



---

---

# Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi

---

---

<http://kutuphane.uludag.edu.tr/Univder/uufader.htm>

## Matematiksel Nesnelerin Yapısı ve Temsiller: Klasik Semiyotik Üçgenin Geometri Öğretimine Yansımalarının Analizi

Menekşe Seden TAPAN-BROUTIN

*Uludağ Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü  
tapan@uludag.edu.tr*

### ÖZET

Bu çalışmanın temel amacı çizimler ve matematiksel nesnelere arasındaki ilişkileri incelemeyi sağlayan *Gönderge-Gösteren-Gösterilen* klasik semiyotik üçgenini temel alan kuramsal çerçeveyi tanıtmaktır. Bu amaca ulaşmak için, sınıf öğretmeni adaylarına çembere dışındaki bir noktadan teğet çizimi kağıt-kalem ve dinamik geometri ortamlarında yaptırılmıştır. Bu çizimler esnasında, öğretmen adaylarının *gösterende* oluşan değişimleri yorumlama süreçleri ve bu değişimlerin *gösterilene* olan katkısı, *gönderge* ve *gösterilen* arasındaki ilişkiler bağlamında incelenmiştir. Çalışma nitel bir araştırmadır ve uygulama kısmı iki aşamadan oluşmaktadır. İlk olarak öğretmen adayları çembere dışındaki bir noktadan teğet çizme çalışmasını kağıt-kalem ortamında, daha sonra aynı etkinliği dinamik geometri ortamında yapmışlardır. Kağıt-kalem ile yapılan çizimlerde öğretmen adaylarının görsel eleman kullanarak çizim yaptıkları, dinamik geometri ortamında yapılan çizimlerde ise geometrik özellik arayışına girdikleri görülmüştür. Araştırmanın sonucunda, bir *gösteren* olarak kağıt-kalem ortamında çizimlerin yetersiz kaldığı, dinamik çizimlerin ise çemberde teğet kavramının *gösterilene* ilgili *göndergeye* yaklaşma sağladığı sonucuna varılmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Gönderge – Gösteren – Gösterilen, semiyotik temsiller, dinamik geometri, geometrik şekil, çizim.

# Essence of Mathematical Objects and their Representations: Analyses of the Classical Semiotic Triangle's Implications in Geometry

## ABSTRACT

The main purpose of this study is to introduce a theoretical framework based on classical semiotic triangle Reference-Signifier-Signified. This theoretical framework is used to examine the relationship between drawings and mathematical objects. In the study, prospective teachers are placed in a transition from drawings towards dynamic drawings. Their process of interpreting variations in a geometrical object's signifier in a dynamic geometry environment; changes in their signified are analyzed in terms of relations between reference and signifier. The study is a qualitative research and the experimental part consists of two times. In the first time, realized in paper and pencil environment, geometrical drawing activities concerning the concept tangent line to a circle is directed to prospective teachers. In the second time, prospective teachers is asked to realize the same drawing activities in a dynamic geometry environment. Results of the research reveal that as signifiers, drawings in paper and pencil environment are insufficient; but working on dynamic drawings provides rapprochements in the signified of the tangent line concept towards the related reference.

**Key Words:** Reference-Signifier-Signified, semiotic representations, dynamic geometry, geometrical figure, drawing.

## GİRİŞ

Matematik bilimi; sayı, nokta, üçgen gibi soyut nesnelere ve bu tür nesnelere arasındaki ilişkiler üzerine yoğunlaşır. Matematikteki bu soyut kavramlar üzerinde akıl yürütebilmek ve işlemler yapabilmek için belli derecelerde somutlaştırmalara ihtiyaç vardır. Diğer bir deyişle, matematiksel nesnelere temelde soyut nesnelere olmalarından ötürü bu nesnelere ancak temsiller aracılığıyla kullanılabilirler. Duval (2000), bu durumu matematiksel nesnelere paradoksal doğası olarak isimlendirmektedir: “Matematik bilgi ile astronomi, fizik, biyoloji ya da botanik gibi diğer bilimlerdeki bilgi arasında önemli bir uçurum bulunmaktadır. Matematiksel nesnelere mikroskopla inceleyemez veya resimlerini çekip üzerlerinde çalışamayız. Matematiksel nesnelere işlem yapabilmenin tek yolu işaretler, kelimeler, semboller veya ifadeler kullanmak ya da çizimler yapmaktır; fakat matematiksel nesnelere, kullanılan bu semiyotik temsiller ile karıştırılmamalıdır” (Duval, 2000).

Matematiksel soyut kavramları somutlaştırmak için yapılan her girişim, bu kavramların doğasına aykırı bir işlem olarak düşünülebilir. Matematiksel kavramları somutlaştırmanın, bu soyut kavramların doğasına aykırı olması fikri M.Ö. 3. yüzyılda stoacılar tarafından ele alınmıştır. Anton ve diğerleri (1984)'un belirttiği üzere, Platon'a göre problemlerin matematik düşünce ile çözümü ispata dayalıdır ve geometride kullanılan grafik temsiller kusurlu ve yetersiz yapıdadırlar. Dahan (2005)'in de belirttiği üzere, stoacıların bu yaklaşımı, öncelikle bir bilim olarak matematiği ve tarihteki matematikçileri, daha sonra da matematik öğretimini etkilemiştir.

