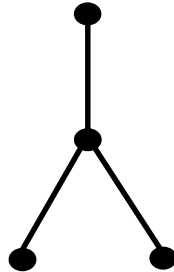
Şekil 2.5. S_3 grafi

şeklindedir. Yukarıda verilen Şekil 2.5.'de ve Şekil 2.3'de de görüldüğü gibi S_3 grafi ile P_3 grafi aynıdır. Dolayısı ile komşuluk matrisleri de eşittir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} Pol(S_3) &= |A - \lambda I_3| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

2.2.14 Örnek. S_4 yıldız grafi;



Şekil 2.6. S_4 grafi

şeklindedir. Şekil 2.6'da verilen S_4 grafi için, S_4 'ün komşuluk matrisi,

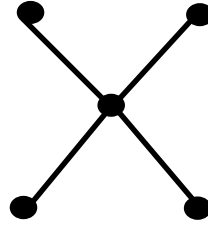
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \text{Pol}(S_4) &= |A - \lambda I_4| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \text{Pol}(S_3) - \lambda^2 \\ &= \lambda^4 - 3\lambda^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.15 Örnek. S_5 yıldız grafi;



Şekil 2.7. S_5 grafi

olduğundan Şekil 2.7’de verilen S_5 grafi için, S_5 ’in komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$Pol(S_5) = |A - \lambda I_5|$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda Pol(S_4) + \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda Pol(S_4) + \lambda^3 \\
&= -\lambda^5 + 4\lambda^3
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.16 Örnek. Şekil 1.12.'de verilen S_6 yıldız grafi için komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, buradan hareketle

$$Pol(S_6) = |A - \lambda I_6|$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda Pol(S_5) - \lambda^4 \\
&= \lambda^6 - 5\lambda^4
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$Pol(S_3) = -\lambda^3 + 2\lambda$$

$$Pol(S_4) = \lambda^4 - 3\lambda^2$$

$$Pol(S_5) = -\lambda^5 + 4\lambda^3$$

$$Pol(S_6) = \lambda^6 - 5\lambda^4$$

$$Pol(S_7) = -\lambda^7 + 6\lambda^5$$

⋮

şeklinde $Pol(S_n)$ polinomlarını yazabiliriz.

2.2.17 Teorem. S_n için $Pol(S_n)$ polinomunun sağladığı indirgeme bağıntısı $n \geq 4$ için

$$Pol(S_n) = -\lambda Pol(S_{n-1}) - 1(-\lambda)^{n-2}$$

şeklindedir.

İspat. n köşeli bir S_n tam grafinin komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olup, $n \times n$ tipinde bir matristir. Bu matrister $a_{nn} = 0$ dışında n . satır ve n . sütundaki tüm elemanlar 1 sayısına eşit iken, diğer tüm elemanlar da 0'a eşittir. Dolayısıyla,

$$Pol(S_n) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{n \times n}$$

şeklindedir. Bu determinant birinci sütuna göre açılırsa,

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$= -\lambda Pol(S_{n-1}) + (-1)^{n+1} \left[(-\lambda)(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} \right]$$

$$\vdots$$

elde edilir. İkinci kısımda elde edilen determinanti her seferinde 2. satıra göre açıp bu işlemi 3x3 tipindeki determinanti elde edene kadar tekrarlırsak,

$$= -\lambda Pol(S_{n-1}) + (-1)^{n+1} [(-\lambda)^{n-4}(-\lambda)^{n-4}(-\lambda)^2]$$

elde edilir. Dolayısıyla $n \geq 4$ için

$$Pol(S_n) = -\lambda Pol(S_{n-1}) - 1(-\lambda)^{n-2}$$

olduğu kolayca görülür.

2.2.18 Sonuç. S_n grafının özdeğerlerini kök kabul eden $Pol(S_n)$ polinomu $n \geq 3$ için

$$Pol(S_n) = (-\lambda)^{n-2} (\lambda^2 - n + 1)$$

şeklindedir.

Yukarıda bulduğumuz $Pol(S_n)$ polinomunun köklerinin,

$$\lambda_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \pm\sqrt{n-1} & i = n-1, n \end{cases}$$

şeklinde olduğu iyi bilinen bir sonuçtur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} S(S_n) &= \{\lambda_i: \lambda_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n-2; \lambda_{n-1} = \sqrt{n-1}, \lambda_n = -\sqrt{n-1}, i \in \mathbb{Z}^+\} \\ &= \{0^{(n-2)}, \pm\sqrt{n-1}\} \end{aligned}$$

dir.

$Pol(K_{m,n})$

Bu kısımda da $K_{m,n}$ iki parçalı grafinin özdeğerlerini kök kabul eden polinom hesaplanacaktır. Yukarıda S_n ve K_n graflarına uyguladığımız işlem basamaklarının benzerleri uygulanacak, komşuluk matrisleri oluşturulacak, determinant özellikleri kullanılarak $K_{m,n}$ için polinomlar hesaplanacak ve buradan hareketle de bu polinomun sağladığı indirgeme bağıntısı oluşturulacaktır.

2.2.19 Örnek. İlk olarak $K_{m,n}$ grafini $m=1$ için incelediğimizde elde edilen grafların S_{n+1} grafına eşit olduğu kolayca görülmektedir. (Şekil 2.5, Şekil 2.6, Şekil 2.7)

- $K_{1,2}$ iki parçalı grafinin özdeğerlerini veren polinom,

$$\begin{aligned} Pol(K_{1,2}) &= Pol(S_3) = |A - \lambda I_3| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda \end{aligned}$$

şeklindedir.

- $K_{1,3}$ iki parçalı grafin özdeğerlerini veren polinom

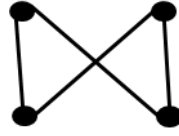
$$Pol(K_{1,3}) = Pol(S_4) = \lambda^4 - 3\lambda^2$$

şeklindedir. Buradan hareketle $K_{1,n}$ grafinin indirgeme bağıntısının;

$$Pol(K_{1,n}) = -\lambda Pol(K_{1,n-1}) - (-\lambda)^{n-1}$$

şeklinde olduğunu, S_n indirgeme bağıntısını kullanarak söyleyebiliriz.

2.2.20 Örnek. Şimdi ise $K_{2,2}$ grafini inceleyelim.



Şekil 2.8. $K_{2,2}$ grafi

Verilen $K_{2,2}$ grafinin komşuluk matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$Pol(K_{2,2}) = |A - \lambda I_4|$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

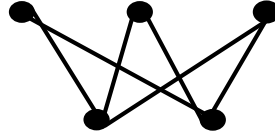
$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda Pol(K_{1,2}) - 2\lambda^2$$

$$= \lambda^4 - 4\lambda^2$$

elde edilir.

2.2.21 Örnek. Şimdi ise $K_{2,3}$ grafini inceleyelim.



Şekil 2.9. $K_{2,3}$ grafi

Şekil 2.9'de verilen $K_{2,3}$ grafi için, $K_{2,3}$ 'in komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$Pol(K_{2,3}) = |A - \lambda I_5|$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

bulunur. Burada elde edilen dört determinanttan ilki incelendiğinde, bu determinantın $Pol(K_{1,3})$ determinantına eşit olduğu Örnek 2.2.19'dan açık bir şekilde görülmektedir.

Diğer üç determinanta da uygun elementer satır (sütun) işlemleri uygulandığında üçünün de eşit olduğu ortaya çıkmaktadır.