Her ne kadar öğretilen matematik teorik nesnelere temel olsa da, matematik öğretiminde, geometrik nesnelere gösterimi için çizim adı verilen temsillerin kullanımı kaçınılmazdır. Çizimlerin öğretimde kullanımı ile birlikte oluşan, öğrencilerin kullanılan bu çizimleri yorumlama sorunları yıllardan beri pek çok eğitim araştırmasının konusu olmuştur (Steinbring, 1988; Laborde, 1994; Houdement & Kuzniak, 2006; Schneider, 2012; Rigaut, 2013). Bu araştırmalar farklı köken ve kuramsal çerçevelere dayanmaktadır. Bu çalışmada, temelde, çizim ve matematiksel nesne arasındaki ilişkileri incelemeyi sağlayan bir kuramsal çerçeveyi tanıtmak hedeflenmektedir. Bu kuramsal çerçeve, nesnelere, nesnelere temsilleri ve temsillerin bireylerde oluşturduğu kavramların ilişkilerini incelemek için kullanılan ve Gönderge-Gösteren-Gösterilen (Reference-Signifier-Signified) üçlüsü ile tanımlanan klasik semiyotik üçgeni (de Saussure, 1916; Pierce, 1978; Vergnaud, 1994) esas almaktadır. Çizimler ve matematiksel soyut nesnelere arasındaki ilişkilerin ayrıntılı incelenmesi, bir yandan öğretmen ve öğretmen adaylarının, geometrik kavramların öğretimi ile ilgili dersleri daha etkili hazırlamaları için önem taşımaktadır. Diğer yandan ise öğrencilerin kavramları yapılandırma süreçlerinin ve bu süreçteki engellerinin nedenlerinin ortaya çıkarılması açısından önemlidir. Bu araştırmada, öğretmen adaylarının çizimler ve matematiksel nesnelere arasındaki farkları yorumlama süreçleri, dinamik geometri ortamlarının çizimlere olan katkısı kullanılarak, temel semiyotik üçgen çerçevesinde incelenmiştir.

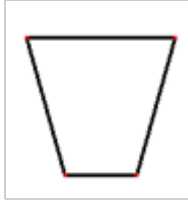
## **Çizim ve Geometrik Şekil Kavramları**

Bir matematik nesne ve bu nesneyle bağlantılı çizimler arasındaki ilişkiler bütünü geometrik şekil olarak isimlendirilir. Bu ilişkilerin yapılandırılması kendiliğinden ve anlık olarak gerçekleşemez; öğrenme gerektirir. Matematik öğretiminde öğrencilerin, çizimin geometrik özelliklerini analiz ederek çözüm üretmelerini sağlayacak problemlerle

karşılaştırılmaları bu öğrenmelerin gerçekleşmesi için etkili bir yöntemdir (Laborde & Capponi, 1994).

Çizim ve geometrik şekil arasındaki ilişki, genel olarak, geometrik nesnenin özelliklerinin grafiksel olarak mekânsal ilişkilerle yansıtılması gerçeği ile karakterize edilebilir; ancak, çizim ve geometrik nesne arasındaki ilişkinin karmaşıklığını vurgulamak önemlidir. Öncelikle, bir geometrik çizim herkes tarafından geometrik bir nesneye gönderme yapacak şekilde yorumlanmayabilir. Öyle ki; bir yandan çizim ile karşılaşan kişinin bilgisine bağlı olarak farklı yorumlamalar yapılabilir, diğer yandan çizimin doğası gereği çizimler tek başına geometrik bir nesneyi karakterize edecek nitelikte değildirler. Bu durumda vurgulanması gereken ikinci önemli nokta, aynı geometrik nesnenin göstereni olan bir çizim için pek çok farklı yorumun yapılabileceği hususudur.

Bir çizim, çizime bakan kişinin kararı ölçüsünde matematiğin teorik nesnelere ile ilişkilendirilebilir; ayrıca çizimin yorumlanması çizimi yorumlayan kişinin tercih edeceği matematik teorisi ve matematik bilgisine göre farklılık gösterecektir. Ek olarak, içinde bulunulan bağlam, bir çizimin nasıl yorumlanacağı konusunda belirleyici rol oynar.



**Şekil 1.** Yamuk – bardak çizimi

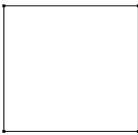
Örneğin, Şekil 1’de görülen çizim bir yamuk – hatta bir ikizkenar yamuk – olarak yorumlanabileceken aynı zamanda bir bardak, saksı veya vazo olarak da yorumlanabilir. Diğer yandan, bir çizim, matematik bir bağlam dâhilinde dahi, çok farklı yorumlamalara yol açabilir. Örneğin, **X** çizimi, aritmetikte çarpı olarak yorumlanırken, geometride kesişen iki doğru (nokta) olarak yorumlanır.