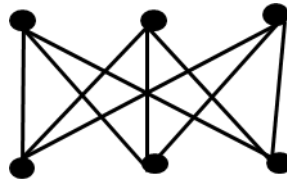
$$= -\lambda \text{Pol}(K_{1,3}) + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Buradaki elde ettiğimiz determinanta ise birinci satırı -1 ile çarpıp ikinci satıra, üçüncü satırı -1 ile çarpıp dördüncü satıra eklersek,

$$\begin{aligned} &= -\lambda \text{Pol}(K_{1,3}) + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \text{Pol}(K_{1,3}) + 3 \left[\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} \right] \\ &= -\lambda \text{Pol}(K_{1,3}) + 3\lambda^3 \\ &= -\lambda^5 + 6\lambda^3 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.22 Örnek. Son olarak da $K_{3,3}$ grafini inceleyelim.



Şekil 2.10. $K_{3,3}$ grafi

$K_{3,3}$ grafi Şekil 2.10'daki gibi olduğundan, verilen $K_{3,3}$ 'ün komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$Pol(K_{3,3}) = |A - \lambda I_6|$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

bulunur. Elde edilen bu determinanta da Örnek 2.2.21'deki gibi elementer satır (sütun) işlemleri uygulandığında,

$$\begin{aligned} Pol(K_{3,3}) &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda Pol(K_{2,3}) - 3\lambda^4 \\ &= \lambda^6 - 9\lambda^4 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.23 Teorem. $K_{m,n}$ iki parçalı graf olmak üzere,

$$Pol(K_{m,n}) = (-1)^{m+n} \cdot \lambda^{m+n-2} \cdot (\lambda^2 - mn)$$

dir.

İspat. . $K_{m,n}$ iki parçalı grafının A komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(m+n) \times (m+n)}$$

şeklindedir. Buradan ise,

$$Pol(K_{m,n}) = |A - \lambda I_{m+n}|$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}_{(m+n) \times (m+n)}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz bu $(m+n) \times (m+n)$ tipindeki determinanтта, son satırı -1 ile çarpıp sırasıyla $m+1, m+2, m+3, \dots, m+n-1$ satırlarına ekleyelim. Ardından ise sırasıyla birinci satırın $(1/\lambda)$ katını son satıra, ikinci satırın $(1/\lambda)$ katını son satıra, üçüncü satırın $(1/\lambda)$ katını son satıra, ..., en son ise $(m+1)$. satırın $(1/\lambda)$ katını son satıra eklersek, elde ettiğimiz determinant değişmez ve

$$= \begin{vmatrix} A_{m \times m} & B_{m \times n} \\ 0_{n \times m} & D_{n \times n} \end{vmatrix}_{(m+n) \times (m+n)}$$

elde edilir. Lineer cebirde determinant hesaplamalarına dayanarak bu determinantın değerinin $|A| \cdot |D|$ ifadesine eşit olduğu söylenebilir. Burada;

$$A = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{m \times m}$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{m \times n}$$

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & \lambda \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & -\lambda & \lambda \\ m \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) & m \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) & \cdots & m \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) & m \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) - \lambda \end{vmatrix}_{n \times n}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} |A| &= (-\lambda)^m \cdot |I_m| \\ &= (-\lambda)^m \cdot 1 \\ &= (-\lambda)^m \end{aligned}$$

dir.

$|D|$ determinantını hesaplamak için ise $|D|$ determinantı üzerinde, 1. sütundan (n-1). sütuna kadar tüm sütunlar bir bir son sütun ile toplanır. Son durumda elde edilen determinant,

$$|D| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & -\lambda & 0 \\ m \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) & m \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) & \cdots & m \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) & m \cdot n \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) - \lambda \end{vmatrix}_{n \times n}$$

şeklinde olup bu ifadeyi de son sütuna göre Laplace açılımını kullanarak hesaplırsak,

$$\begin{aligned} &= (-1)^{n+n} \left(nm \frac{1}{\lambda} - \lambda \right) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \\ &= (-1)^{2n} \left(nm \frac{1}{\lambda} - \lambda \right) (-\lambda)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} (nm\lambda^{n-2} - \lambda^n) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} Pol(K_{m,n}) &= |A - \lambda I_{m+n}| \\ &= |A| |D| \\ &= (-1)^{m+n} (\lambda^{m+n-2}) (\lambda^2 - mn) \end{aligned}$$

şeklindedir.

2.2.24 Teorem. $K_{m,n}$ iki parçalı grafi için indirgeme bağıntısı;

$$Pol(K_{m,n}) = -\lambda Pol(K_{m-1,n}) + (-1)^{m+n-1} \lambda^{m+n-2} n \quad m > 1$$

ve

$$Pol(K_{1,n}) = -\lambda Pol(K_{1,n-1}) - (-\lambda)^{n-1} \quad m = 1$$

dir.

İspat. $m=1$ iken $K_{1,n} = S_{1+n}$ olduğundan Teorem 2.2.17'den ispatı açıktır.

$m>1$ iken ise;

$$\begin{aligned}
& -\lambda Pol(K_{m-1,n}) + (-1)^{m+n-1} \lambda^{m+n-2} \\
&= -\lambda [(-1)^{m-1+n} (\lambda^{m-1+n-2}) (\lambda^2 - (m-1)n)] + ((-1)^{m+n-1} n (\lambda^{m+n-2})) \\
&= (-1)^{m+n-2} (\lambda^{m+n-2}) (\lambda^2 - mn + n) + (-1)^{m+n-1} n \lambda^{m+n-2} \\
&= (-1)^{m+n} (\lambda^{m+n-2}) (\lambda^2 - mn + n - n) \\
&= (-1)^{m+n} (\lambda^{m+n-2}) (\lambda^2 - mn) \\
&= Pol(K_{m,n})
\end{aligned}$$

olduğu görülmektedir.

Yukarıda bulduğumuz $Pol(K_{m,n})$ polinomunun köklerinin,

$$\lambda_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \pm\sqrt{mn} & i = n-1, n \end{cases}$$

şeklinde olduğu iyi bilinen bir sonuçtur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
S(K_{m,n}) &= \{\lambda_i: \lambda_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots, m+n-2; \lambda_{m+n-1} = \sqrt{mn}, \lambda_{m+n} = \\
& \quad -\sqrt{mn}, i \in \mathcal{Z}^+\} \\
&= \{0^{(m+n-2)}, \pm\sqrt{mn}\}
\end{aligned}$$

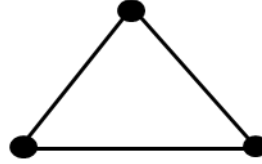
bulunur.

$Pol(C_n)$

Bu kısımda ise C_n devirli grafinin ($n \geq 3$) özdeğerlerini kök kabul eden polinom hesaplanacaktır. Yukarıdaki graflara uyguladığımız işlem basamaklarının benzerleri uygulanacak, komşuluk matrisleri oluşturulacak, determinant özellikleri kullanılarak C_n

için polinomlar hesaplanacak ve buradan hareketle de bu polinomun sağladığı indirgeme bağıntısı oluşturulacaktır.

2.2.25 Örnek. İlk olarak C_3 grafi



Şekil 2.11. C_3 grafi

şeklindedir. Yukarıda verilen Şekil 2.11.'de verilen C_3 grafinin komşuluk matrisi,

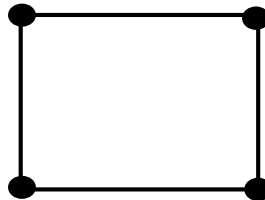
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan ise,

$$\begin{aligned} Pol(C_3) &= |A - \lambda I_3| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda - 2 \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

olduğu hesaplanır.

2.2.26 Örnek. İlk olarak C_4 grafi



Şekil 2.12. C_4 grafi

şeklindedir. Yukarıda verilen Şekil 2.12.'de verilen C_4 grafinin komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan ise,

$$Pol(C_4) = |A - \lambda I_4|$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 4\lambda^2 \\ &= (\lambda - 2)\lambda^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

olduğu hesaplanır.

2.2.27 Örnek. İlk olarak C_5 grafi Şekil 1.9'da verilmiştir. Verilen C_5 grafinin komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan ise,

$$Pol(C_5) = |A - \lambda I_5|$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\
&= -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2 \\
&= -(\lambda - 2)(\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1)
\end{aligned}$$

olduğu uygun determinant hesapları ile bulunur.

Burada $Pol(C_1)$ ve $Pol(C_2)$ polinomlarını özel olarak tanımlayalım.

$$Pol(C_1) = -1(\lambda - 2)$$

ve

$$Pol(C_2) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

olsun. $n \geq 3$ için determinant hesapları yapıldığında,

$$Pol(C_3) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

$$Pol(C_4) = \lambda^4 - 4\lambda^2 = (\lambda - 2)\lambda^2(\lambda + 2)$$

$$= \lambda Pol(C_3) - Pol(C_2) + (-1)^4 2 Pol(C_1)$$

$$Pol(C_5) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1)$$

$$= -\lambda Pol(C_4) - Pol(C_3) - 2Pol(C_1)$$

$$Pol(C_6) = \lambda^6 - 6\lambda^4 + 9\lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda^5 + 2\lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 2)$$

$$= -\lambda Pol(C_5) - Pol(C_4) + 2Pol(C_1)$$

⋮

olduğu hesaplanır.

2.2.28. Teorem. $n \geq 3$ olmak üzere, $Pol(C_n)$ için indirgeme bağıntısı,

$$Pol(C_n) = -\lambda Pol(C_{n-1}) - Pol(C_{n-2}) + (-1)^n Pol(C_1)$$

şeklindedir.

İspat. Bu indirgeme bağıntısı da diğer graf polinomlarına uyguladığımız işlem basamaklarının benzerleri uygulanarak görülür.

Yukarıda bulduğumuz $Pol(C_n)$ polinomunun köklerinin

$$\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

şeklinde olduğu iyi bilinen bir sonuçtur. Dolayısıyla

$$S(C_n) = \left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \right\}$$

şeklindedir.

3. SPEKTRUMLAR ARASI GEÇİŞ

Graf enerjisi, kimya alanında önemli ve uygulamaları çok olan bir kavramdır. Bu nedenle matematik kullanarak verilen bir grafın ya da graf sınıfının enerjisinin belirlenmesi de matematikçiler için oldukça önemli bir hal almıştır. Bir grafın enerjisini hesaplayabilmek için bu grafa karşılık gelen spektrumu belirlemek gerekir. Bu da Lineer Cebir kavramları yardımıyla yapılmaktadır. Bir grafa karşılık gelen spektral (karakteristik) polinomun belirlenmesi ve bu polinomun köklerinin bulunması bazı graf çeşitleri için kolay olsa da bazı türlerde oldukça zor olabilmektedir. Bu nedenle literatürde grafların spektral polinomunu ve bu polinomun köklerini veren genel sonuçlar bulunmamaktadır. Burada belli graf sınıfları için elde ettiğimiz enerji bilgilerinden faydalanarak başka grafların enerjilerini hesaplamaya yarayan bazı yöntemler geliştirilecektir. C_n ve P_n grafları için verilen spektrumun elemanlarını kullanarak, C_{2n} ve P_{2n+1} graflarının spektrumlarını veren bağıntı hesaplanacak, uygun örnekler ile bu bağıntının uygulaması gösterilecektir. Verilen bir C_n veya P_n grafının spektrumunu kullanarak, C_{2n} ve P_{2n+1} graflarının enerjileri de kolaylıkla hesaplanmış olacaktır. Bunlardan faydalanarak C_{4n} ve P_{4n+3} , C_{8n} ve P_{8n+5} , ... graflarının enerjileri de hesaplanabilmektedir.

3.1. C_n ve C_{2n} Arasında Spektral Geçiş

C_n 'in spektrumunun,

$$S(C_n) = \left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \right\}$$

olduğunu Teorem 2.2.28'den hatırlayalım. Bundan faydalanarak hesaplamalarda kolaylık sağlayacak bir sonuç elde edilebilir:

3.1.1. Lemma. C_n 'in spektrumunda her $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için

$$\lambda_k = \lambda_{n-k}$$

olur.

İspat.

$$\begin{aligned} \lambda_{n-k} &= 2 \cos\left(\frac{2\pi(n-k)}{n}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{n} - \frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= 2 \cos\left(n - \frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= 2 \cos\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= \lambda_k. \end{aligned}$$

3.1.2. Örnek. $S(C_6) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$ veriliyor. Bununla birlikte yukarıda verilen Lemma 3.1.1'in bir sonucu olarak,

$$\lambda_0 = 2, \quad \lambda_1 = \lambda_5, \quad \lambda_2 = \lambda_4, \quad \lambda_3 = -2$$

olur.

$n \geq 3$ olmak üzere, C_n 'in spektrumu,

$$S(C_n) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}\}$$

ve C_{2n} 'in spektrumu,

$$S(C_{2n}) = \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{2n-1}\}$$

olsun.

3.1.3. Teorem. $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için C_{2n} 'in spektrumunu, C_n 'in spektrumunu kullanarak,

➤ $n \equiv 0 \pmod{4}$ için;

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j+1} = \sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-4}{4} \quad \text{ve} \quad j = \frac{3n}{4}, \frac{3n+4}{4}, \dots, n-1$$

$$\mu_{2j+1} = -\sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = \frac{n}{4}, \frac{n+4}{4}, \dots, \frac{3n-4}{4}$$

ve

$$\mu_n = -2, \mu_{\frac{n}{2}} = 0, \mu_{\frac{3n}{2}} = 0;$$

➤ $n \equiv 1 \pmod{4}$ için;

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j+1} = \sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-5}{4} \quad \text{ve} \quad j = \frac{3n+1}{4}, \frac{3n+5}{4}, \dots, n-1$$

$$\mu_{2j+1} = -\sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = \frac{n-1}{4}, \frac{n+3}{4}, \dots, \frac{3n-3}{4} - \left\{ \frac{n-1}{2} \right\}$$

ve

$$\mu_n = -2;$$

➤ $n \equiv 2 \pmod{4}$ için,

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j+1} = \sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-6}{4} \quad \text{ve} \quad j = \frac{3n+2}{4}, \frac{3n+6}{4}, \dots, n-1$$

$$\mu_{2j+1} = -\sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = \frac{n+2}{4}, \frac{n+6}{4}, \dots, \frac{3n-6}{4}$$

ve

$$\mu_n = -2, \mu_{\frac{n}{2}} = 0, \mu_{\frac{3n}{2}} = 0;$$

ve son olarak

➤ $n \equiv 3 \pmod{4}$ için;

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j+1} = \sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{4} \quad \text{ve} \quad j = \frac{3n-1}{4}, \frac{3n+5}{4}, \dots, n-1$$

$$\mu_{2j+1} = -\sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = \frac{n+1}{4}, \frac{n+5}{4}, \dots, \frac{3n-5}{4}$$

ve

$$\mu_n = -2$$

olmaktadır.