Özellikle, çizim üzerinde çalışan kişinin teorik matematik bilgisi yeterli değilse, çizime ilk baktığındaki algısal yorumlamayı aşamama durumu ile karşı karşıya kalınabilir. Böylece, bir çizimin algısal özellikleri çizimin geometrik yorumunu olumlu ya da olumsuz yönde etkileyebilir (Duval & Godin, 2005). Duval (1994) bir çizimin yorumlanması ve üzerinde

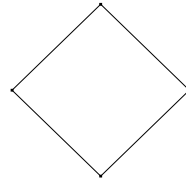
matematik işlemler yapılmasının şeklin farklı kavrayış türlerinden (algısal, işlevsel, sıralı, söylemsel) doğrudan etkilendiğini belirtmiştir. Bu kavrayış türlerinden söylemsel kavrayış ile algısal kavrayışın birbirlerine zıt iki kavrayış türü olduğu söylenebilir. Algısal kavrayışta, yönergenin göz ardı edilip tamamen çizime bağlı kalınması söz konusu iken söylemsel kavrayışta çizimden bağımsız olarak şeklin geometrik özelliklerinin tümdengelimli açıklaması söz konusu olmaktadır. “Şeklin söylemsel kavrayışı, şekil üzerinde işaretleme ya da yönergedeki varsayımlar ile belirtilen geometrik özellikleri kullanarak şeklin başka geometrik özelliklerinin ortaya çıkarılmasına karşılık gelmektedir ve bu işleyiş tümdengelimlidir” (Duval, 1994, s. 124).

Diğer yandan, prototip çizimler de (Noirfalaise, 1991) bir çizimin yorumlanmasında önem teşkil eder. Prototip çizimler, algısal, kültürel ve öğretimsel etkenler sonucunda ortaya çıkmaktadır. Prototip kelime olarak ilk örnek, model anlamlarına karşılık gelmektedir ve belirli bir kategoride ele alınabilecek herhangi bir somut nesne, varlık veya olgunun geri kalanlar için örnek teşkil edebilme özelliğine sahip ilk ve en ilkel türevi olarak açıklanmaktadır.

Böylece prototip çizim, bir geometrik şeklin en alışılmış (tipik) modeli olan çizim olarak tanımlanabilir. Örneğin, prototip olarak çizilen bir kare ne çok büyük ne çok küçük, kenarları yataya ve düşeye paralel bir kare çizimidir (Şekil 2). Kenarları yataya ve düşeye paralel olmayan Şekil 3’teki gibi bir çizimin kare olarak algılanması daha güç olacaktır; bu çizim daha çok eşkenar dörtgen olarak algılanacaktır ki prototip eşkenar dörtgen çizimine daha yakın bir çizimdir.



**Şekil 2.** Prototip kare çizimi



**Şekil 3.** Prototip eşkenar dörtgen çizimine yakın kare çizimi

Prototip çizimler, geometrik şekiller üzerinde muhakeme etmeyi sağlarken, pek çok yanlış genellemeye ve doğru bilgiye ulaşmada engellere yol açabilirler. Örneğin; eşkenar üçgen çizimine yakın olan prototip üçgen çizimi geniş açılı üçgenlerin tanınmasında ve bu üçgenlerle çalışılmasında;

köşegeni bir kenarına dik olan prototip paralelkenar çizimi dikdörtgenin ve karenin birer paralelkenar olarak algılanmalarında; uzun ve kısa kenar oranları altın orana yakın olan prototip dikdörtgen çizimi “ince-uzun” bir dikdörtgen çiziminin dikdörtgen olarak kabul görmesinde engel teşkil eder (Brousseau, 1995; Laborde, 2003).

Yukarıda bahsi geçen pek çok etmen, öğrenmelere bağlı olarak olumlu ya da olumsuz yönde çizimlerin geometrik yorumlanmasına etki eder. Aslında Duval (1988) ve Parzys (1988)’in de belirttikleri üzere, matematik bir nesnenin göstereni olarak çizimler bu matematik nesneyi tam anlamıyla temsil etmek için yetersiz kalmaktadırlar. Her çizim için bir “işlem alanı” tanımlanabilir; bu işlem alanı çizimin uzamsal özellikleri tarafından temsil edilen bazı geometrik özelliklerin kümesidir. Çizimdeki eksiklikleri gidermek için çizimin yanında ilgili geometrik nesneyi karakterize eden söylemsel bir açıklamaya ya da çizim üzerinde yapılan kodlamalara da ihtiyaç vardır. Diğer yandan, her çizim için bir “yorumlama alanı” söz konusudur; bu yorumlama alanı çizimin geometrik özellik olarak yorumlanabilecek uzamsal özelliklerinin kümesidir. Örneğin, düzlem geometrinin göstereni olan bir çizimin, kağıt üzerindeki konumu o çizimin yorumlama alanı dışında kalır.

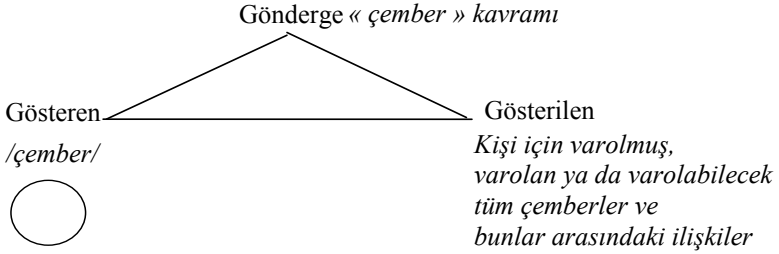
### **Gönderge – Gösteren – Gösterilen Üçlüsü Açısından Çizim ve Geometrik Şekil Kavramları**

Çizim ve geometrik şekil arasındaki farkı incelemek için Gönderge–Gösteren–Gösterilen (Reference–Signifier–Signified) üçlüsü ile tanımlanan klasik semiyotik üçgeni (de Saussure, 1916; Pierce, 1978; Vergnaud, 1994) kullanmak mümkündür.