İspat. $S(C_n) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}\}$ verilsin. Ayrıca

$$\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

olduğundan dolayı,

$$\lambda_0 = 2$$

$$\lambda_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$\lambda_2 = 2 \cos\left(\frac{2\pi 2}{n}\right),$$

$$\lambda_3 = 2 \cos\left(\frac{2\pi 3}{n}\right),$$

⋮

$$\lambda_{n-1} = 2 \cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte $S(C_{2n}) = \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{2n-1}\}$ olarak alınırsa,

$$\mu_0 = 2,$$

$$\mu_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right),$$

$$\mu_2 = 2 \cos\left(\frac{2\pi 2}{2n}\right),$$

$$\mu_3 = 2 \cos\left(\frac{2\pi 3}{2n}\right),$$

⋮

$$\mu_{2n-1} = 2 \cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{2n}\right)$$

olur. Buradan $\mu_{2j} = \lambda_j$ olduğu kolayca görülmektedir. Ayrıca trigonometrik yarım açı formülleri kullanılarak da $k = 2j + 1$ alındığında

$$j = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2} & n \text{ çift sayı,} \\ 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2} & n \text{ tek sayı,} \end{cases}$$

için,

$$\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi k}{2n}\right) - 1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{2\pi k}{2n}\right)$$

$$2\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + 2 = 4\cos^2\left(\frac{2\pi k}{2n}\right)$$

$$\pm \sqrt{2\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + 2} = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{2n}\right)$$

olduğundan dolayı;

$$\mu_k = \mp \sqrt{\lambda_k + 2}$$

dir.

➤ $n \equiv 0 \pmod{4}$ için oluşturulan

		90°			180°			270°			360°				
μ_0	μ_2	...	$\mu_{\frac{n-4}{2}}$	$\mu_{\frac{n}{2}}$	$\mu_{\frac{n+4}{2}}$...	μ_{n-2}	μ_n	μ_{n+2}	...	$\mu_{\frac{3n-4}{2}}$	$\mu_{\frac{3n}{2}}$	$\mu_{\frac{3n+4}{2}}$...	μ_{2n-2}
μ_1	μ_3	...	$\mu_{\frac{n-2}{2}}$	$\mu_{\frac{n+2}{2}}$...	μ_{n-1}	μ_{n+1}	...	$\mu_{\frac{3n-2}{2}}$	$\mu_{\frac{3n+2}{2}}$...	μ_{2n-1}			

tablosunda işaretler ve ispatın ilk kısmında elde ettiğimiz veriler de kullanılarak,

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j+1} = \sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-4}{4} \quad \text{ve} \quad j = \frac{3n}{4}, \frac{3n+4}{4}, \dots, n-1$$

$$\mu_{2j+1} = -\sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = \frac{n}{4}, \frac{n+4}{4}, \dots, \frac{3n-4}{4}$$

ve

$$\mu_n = -2, \mu_{\frac{n}{2}} = 0, \mu_{\frac{3n}{2}} = 0$$

olduğu görülmektedir.

➤ $n \equiv 1 \pmod{4}$ için oluşturulan

		90°			180°			270°			360°		
μ_0	μ_2	...	$\mu_{\frac{n-1}{2}}$	$\mu_{\frac{n+3}{2}}$...	μ_{n-1}	μ_{n+1}	...	$\mu_{\frac{3n-3}{2}}$	$\mu_{\frac{3n+1}{2}}$...	μ_{2n-2}	
μ_1	μ_3	...	$\mu_{\frac{n-3}{2}}$	$\mu_{\frac{n+1}{2}}$...	μ_{n-2}	μ_n	μ_{n+2}	...	$\mu_{\frac{3n-1}{2}}$	$\mu_{\frac{3n+3}{2}}$...	μ_{2n-1}
			+			-				-			+

tablosunda işaretler ve ispatın ilk kısmında elde ettiğimiz veriler de kullanılarak,

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j+1} = \sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-5}{4} \text{ ve } j = \frac{3n+1}{4}, \frac{3n+5}{4}, \dots, n-1$$

$$\mu_{2j+1} = -\sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = \frac{n-1}{4}, \frac{n+3}{4}, \dots, \frac{3n-3}{4} - \left\{ \frac{n-1}{2} \right\}$$

ve

$$\mu_n = -2$$

olduğu görülmektedir.

➤ $n \equiv 2 \pmod{4}$ için oluşturulan

		90°			180°			270°			360°			
μ_0	μ_2	...	$\mu_{\frac{n-2}{2}}$	$\mu_{\frac{n+2}{2}}$...	μ_{n-2}	μ_n	μ_{n+2}	...	$\mu_{\frac{3n-2}{2}}$	$\mu_{\frac{3n+2}{2}}$...	μ_{2n-2}	
μ_1	μ_3	...	$\mu_{\frac{n-4}{2}}$	$\mu_{\frac{n}{2}}$	$\mu_{\frac{n+4}{2}}$...	μ_{n-1}	μ_{n+1}	...	$\mu_{\frac{3n-4}{2}}$	$\mu_{\frac{3n}{2}}$	$\mu_{\frac{3n+4}{2}}$...	μ_{2n-1}
			+			-				-			+	

tablosunda işaretler ve ispatın ilk kısmında elde ettiğimiz veriler de kullanılarak,

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j+1} = \sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-6}{4} \text{ ve } j = \frac{3n+2}{4}, \frac{3n+6}{4}, \dots, n-1$$

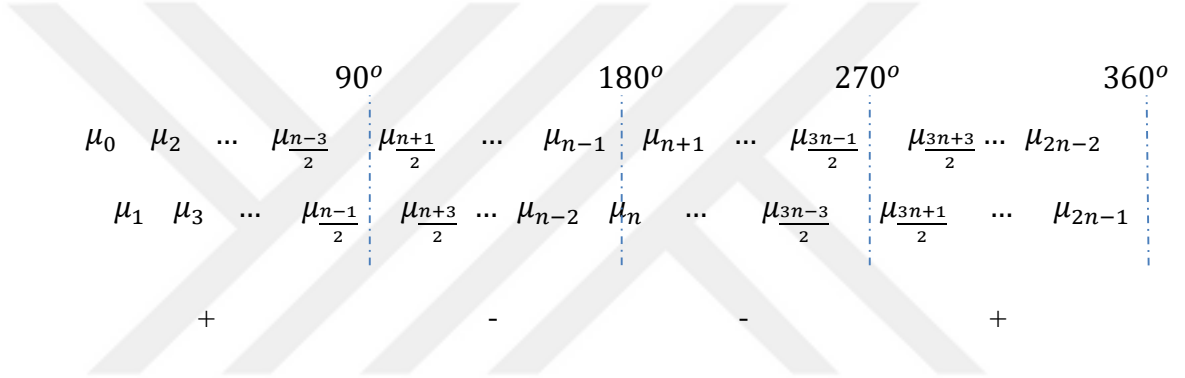
$$\mu_{2j+1} = -\sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = \frac{n+2}{4}, \frac{n+6}{4}, \dots, \frac{3n-6}{4}$$

ve

$$\mu_n = -2, \mu_{\frac{n}{2}} = 0, \mu_{\frac{3n}{2}} = 0$$

olduğu görülmektedir.

➤ $n \equiv 3 \pmod{4}$ için oluşturulan



tablosunda işaretler ve ispatın ilk kısmında elde ettiğimiz veriler de kullanılarak,

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j+1} = \sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{4} \text{ ve } j = \frac{3n-1}{4}, \frac{3n+5}{4}, \dots, n-1$$

$$\mu_{2j+1} = -\sqrt{\lambda_{2j+1} + 2} \quad j = \frac{n+1}{4}, \frac{n+5}{4}, \dots, \frac{3n-5}{4} - \left\{ \frac{n-1}{2} \right\}$$

ve

$$\mu_n = -2$$

olduğu görülmektedir.