Fiziksel bir varlık olarak çizim, bir teorik göndergenin göstereni olarak temsil edilebilir. Buradaki teorik gönderge, Öklid geometrisi, analitik geometri, analiz gibi bir matematik teorinin nesnelere birisidir. Geometrik şekil, verilen bir matematiksel nesnenin (göndergenin) tüm çizimleri (gösterenleri) ile eşleşmesinden ibarettir. Böylece geometrik şekil iki bileşenden oluşur: Birinci bileşen göndergedir; ikincisi ise göndergeyi temsil eden çizimlerden bir tanesidir ki bu bileşen göndergenin olası bütün çizimlerinin kümesinden alınan bir elemandır.

Bu bağlamda, ‘geometrik şekil’ terminolojisi, geometrik bir nesne ile çizimi inceleyen veya çizimi gerçekleştiren kişinin oluşturduğu kavramlar (conceptions) arasındaki ilişkinin kurulması anlamına gelir. Bir çizim ile ilgili, kişi tarafından oluşturulan bu kavramlar bütünü, bu kişi için ilgili geometrik şeklin gösterileni olarak ifade edilir (Laborde & Capponi, 1994).

Bu durum aşağıda basit bir örnekle açıklanmıştır:



**Şekil 4.** Klasik Semiyotik Üçgen

“Gönderge”, üçgen kavramı, sayı kavramı, çember kavramı gibi matematiksel teorik nesnelere. “Gösterilen”, teorik nesneye gönderme yapıldığında zihinde oluşan kavram olarak tanımlanabilir. Başka bir deyişle, çember kavramı ele alındığında, soyut bir çember nesnesine gönderme yapılır. Oysaki her bireyin zihninde oluşturduğu çember kavramı birbirinden farklı olacağı gibi bu bireylerin zihinlerinde oluşturdukları çember kavramı da matematiksel soyut çember kavramından çok farklı olabilir. Bu farklılıklar bireylerin bilgi düzeylerine göre çok fazla ya da az olabilir. “Gösteren” ise gönderme yapılan teorik kavramı temsil eden somut nesnedir. Örneğin, çember kavramından bahsederken çizilmiş bulunan çember çizimi ya da /çember/ kelimesi matematiksel teorik bir çember kavramını temsil etmektedir.

Kişi, herhangi bir kavrama ait göstereni gördüğünde zihninde o kavram ile ilgili hiç bir gösterilen oluşmuyor ise, kişi o kavramı tanımıyor demektir. Örneğin ilkökul seviyesinde bir öğrenci,  $\sqrt{\quad}$  sembolünü gördüğünde bu sembol onun için matematiksel olarak bir şey ifade etmeyecektir. Başka bir deyişle bu öğrenci için  $\sqrt{\quad}$  kavramına ait matematik gösterilen oluşmamakta ve öğrenci bu kavramı matematik dâhilinde tanımamaktadır. Bir kişinin matematiksel bir kavram ile ilgili temsili gördüğünde zihninde oluşan gösterilen ile o kavram arasındaki uzaklık ne kadar az ise, kişisel bilgi ile matematik bilgi o kadar yakındır.

Bu durumun matematik öğretimindeki yansımalarına bakılacak olursa; iki kişi (öğretmen ile öğrencisi) aynı gösteren üzerinde çalışıp, aynı kavrama ait temsili kullanıp (kelime, sembol ya da çizim) zihinlerinde farklı gösterilenler barındırabilirler. Bunun sonucu olarak, bu iki kişi aynı matematiksel kavram üzerinde ve aynı temsilleri kullanarak iletişim kuruyor

gibi görüneler de, zihinlerinde var olan farklı iki gösterilenden dolayı kurmuş gibi göründükleri iletişimde ciddi kopuklukların olması kaçınılmazdır. Çizim ve geometrik şekil arasındaki ilişkilerin öğretmenler tarafından göz ardı edilmesi, öğretmen ve öğrenci iletişiminde kopukluklara; öğretmenlerin öğrenci güçlük ve hatalarının temelini inememelerine sebep olacaktır.

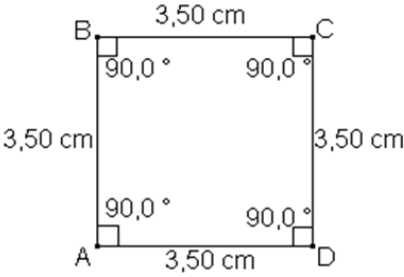
Kağıt-kalem ortamının yanı sıra, çizim ve geometrik şekil arasındaki ayrım ve ilişkilere farklı bir boyut katan bir başka ortamda dinamik geometri ortamıdır.

### **Dinamik Geometri Yazılımlarında Çizimler**

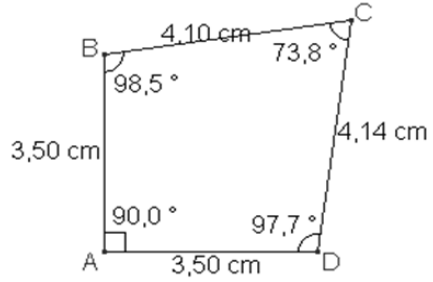
Dinamik geometri, çizim ile geometrik şekil arasındaki ilişkileri – yani görsel ve matematiksel arasındaki farkları – derinden etkileyebilecek ortamlar sunmaktadır (Tapan Broutin, 2010a). Dinamik geometri yazılımları bilgisayar ekranında geometrik çizimlerin gerçekleştirilmesini sağlayan ortamlardır. Bu ortamların “semiyotik temsil yazmaçları” (semiotic register of representation) (Duval, 1993) kağıt-kalem ortamlarınıninkine göre farklılıklar gösterebilir. Dinamik geometri ortamlarındaki çizimler, sürüklenme esnasında geometrik özelliklerin korunması açısından farklı türden çizimler olarak düşünülebilir. Dinamik çizimlerin yazmacı dâhilinde gerçekleştirilen eylemlerin farklı bir doğası vardır (Laborde, 2004). Dinamik geometri ile gerçekleştirilen oluşumlar birer çizim olarak görülmemelidir. Bu gösterenler, temsil ettikleri göndergenin matematik özelliklerini taşımaları ve oluşumun öğeleri hareket ettirildiğinde taşıdıkları geometrik özellikleri korumalıdır.

Şekil 5.1 karenin bir gösterenidir. Karenin kenarlarının ve açılarının eşit olduğunu göstermek için bir dinamik geometri yazılımı olan Cabri Geometri'nin ölçüm araçları kullanılmıştır. Şekil 5.1'deki çizim karenin geometrik özelliklerine sahipmiş gibi görünmesine rağmen, oluşumun öğeleri hareket ettirildiğinde bu geometrik özellikler geçerliliğini korumamaktadır (Şekil 5.2). Bunun sebebi, çizim gerçekleştirilirken kareyi kare yapan hiçbir geometrik özelliğin kullanılmamış olması ve kenarların eşitliği, açılarının dikliğinin ekrandaki pikseller kullanılarak ayarlanmış olmasıdır.



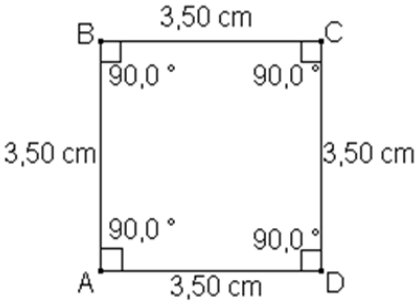


Şekil 5.1. Karenin göstereni olarak çizim

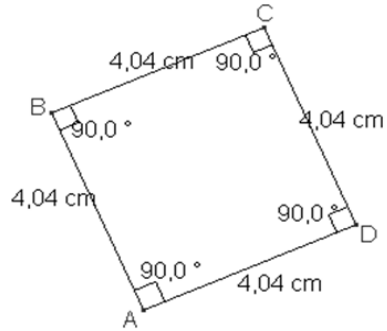


Şekil 5.2. Çizim hareketten sonraki durumu

Yukarıdaki örneğin tersine, Şekil 6.1’de kağıt-kalem ortamında karenin bir göstereni olarak yorumlanabilecek başka bir çizim görülmektedir. Oluşumun öğeleri hareket ettirildiğinde gözlemlenen geometrik özellikler geçerliliğini korumakta ve çizim bir kare olarak kalmaktadır (Şekil 6.2); çünkü çizim geometrik özellikler kullanılarak gerçekleştirilmiştir.



Şekil 6.1. Karenin göstereni olarak dinamik çizim



Şekil 6.2. Dinamik çizimin hareketten sonraki durumu

Şekil 5.1’deki çizimden farklı olarak, Şekil 6.1’deki karenin göstereninin bir kenar uzunluğu değiştirilse dahi, diğer kenarların uzunlukları da buna bağlı olarak değişmekte ve “dört kenarın uzunluklarının birbirine eşit olma” özelliği korunmaktadır. Ekranda gerçekleştirilen bir “çizim”, kenar uzunlukları ve açıların eşitliği gibi bazı özellikleri sadece taşıyormuş gibi görünür. Oysaki oluşturulan bir “dinamik çizim” söz konusu

özellikleri taşır ve dinamik çizimin öğeleri nasıl hareket ettirilirse ettirilsin taşıdığı geometrik özellikleri korur.

Böylece dinamik geometri ortamları, geometrinin teorik nesnelere ile ilgili olarak, dinamik çizimin hareketinin geometrik bir teori dâhilinde kontrol edildiği, daha geniş bir işlem alanına sahiptir ve yorumlama alanının sınırlarının daha net hale geldiği bir gösteren sistemi sunar. Dinamik geometri ortamları, geometrik nesnelere öğelerinin değişkenliğini ve bu öğelerin değişim aralığını (işlem alanının genişlemesi) açığa çıkarır; gönderge ile tutarsızlık oluşturan yorumlamaların reddini sağlar (yorumlama alanının sınırlarının belirginleşmesi). Aslında, statik bir çizim üzerinden okunarak göndergesi olan bir geometrik nesneye aitmiş gibi yorumlanan özelliklerin, çizim hareket ettirildiğinde geçersiz olma ihtimalleri çok fazladır. Bu nedenle, dinamik geometri ortamları tarafından sağlanan grafiksel temsiller (geometrik nesnelere gösterenleri) ile kağıt-kalem ortamındaki çizimler farklıdır; bu fark “dinamik çizim” ve “çizim” terimleri ile belirlenmektedir.