3.1.4. Örnek. $n=4$ olmak üzere, C_4 'ün spektrumu $\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, $i = 0, 1, 2, 3$ için $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 'tür. C_8 'in spektrumu ise $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_7\}$ ile gösterilsin. C_8 'in spektrumunu C_4 'ün spektrumunu kullanarak bulalım.

Lemma 3.1.1.'den $\mu_1 = \mu_7$, $\mu_2 = \mu_6$, $\mu_3 = \mu_5$ ve $\lambda_1 = \lambda_3$ olup Teorem 3.1.3'den ise $\mu_4 = -2$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca Teorem 3.3.'ten,

$$\begin{aligned} S(C_8) &= \{2, \sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, -\sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_2, -\sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_3, \sqrt{\lambda_1 + 2}\} \\ &= \{2, \sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1 - \sqrt{\lambda_1 + 2}, -2, -\sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_1 + 2}\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca $\lambda_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 1}{8}\right) = 0$ olduğundan

$$S(C_8) = \{2, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$

dir.

3.1.5. Örnek. $n=5$ olmak üzere, C_5 'in spektrumu $\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ için $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ 'tür. C_{10} 'un spektrumu ise $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_9\}$ ile gösterilsin. C_{10} 'un spektrumunu C_5 'in spektrumunu kullanarak bulalım.

Lemma 3.1.1.'den $\mu_1 = \mu_9$, $\mu_2 = \mu_8$, $\mu_3 = \mu_7$, $\mu_4 = \mu_6$ ve $\lambda_1 = \lambda_4$, $\lambda_2 = \lambda_3$ olup Teorem 3.1.3'den ise $\mu_5 = -2$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca Teorem 3.1.3.'ten,

$$\begin{aligned} S(C_{10}) &= \{2, \sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, -\sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_2, -2, \lambda_3, -\sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_4, \sqrt{\lambda_1 + 2}\} \\ &= \{\lambda_0 = 2, \sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, -\sqrt{\lambda_2 + 2}, \lambda_2, -2, \lambda_2, -\sqrt{\lambda_2 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_1 + 2}\} \end{aligned}$$

yazılabilir.

3.1.6. Örnek. $n = 9$ olmak üzere, C_9 'un spektrumu $\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 8$ için $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8\}$ 'tür. C_{18} 'in spektrumu ise $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{17}\}$ ile gösterilsin. C_{18} 'in spektrumunu C_9 'un spektrumunu kullanarak bulalım.

Lemma 3.1.1. ve Teorem 3.1.3. kullanılarak;

$$\begin{aligned} S(C_{18}) &= \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{17}\} \\ &= \{2, \sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_2, -\sqrt{\lambda_4 + 2}, \lambda_3, -\sqrt{\lambda_2 + 2}, \\ &\lambda_4, -2, \lambda_4, -\sqrt{\lambda_2 + 2}, \lambda_3, -\sqrt{\lambda_4 + 2}, \lambda_2, \sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_1 + 2}\} \end{aligned}$$

dir.

3.1.7. Örnek. $n = 6$ olmak üzere, C_6 'nın spektrumu $\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 5$ için $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5\}$ 'tir. C_{12} 'nin spektrumu ise $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{11}\}$ ile gösterilsin. C_{12} 'nin spektrumunu C_6 'nin spektrumunu kullanarak bulalım.

Lemma 3.1.1. ve Teorem 3.1.3. kullanılarak;

$$\begin{aligned} S(C_{12}) &= \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{11}\} \\ &= \{2, \sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, 0, -\lambda_2, -\sqrt{\lambda_1 + 2}, \\ &\quad -2, -\sqrt{\lambda_1 + 2}, -\lambda_2, 0, \lambda_1, \sqrt{\lambda_1 + 2}\} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.8. Örnek. $n = 7$ olmak üzere, C_7 'nin spektrumu $\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 6$ için $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6\}$ 'dir. C_{14} 'ün spektrumu ise $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{13}\}$ ile gösterilsin. C_{14} 'ün spektrumunu C_7 'nin spektrumunu kullanarak bulalım.

Lemma 3.1.1. ve Teorem 3.1.3. kullanılarak;

$$\begin{aligned} S(C_{14}) &= \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{13}\} \\ &= \{2, \sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_2, -\sqrt{\lambda_2 + 2}, \lambda_3, -2, \lambda_3, \\ &\quad -\sqrt{\lambda_2 + 2}, \lambda_2, -\sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_1 + 2}\} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2. P_n ve P_{2n+1} Arasında Spektral Geçiş

Şimdi ise P_n için yukarıda yaptığımız benzer uygulamaları yapalım.

P_n 'in spektrumunun,

$$S(P_n) = \left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n+1}\right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \right\}$$

olduğunu Teorem 2.2.6'dan hatırlayalım. Bundan faydalanarak hesaplamalarda kolaylık sağlayacak bir sonuç elde edilebilir:

3.2.1. Lemma. P_n 'in spektrumunda her $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$\lambda_k = -\lambda_{n+1-k}$$

olur.

İspat.

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1-k} &= 2 \cos\left(\frac{\pi(n+1-k)}{n+1}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi n + \pi}{n+1} - \frac{\pi k}{n+1}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{n+1} - \frac{\pi k}{n+1}\right) \\ &= 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi k}{n+1}\right) \\ &= -2 \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) \\ &= -\lambda_k. \end{aligned}$$

3.2.2. Örnek. $S(P_6) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}$ veriliyor. Bununla birlikte yukarıda verilen Lemma 3.2.1.'in bir sonucu olarak,

$$\lambda_1 = -\lambda_6, \quad \lambda_2 = -\lambda_5, \quad \lambda_3 = -\lambda_4$$

olur.

$n \geq 1$ olmak üzere, P_n 'in spektrumu,

$$S(P_n) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n\}$$

ve P_{2n+1} 'in spektrumu,

$$S(P_{2n+1}) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{2n}, \mu_{2n+1}\}$$

olsun.

3.2.3. Teorem. $j = 1, 2, \dots, n$ için P_{2n+1} 'in spektrumunu, P_n 'in spektrumunu kullanarak,

➤ n tek sayı iken,

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j-1} = \sqrt{\lambda_{2j-1} + 2} \quad j = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$$

ve

$$\mu_{2j-1} = -\mu_{2n-2j+3} = -\sqrt{\lambda_{2n-2j+3} + 2} \quad j = \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \dots, n+1;$$

➤ n çift iken,

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j-1} = \sqrt{\lambda_{2j-1} + 2} \quad j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$$

$$\mu_{2j-1} = -\mu_{2n-2j+3} = -\sqrt{\lambda_{2n-2j+3} + 2} \quad j = \frac{n+4}{2}, \frac{n+6}{2}, \dots, n+1$$

ve

$$\mu_{n+1} = 0$$

olmaktadır.