Geometrik şekil, çizim ve dinamik çizim kavramları, soyut matematik nesnelere tümü için ve bireyden birey farklılık göstermektedir. Bu kavramlar arasındaki ilişkilerin açık bir şekilde ortaya çıktığı matematik nesnelere birisi çembere teğet kavramıdır. Çünkü çembere teğet kavramı basit bir gösterene sahiptir. Bu gösteren çembere tek bir noktada değen doğru olarak düşünülebilir. Böylece çembere teğet doğrusunu görsel olarak tanımak ve bu kavram ile ilgili gösterilen oluşturmak güçlük teşkil etmemektedir. Oysaki Öklid geometrisinde çembere teğeti sadece ‘çembere değme’ özelliğini kullanarak çizmek yanlış bir çizim yöntemidir. Bu çizimi gerçekleştirmek için teğet doğrunun yarıçapa diklik özelliği gibi bir geometrik özellik kullanmak gereklidir. Çünkü düzlemde bir doğru tanımlamak için tek bir nokta (değme noktası) yeterli değildir. Bu çerçevede, çembere teğet kavramının kağıt kalem ortamındaki göstereni ile dinamik geometri ortamındaki göstereninde farklılıklar vardır. Buna bağlı olarak çembere teğet kavramının gösterilenleri de matematik nesneye göre farklılıklar gösterecektir. Bu sebepten ötürü, çembere teğet kavramı, öğretmen adaylarının, çizim ve matematik soyut nesne arasındaki farklar ve ilişkilerin farkına varabilmeleri için uygun bir örnektir.

Bu bağlamda, çalışmanın amacı sınıf öğretmeni adaylarının çizimlerden dinamik çizimlere geçiş aşamasında bir geometrik nesnenin, dinamik geometri ortamında göstereninde oluşan değişimleri yorumlama süreçlerini incelemek ve bu süreçte gösterilenlerdeki değişimleri, gönderge

ve gösteren arasındaki ilişkiler bağlamında açıklamaktır. Bu amaçla aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. Sınıf öğretmeni adaylarının, kağıt kalem ortamındaki çizimlerde, çembere teğet kavramına ait gösterilenleri nedir?

2. Dinamik geometri ortamında gösterilenlerdeki değişimler, gönderge ve gösteren arasındaki ilişkiler bağlamında ne şekilde ortaya çıkmaktadır?

Araştırmanın, matematik nesnelere soyut yapısı ve bunların somut temsilleri arasındaki ilişkiler açısından öğretmen adayları ve öğretmenlerde farkındalık yaratmak; geometri öğretiminde çizimler ve dinamik çizimlerin ait oldukları matematik nesnelere yönelik öğrenmelere etkisini ortaya çıkarmak açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Diğer yandan, çizim-geometrik nesne arasındaki ilişkileri incelemek için klasik semiyotik üçgenin bir kuramsal çerçeve olarak matematik eğitiminde uygulamaya yönelik bir çalışmada kullanılması da araştırmaya önem kazandırmaktadır.

## YÖNTEM

Araştırmanın Deseni: Çalışmada, çalışılan durum içinde olay ve olguları yakından izlemek, derinlemesine betimlemek ve yorumlamak için nitel araştırma yöntemi tercih edilmiştir (Çepni, 2005; Yıldırım & Şimşek, 2004). Araştırma durum çalışması olarak desenlenmiştir.

Çalışma grubu: Araştırma Marmara bölgesinde bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği programı 3. sınıfında öğrenim gören sınıf öğretmeni adayları ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın uygulama kısmı iki bölümden oluşmaktadır. Araştırmanın ilk bölümü 78 sınıf öğretmeni adayı ile ikinci bölümü ise 6 sınıf öğretmeni adayı ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın ilk bölümündeki öğretmen adayları "Matematik Öğretimi" dersi kapsamında, gönüllülük esasına göre seçilmiştir. İkinci bölümdeki 6 öğretmen adayının seçiminde araştırmaya katılmaya gönüllü olmaları, birinci uygulamaya katılmış olmaları ve iki uygulama arasında verilen eğitimi almış olmaları göz önüne alınmıştır.

Veri toplama Araçları: Araştırmanın ilk bölümünde 78 öğretmen adayına iki aşamadan oluşan bir geometrik çizim etkinliği (bir sonraki paragrafta ayrıntılı olarak tanıtılan Tanjant doğrusu etkinliği) kağıt-kalem ortamında yöneltilmiştir. Öğretmen adayları önce, istenen geometrik çizimi yapmışlar ve daha sonra çizimi nasıl yaptıklarını açıklamışlardır. Öğretmen

adaylarının cevap kağıtları araştırmanın ilk bölümünün verilerini oluşturmuştur.

Kağıt-kalem ortamındaki ilk uygulamanın ardından, öğretmen adaylarına bir dinamik geometri yazılımı olan Cabri Geometri'nin temel kullanımı üzerine öğretim verilmiştir. İki saat süren bu öğretim esnasında Cabri'nin menüleri tanıtılmış ve dinamik çizimlerin harekete dayanıklılık ilkesi üzerinde durulmuştur. Öğretimin büyük bir kısmı sunuş yoluyla gerçekleşmiş olup öğretmen adayları sadece bir etkinlik üzerinde çalışmışlardır. Bu etkinlik, Cabri'de nesnelere hareket ettirmek, harekete rağmen geçerliliğini koruyan geometrik özellikleri yorumlamak ve böylece verilen dinamik çizimlerin göndergesi hakkında bir karar vermek ile ilgilidir.

Dinamik geometri öğretiminden bir ay sonra ikinci uygulama gerçekleştirilmiştir. Bu uygulamaya gönüllü 6 öğretmen adayı katılmıştır. Öğretmen adaylarından, kağıt-kalem ortamında gerçekleştirdikleri çizimlerin ayrıntılarını dinamik geometri ortamında gerçekleştirmeleri istenmiştir. Öğretmen adayları ikiye bölünmüş gruplar halinde çalışmışlardır ve bu çalışmaları esnasında araştırmacı, öğretmen adaylarına, Cabri'nin teknik kullanımı ile ilgili sorunlar haricinde müdahale etmemiştir. Yüksek sesle düşünme veya klinik görüşmeler gibi yöntemlerdence ikiye bölünmüş çalışma grupları oluşturma yönteminin veri toplama aracı olarak seçilmiş olmasının sebebi bu yöntemde deneklerin, diğer yöntemlere nazaran, araştırmacının beklentilerini karşılayacak ifadeler kullanma kaygısının en aza indirgenmiş olmasındandır (Balacheff, Guillerault & Laborde, 1981).

İkinci uygulamanın verileri, ses kaydı altına alınan öğrenci diyalogları ve bilgisayar ekranlarının görüntüleri kullanılarak elde edilmiştir. Öğretmen adaylarının bilgisayar ekranları Camtasia Studio yazılımıyla kaydedilmiştir. Ses kayıtları ve ekran görüntülerinin çözümlemesi sürecinde kaydedilen görüntüler ve konuşmaların dökümü yapılmış ve yazılı bir doküman haline getirilmiştir.

Veri analizi: Nitel araştırma yöntemleri ile elde edilen veriler içerik analizi tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Nitel araştırmalarda içerik analizinde temelde yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde organize edip düzenleyerek yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). İlk uygulamanın analizleri öğretmen adaylarının cevap kağıtları incelenerek gerçekleştirilmiştir. Bu analizlerde öğretmen adaylarının ilgili çizimi kağıt-kalem ortamında gerçekleştirirken kullandıkları görsel elemanlar tespit edilmiştir. Daha sonra bu görsel elemanlar üç ana tema oluşturularak incelenmiştir: 1) Çembere

teğetin göstereni, 2) Çembere teğet kavramının gösterileni, 3) Gösterilen ile gönderge arasındaki farklılıklar.

İkinci uygulamanın verilerinin analizlerinde ses ve ekran kayıtlarının transkriptleri kullanılmıştır. Bu transkriptler ilk uygulamanın analizleri için oluşturulan temalarla bağlantılı olarak elde edilen üç ana temada incelenmiştir: 1) Dinamik geometri ortamlarındaki gösteren ve bu gösteren ile kağıt-kalem ortamındaki gösteren arasındaki farklılıklar 2) Dinamik çizimlerin gösterilene katkısı ve ortamın dönütleri, 3) Gösterilen ile gönderge arasındaki ilişkilerdeki değişimler.

Çalışmanın Geçerlik ve Güvenirliği: Uygulamada kullanılan sorunun amaca uygunluğunun belirlenmesi amacıyla, beklenen hatalı ve doğru öğrenci cevaplarını içeren ayrıntılı ön analiz yapılmıştır. Ayrıca uygulama sorusu öğretmen adaylarına yöneltilmeden önce alanda çalışan uzman görüşleri alınmış ve öneriler doğrultusunda düzenlenmiştir. Ses ve görüntü kaydıyla elde edilen veriler transkript edilerek yazılı doküman haline dönüştürülmüştür. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarına araştırma hakkında bilgi verilmiş, isimlerinin gizli tutulacağı ve akademik başarılarına etki etmeyeceği belirtilmiştir. Araştırmada güvenilirlik için ses ve görüntü kayıtlarının dökümünden elde edilen dokümanlar bir alan uzmanı öğretim üyesi tarafından yorumlanmıştır. Ayrıca araştırmanın verileri, araştırmanın yapılmasından altı ay sonra araştırmacı tarafından ikinci bir kez yorumlanmıştır. Sonuç olarak, yorumların birbirleri ve araştırmacı yorumları ile tutarlı oldukları görülmüştür.