İspat. $S(P_n) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_n\}$ verilsin. Ayrıca

$$\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n+1}\right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

olduğundan dolayı,

$$\lambda_1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right),$$

$$\lambda_2 = 2 \cos\left(\frac{\pi 2}{n+1}\right),$$

$$\lambda_3 = 2 \cos\left(\frac{\pi 3}{n+1}\right),$$

⋮

$$\lambda_n = 2 \cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte $S(P_{2n+1}) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{2n+1}\}$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n+2}\right), \\ \mu_2 &= 2 \cos\left(\frac{\pi 2}{2n+2}\right), \\ \mu_3 &= 2 \cos\left(\frac{\pi 3}{2n+2}\right), \\ &\vdots \\ \mu_{2n+1} &= 2 \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2n+2}\right)\end{aligned}$$

olur. Buradan $\mu_{2j} = \lambda_j$ olduğu kolayca görülmektedir. Ayrıca trigonometrik yarım açı formülleri kullanılarak da $k = 2j - 1$ alındığında

$$j = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{n}{2} & n \text{ çift sayı,} \\ 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} & n \text{ tek sayı,} \end{cases}$$

için,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\pi k}{2n+2}\right) - 1 \\ \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) + 1 &= 2\cos^2\left(\frac{\pi k}{2n+2}\right) \\ 2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) + 2 &= 4\cos^2\left(\frac{\pi k}{2n+2}\right) \\ \pm \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) + 2} &= 2\cos\left(\frac{\pi k}{2n+2}\right)\end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$\mu_k = \mp \sqrt{\lambda_k + 2}$$

dir.

➤ n tek iken,

0°				90°		180°		
	μ_1	μ_3	...	μ_{n-2}	μ_n	μ_{n+2}	...	μ_{2n+1}
	μ_2	μ_4	...	μ_{n-1}	μ_{n+1}	μ_{n+3}	...	μ_{2n}
			+				-	

oluşturulan tabloda işaretler ve ispatın ilk kısmında elde ettiğimiz veriler de kullanılarak,

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j-1} = \sqrt{\lambda_{2j-1} + 2} \quad j = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$$

ve

$$\mu_{2j-1} = -\mu_{2n-2j+3} = -\sqrt{\lambda_{2n-2j+3} + 2} \quad j = \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \dots, n+1;$$

olduğu görülmektedir.

➤ n çift iken,

0°				90°		180°		
	μ_1	μ_3	...	μ_{n-1}	μ_{n+1}	μ_{n+3}	...	μ_{2n+1}
	μ_2	μ_4	...	μ_{n-2}	μ_n	μ_{n+2}	...	μ_{2n}
			+				-	

oluşturulan tabloda işaretler ve ispatın ilk kısmında elde ettiğimiz veriler de kullanılarak,

$$\mu_{2j} = \lambda_j$$

$$\mu_{2j-1} = \sqrt{\lambda_{2j-1} + 2} \quad j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$$

$$\mu_{2j-1} = -\mu_{2n-2j+3} = -\sqrt{\lambda_{2n-2j+3} + 2} \quad j = \frac{n+4}{2}, \frac{n+6}{2}, \dots, n+1$$

ve

$$\mu_{n+1} = 0$$

olduğu görülmektedir.

3.2.4.Örnek. $n = 8$ olmak üzere, P_8 'in spektrumu $\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n+1}\right)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ için $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8\}$ 'dir. P_{17} 'nin spektrumu ise $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{17}\}$ ile gösterilsin. P_{17} 'nin spektrumunu P_8 'in spektrumunu kullanarak bulalım.

Lemma 3.2.1. ve Teorem 3.2.3. kullanılarak

$$\begin{aligned} S(P_{17}) &= \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{17}\} \\ &= \{\sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_2, \sqrt{\lambda_5 + 2}, \lambda_3, \sqrt{\lambda_7 + 2}, \lambda_4, \\ &\quad 0, \lambda_5, -\sqrt{\lambda_7 + 2}, \lambda_6, -\sqrt{\lambda_5 + 2}, \\ &\quad \lambda_7, -\sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_8, -\sqrt{\lambda_1 + 2}\} \end{aligned}$$

dir. Burada istenilirse,

$$\lambda_1 = -\lambda_8, \quad \lambda_2 = -\lambda_7, \quad \lambda_3 = -\lambda_6, \quad \lambda_4 = -\lambda_5$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} S(P_{17}) &= \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{17}\} \\ &= \{\sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_2, \sqrt{-\lambda_4 + 2}, \lambda_3, \sqrt{-\lambda_2 + 2}, \lambda_4, \\ &\quad 0, -\lambda_4, -\sqrt{-\lambda_2 + 2}, \lambda_3, -\sqrt{-\lambda_4 + 2}, \\ &\quad -\lambda_2, -\sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_8, -\sqrt{\lambda_1 + 2}\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.2.5.Örnek. $n = 7$ olmak üzere, P_7 'nin spektrumu $\lambda_i = 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n+1}\right)$, $i = 1, 2, \dots, 7$ için $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7\}$ 'dir. P_{15} 'in spektrumu ise $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{15}\}$ ile gösterilsin. P_{15} 'in spektrumunu P_7 'nin spektrumunu kullanarak bulalım.

Lemma 3.2.1. ve Teorem 3.2.3. kullanılarak;

$$\begin{aligned}
S(P_{15}) &= \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{15}\} \\
&= \{\sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_2, \sqrt{\lambda_5 + 2}, \lambda_3, \sqrt{\lambda_7 + 2}, \lambda_4, \\
&\quad -\sqrt{\lambda_7 + 2}, \lambda_5, -\sqrt{\lambda_5 + 2}, \lambda_6, -\sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_7, -\sqrt{\lambda_1 + 2}\}
\end{aligned}$$

dir. Burada istenilirse,

$$\lambda_1 = -\lambda_7, \quad \lambda_2 = -\lambda_6, \quad \lambda_3 = -\lambda_5, \quad \lambda_4 = 0$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
S(P_{15}) &= \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{15}\} \\
&= \{\sqrt{\lambda_1 + 2}, \lambda_1, \sqrt{\lambda_3 + 2}, \lambda_2, \sqrt{-\lambda_3 + 2}, \lambda_3, \sqrt{-\lambda_1 + 2}, 0, \\
&\quad -\sqrt{-\lambda_1 + 2}, -\lambda_3, -\sqrt{-\lambda_3 + 2}, -\lambda_2, \\
&\quad -\sqrt{-\lambda_3 + 2}, -\lambda_1, -\sqrt{-\lambda_1 + 2}\}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

4. GRAFLARDA ENERJİ

Verilen bir grafin enerjisinin, grafin komşuluk matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerlerinin toplamı olduğunu ve bu sayının moleküler grafların bazı özelliklerini çalışmada kullanıldığını hatırlayalım. Bu özdeğerlere aynı zamanda grafin özdeğerleri de denilmektedir. Dolayısıyla G grafinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olmak üzere G 'nin enerjisi

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu tezin 2. Bölümünde literatürde en çok kullanılan bazı özel graf sınıfları için spektrumları belirlenmiş ve bu spektrumları elde etmemize yarayan spektral polinomlar bulunmuştur. Bu bölümde 2. Bölümdeki bilgilerden faydalanarak söz konusu graf türlerinin enerjileri hesaplanacaktır.

Burada C_n ve P_n graflarının özdeğerlerinin ifadeleri trigonometrik ifadeler olduğundan 3. Bölümde elde edilen bazı özelliklerden faydalanılarak C_n ve P_n graflarının enerjilerinin literatürdeki ifadelerine alternatif ifadeler bulunacak ve bunlardan faydalanılarak C_{2n} ve P_{2n} graflarının enerjileri C_n ve P_n graflarının enerjilerine bağlı olarak hesaplanacaktır.

Enerji kavramı ile ilgili olarak Adiga, Khoshbakth, Gutman, [More graphs whose energy exceeds the number of vertices, Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, **2** (2) (2007), 57-62], Gutman, [The energy of a graph, Ber. Math. Statist. Sekt. Forshungsz. Graz **103** (1978), 1-22], Nikiforov, [The energy of graphs and matrices, J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), 1472-1475] and Walikar, Ramane, Hampiholi, [On the energy of a graph, in: Balakrishnan, Mulder, Vijayakumar (Eds.), Graph Connections, Allied Publishers, New Delhi, 1999, 120-123] çalışmalarına bakılabilir.

4.1. C_n Devirli Graflarının Enerjisi

Teorem 2.2.28'de n köşeli bir C_n devirli grafinin spektrumunun

$$\left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \right\}$$

şeklinde olduğunu belirlemiştik. β birimin n . kökü olsun. Yani $\beta, \beta^n = 1$ denkleminin bir kökü olsun. $\beta^n = e^{2\pi i}$ olarak yazılabileceğinden $\beta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ olur. Buradan

$$\lambda_1 = \beta + \beta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$\lambda_2 = \beta^2 + \beta^{-2} = 2 \cos \frac{4\pi}{n}$$

$$\lambda_3 = \beta^3 + \beta^{-3} = 2 \cos \frac{6\pi}{n}$$

\vdots

$$\lambda_n = \beta^n + \beta^{-n} = 2 \cos \frac{2n\pi}{n} = 2 = \lambda_0$$

olarak $\lambda_i = 2 \cos \frac{2\pi i}{n}$ değerlerini tanımlayalım. Burada $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ için λ_i değerleri $Pol(C_n)$ 'in köklerini verir. Yani C_n devirli grafinin spektrumunun elemanlarıdır.

4.1.1. Teorem. C_n devirli grafinin enerjisi

$$E(C_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| 2 \cos \frac{2\pi i}{n} \right|$$

şeklindedir.

İspat. $\{\lambda_i \mid i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ kümesi $Pol(C_n)$ 'in özdeğerlerinin oluşturduğu küme olmak üzere, bu özdeğerler aynı zamanda yukarıda belirtildiği gibi C_n grafinin da özdeğerleridir. Burada

$$\lambda_i = \beta^i + \beta^{-i} = 2 \cos \frac{2\pi i}{n}$$

olduğundan dolayı, enerji tanımının bir sonucu olarak;

$$\begin{aligned} E(C_n) &= \left| 2\cos\frac{2\pi}{n} \right| + \left| 2\cos\frac{4\pi}{n} \right| + \left| 2\cos\frac{6\pi}{n} \right| + \dots + \left| 2\cos\frac{2n\pi}{n} \right| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| 2\cos\frac{2\pi i}{n} \right| \end{aligned}$$

dir.

Li, Shi, Gutman, [Graph Energy, 2012]'de bu değerin aynı zamanda

$$E(C_n) = \begin{cases} 4 \cot \frac{\pi}{n} & n \equiv 0(\text{mod}4) \\ 4 \csc \frac{\pi}{n} & n \equiv 2(\text{mod}4) \\ 2 \csc \frac{\pi}{2n} & n \equiv 1(\text{mod}2) \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebildiği gösterilmiştir. Burada Lemma 3.1.'den faydalanılarak n 'in tek ve çift sayı olması durumlarında C_n grafının enerjisinin yeni ifadeleri verilmiştir:

4.1.2. Lemma. $S(C_n) = \left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \right\}$ için C_n grafının enerjisi;

$$E(C_n) = \begin{cases} 2 + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} |\lambda_i| & n \text{ tek iken,} \\ 4 + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} |\lambda_i| & n \text{ çift iken} \end{cases}$$

dir.

İspat. İlk olarak n tek sayı iken C_n 'in spektrumunun

$$\left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

olduğunu hatırlayalım. Lemma 3.1.'den

$$\lambda_0=2, \lambda_1 = \lambda_{n-1}, \lambda_2 = \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_{\frac{n-1}{2}} = \lambda_{\frac{n+1}{2}}$$

olur. Dolayısıyla

$$E(C_n) = \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda_i| = 2 + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} |\lambda_i|$$

olduğu kolayca görülür.

İkinci olarak n çift sayı iken Lemma 3.1. gereği C_n 'in spektrumunda $\lambda_0=2, \lambda_1 = \lambda_{n-1}, \lambda_2 = \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_{\frac{n-2}{2}} = \lambda_{\frac{n+2}{2}}$ olur. Dolayısıyla

$$E(C_n) = \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda_i| = 4 + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} |\lambda_i|$$

olduğu kolaylıkla hesaplanır.

4.1.3.Örnek. $E(C_7) = \sum_{i=0}^6 |\lambda_i| = 2 + 2 \sum_{i=1}^3 \left| 2 \cos \frac{2\pi i}{7} \right|$

4.1.4.Örnek. $E(C_{16}) = \sum_{i=0}^{15} |\lambda_i| = 4 + 2 \sum_{i=1}^7 \left| 2 \cos \frac{2\pi i}{16} \right|$

Aslında bu özdeğerlerin Uygulamalı Matematikte oldukça sık kullanılan Dickson ve Chebycheff polinomları ile yakın ilgisi vardır. Şimdi bu ilişki ortaya konulacaktır:

$n \in \mathbb{N}$ için n . Chebycheff polinomu $T_n(x)$ ile gösterilir ve

$$T_n(x) := \cos(\text{Arccos}x)$$

veya denk olarak

$$T_n(\cos\theta) := \cos(n\theta)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $x, \theta \in R, |x| \leq 1$ 'dir. İlk birkaç Chebycheff polinomu,

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

şeklindedir.

4.1.5. Lemma. $n \in N$ için $T_n(x)$ polinomu;

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. Yukarıda görüldüğü gibi $T_n(x)$ polinomları birim başkatsayılı olmadıklarından bu polinomların normalizasyonu tanımlanır ve kullanılır:

$$\begin{aligned} A_n(x) &:= 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(n\operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= 2\cos n\theta. \end{aligned}$$

Burada $x = A_1(x) = 2\cos\theta$, $x, \theta \in R, |x| \leq 2, n \in N$ 'dir. Amacımıza uygun olarak $\theta = \frac{\pi}{n}$ alınırsa $x = 2\cos\frac{\pi}{n}$ ve $A_{2k}(x)$ 'de $\mu_n = 2\cos\frac{\pi}{n}$ 'nin bir polinomu olur. Aslında

$$\begin{aligned} A(\mu_n) &= 2\cos\frac{2\pi k}{n} \\ &= \beta^k + \beta^{-k} \\ &= e^{\frac{2\pi ik}{n}} + e^{-\frac{2\pi ik}{n}} \end{aligned}$$

olur. Yani C_n devir grafının özdeğerleri

$$\lambda_1 = A_2(\mu_n)$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= A_4(\mu_n) \\ &\vdots \\ \lambda_n &= \lambda_0 = A_{2n}(\mu_n)\end{aligned}$$

olmaktadır.

4.2. P_n Yol Graflarının Enerjisi

Teorem 2.2.6'da n köşeli bir P_n yol grafinin spektrumunun

$$\left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos \left(\frac{\pi i}{n+1} \right), i = 1, 2, 3, \dots, n \right\}$$

şeklinde olduğunu belirlemiştik. Buradan hareketle enerji tanımını da göz önünde bulundurursak yol grafinin enerji bağıntısını yazabiliriz;

4.2.1. Teorem. P_n yol grafinin enerjisi

$$E(P_n) = \sum_{i=1}^n \left| 2 \cos \frac{\pi i}{n+1} \right|$$

İspat. $\{ \lambda_i \mid i = 1, 2, 3, \dots, n \}$ kümesi $Pol(P_n)$ 'in özdeğerlerinin oluşturduğu küme olmak üzere, bu özdeğerler aynı zamanda yukarıda belirtildiği gibi P_n grafinin da özdeğerleridir. Enerji tanımının bir sonucu olarak;

$$\begin{aligned}E(P_n) &= \left| 2 \cos \frac{\pi}{n+1} \right| + \left| 2 \cos \frac{2\pi}{n+1} \right| + \left| 2 \cos \frac{3\pi}{n+1} \right| + \dots + \left| 2 \cos \frac{n\pi}{n+1} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| 2 \cos \frac{\pi i}{n+1} \right|\end{aligned}$$

dir.

4.2.2. Lemma. $S(P_n) = \left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos \left(\frac{\pi i}{n+1} \right), i = 1, 2, 3, \dots, n \right\}$ için P_n grafinin enerjisi;

$$E(P_n) = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} |\lambda_i| & n \text{ tek iken,} \\ 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |\lambda_i| & n \text{ çift iken} \end{cases}$$

dir.

İspat. İlk olarak n tek sayı iken P_n 'in spektrumunun

$$\left\{ \lambda_i : \lambda_i = 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n+1}\right), \quad i = 1, \dots, n \right\}.$$

olduğunu hatırlayalım. Lemma 3.9.'dan

$$\lambda_1 = -\lambda_n, \lambda_2 = \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_{\frac{n-1}{2}} = \lambda_{\frac{n+3}{2}} \text{ ve } \lambda_{\frac{n+1}{2}} = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$E(P_n) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} |\lambda_i|$$

olduğu kolayca görülür.

İkinci olarak n çift sayı iken Lemma 3.9. gereği P_n 'in spektrumunda

$$\lambda_1 = -\lambda_n, \lambda_2 = \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_{\frac{n}{2}} = \lambda_{\frac{n+2}{2}}$$

olur. Buradan da

$$E(P_n) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |\lambda_i|$$

olduğu kolaylıkla hesaplanır.

4.2.3.Örnek. $E(P_7) = \sum_{i=1}^7 |\lambda_i| = 2 \sum_{i=1}^3 \left| 2 \cos \frac{\pi i}{8} \right|$

4.2.4.Örnek. $E(P_{16}) = \sum_{i=1}^{16} |\lambda_i| = 2 \sum_{i=1}^8 \left| 2 \cos \frac{\pi i}{17} \right|$

4.3. K_n Tam Graflarının Enerjisi

Sonuç 2.2.12’de K_n grafi için indirgeme bağıntısı hesaplanmış olup ardından ise K_n tam grafinin özdeğerlerini veren polinomun kökleri hesaplanmıştır. K_n grafinin özdeğerleri $n - 1, -1^{(n-1)}$ olarak bulunmuştur. Elde edilen bu özdeğerlerin mutlak değerleri alınarak toplandığında ise K_n grafinin enerjisi hesaplanmış olur.

4.3.1. Teorem. K_n tam grafinin enerjisi

$$E(K_n) = 2 \cdot (n - 1)$$

şeklindedir.

4.3.2. Örnek. $E(K_8) = 2 \cdot (8 - 1) = 14$

4.4. S_n Yıldız Graflarının Enerjisi

Teorem 2.2.17’de S_n yıldız grafi için indirgeme bağıntısı elde edilmiş ve S_n grafinin özdeğerlerini veren polinomun kökleri hesaplandığında köklerin $0^{(n-2)}, \pm\sqrt{n-1}$ olduğu bulunmuştur. Bu verileri ve enerji tanımını kullanarak S_n grafinin enerjisi kolaylıkla hesaplanabilir.

4.4.1. Teorem. S_n yıldız grafinin enerjisi

$$E(S_n) = 2 \cdot \left| \sqrt{n-1} \right|$$

şeklindedir.

4.4.2. Örnek. $E(S_5) = 2 \cdot \left| \sqrt{5-1} \right| = 4$ olur.

4.5. $K_{m,n}$ İki Parçalı Graflarının Enerjisi

Teorem 2.2.24 de $K_{m,n}$ iki parçalı grafinin indirgeme bağıntısı elde edilmiş ve $K_{m,n}$ grafinin özdeğerleri $0^{(n-2)}, \pm\sqrt{mn}$ olarak bulunmuştur. Elde edilen bu özdeğerleri ve enerji tanımını kullanarak $K_{m,n}$ 'nin enerjisi kolaylıkla hesaplanabilir.

4.5.1. Teorem. $K_{m,n}$ iki parçalı grafinin enerjisi

$$E(K_{m,n}) = 2 \cdot |\sqrt{mn}|$$

şeklindedir.

4.5.2. Örnek. $E(K_{4,9}) = 2 \cdot |\sqrt{4 \cdot 9}| = 12$ olur.

KAYNAKLAR

Adiga, C., Khoshbakht, Z., Gutman, I., 2007. More graphs whose energy exceeds the number of vertices, Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, **2(2)**, 57-62.

Aldous, J.M., Wilson, R.J. 2004. Graphs and Applications, The Open University, UK
Cvetkovic, D., Doob, M., Sachs, H.: Spectra of Graphs – Theory and applications. (Third edn) Heidelberg: Johann Ambrosius Barth 1995.

Balakrishnan, R., Ranganathan, K. 2012. A Textbook of Graph Theory (Second Edition). Springer, New York.

Berge, C., 2001. The Theory Of Graphs, Fletcher&Son Ltd., UK.

Biggs, N.L., Lloyd, E.K., Wilson, R.J. 1986. Graph Theory 1736-1936. Oxford University Press, London.

Bollobas, B., 1998. Graduate Texts in Mathematics, Modern Graph Theory, Springer, New York.

Bondy, J.A., Murty, U.S.R. 2008. Graph Theory, Springer, New York.

Brouwer, A. E., Haemers, W. H., 2012. Spectra of Graphs. Springer, New York.

Chen, W., 1976. Applied Graph Theory, North-Holland Publishing Company, New York.

Foulds, L.R. 1992. Graph Theory Applications. Springer, New York.

Golumbic, M.C., Hartman, I.B., 2005. Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, Springer, New York.

Gutman, I., 1978. The energy of a graph Ber. Math. Statist. Sect. Forshungsz. Graz **103**, 1–22.

Harary, F. 1994. Graph Theory. Addison-Wesley, USA.

Harris, J. M., Hirst, J. L., Mossinghoff, M. J., 2008. Combinatorics and Graph Theory. Springer, New York.

Li, X., Shi, Y., Gutman, I., 2012. Graph Energy. Springer, New York.

Nikiforov, V., 2007. The energy of graphs and matrices, J. Math. Anal. Appl. **326** 1472-1475.

Walikar, H. B., Ramane, H. S., Hampiholi, P. R., 1999. On the energy of a graph, in: R. Balakrishnan, H. M. Mulder, A. Vijayakumar (Eds.), Graph Connections, Allied Publishers, New Delhi, pp. 120-123.

West, D.B. 1996. Introduction to Graph Theory. Upper Saddle River, Prentice Hall.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Feriha ÇELİK
Doğum Yeri ve Tarihi : Yıldırım/BURSA, 24/07/1988
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Bursa Erkek Lisesi, 2002-2006
Lisans : Hacettepe Üniversitesi, 2006-2011
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi, 2013-...

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Milli Eğitim Bakanlığı 2012-...
İletişim (e-posta) : feriha_celik@hotmail.com