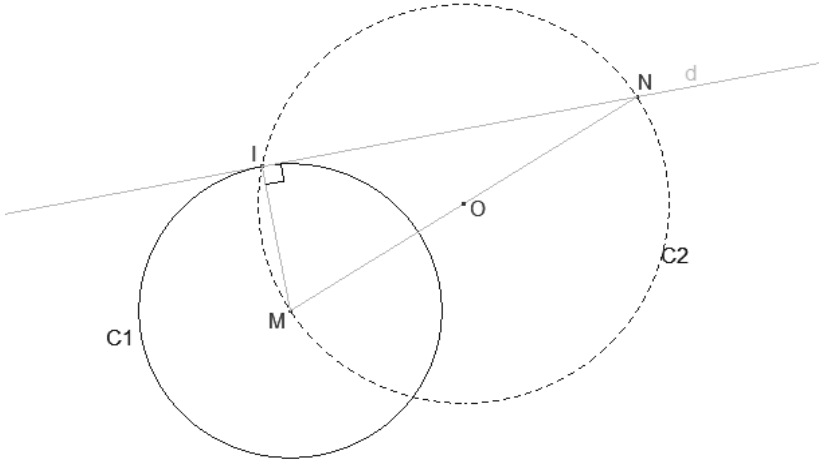
## ARAŞTIRMADA KULLANILAN ETKİNLİK VE ÖN ANALİZLERİ

Tanjant doğrusu etkinliği: Tanjant doğrusu etkinliğinde öğretmen adaylarından bir çember ve çemberin dış bölgesinde bir nokta oluşturmaları; bu noktadan geçen ve çembere teğet olan doğruyu çizmeleri istenmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarından, çizimi nasıl gerçekleştirdiklerini açıklamaları da ikinci bir aşama olarak istenmiştir.

Bir gösteren olarak /teğet/ kelimesi, değme, türev, diklik, eğim, Trabzon tanjant yolu gibi farklı gösterilenlere gönderme yapabilir. Teğet (tanjant) kelimesi Latince dokunmak anlamına gelen tangere kökünden gelmektedir. Türkçede ise teğet, değmek kökünden türemiş bir kelimedir: “teg-(değmek)+-et” (Gülensoy, 2007). Bir eğriye teğet doğrusu, verilen bir noktada eğriye değip geçen doğru olarak tanımlanabilir. Ancak, Öklid geometrisinde bir çembere teğet doğrusunun çizimi için iki yöntem bulunmaktadır: a) İki noktadan yola çıkarak yapılan çizimler (iki noktası ile

tanımlı doğru), b) Bir nokta ve diklik, paralellik, eğim gibi bir geometrik özellik ile yapılan çizimler (bir noktası ve yönü ile tanımlı doğru).

Çembere üzerindeki bir noktadan teğet doğruyu çizmek için yarıçapa dik doğruyu çizmek yeterlidir. Ancak, çemberin dışındaki bir nokta söz konusu olduğunda bu noktadan geçen ve çemberin yarıçapına dik olan doğru yeterli olmamaktadır çünkü bu durumda çemberin üzerindeki yarıçapı belirleyen noktaya da ihtiyaç vardır. Böylece istenen çizimi gerçekleştirmek için  $[MN]$  doğru parçasını çap kabul eden çember çizilmeli ve çapı gören çevre açının diklik özelliği gönderge olarak kullanılmalıdır.  $I$  noktası  $C1$  çemberi üzerinde bir nokta ( $C1$  ve  $C2$  çemberlerinin kesişim noktası) olmak üzere  $[MI] \perp (IN)$  olur ki  $(IN)$  doğrusu istenen teğet doğrusudur (Şekil 7).



Şekil 7. Dışındaki bir noktadan çembere teğet çizimi

Bu etkinlikte beklenen eksik çizim yöntemi, teğetin tanımını kullanan çizim yöntemidir. Cetveli çemberin dışındaki noktaya koyup, çembere değene kadar cetveli kaydırmak ve çembere değen doğruyu çizmek. Her ne kadar bu çizim yöntemi teğetin tanımını kullansa da eksik bir çizim yöntemidir. Çünkü teğet doğrunun çembere değdiği nokta görsel olarak belirlenmektedir. Bu çizim yöntemi için çemberde teğet kavramında gösterilenin “çembere bir noktada değmek” olduğu söylenilebilir. Ancak, ilgili değme noktasının görsel olarak tayin edilmiş olması gösterilen ile gönderge arasındaki farkı ortaya koymaktadır: Nokta bir kesişim olarak belirlenmelidir.

Etkinlikte, kağıt-kalem ortamı, öğrenene çiziminin hatalı ya da doğru olduğu ile ilgili hiç bir dönüt vermemekle birlikte çizim için geometrik özelliklerin kullanımının gerekliliğini hissettirememektedir. Çizimin yorumlama alanı dışında kalan elemanların etkinliği gerçekleştirmek için kullanılabilirdiği ve ortamın bu elemanların yorumlama alanı dışında olduğu ile ilgili hiçbir dönüt veremediğinden ötürü kağıt-kalem ortamının dönütler açısından yetersiz olduğu söylenebilir.

Diğer yandan, aynı etkinlik için dinamik geometri ortamı çizimin geçerliliğinin harekete dayanıklılık ilkesi ile test edilmesini sağlamaktadır. Ayrıca, öğrenen çiziminin hatalı olma sebeplerini gerek nesnelere hareket ettirerek, gerekse Cabri'nin araçlarını kullanarak araştırabilir. Dinamik geometri ortamında sadece çizimin yorumlama alanının sınırları netleşmekle kalmayıp, aynı zamanda görsel elemanların yorumlama alanının dışında kalma nedenleri de araştırılabilmektedir. Böylece, bu etkinlikte, öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında harekete dayanıklılık ilkesini kullanarak çizimlerinin doğruluğunu test etmeye çalışacakları ve bu hareket ettirmelerin onları görsel özelliklerin kullanımından geometrik özelliklerin kullanımına yönlendireceği beklenmektedir. Bu ise, gönderge ile gösterilen arasındaki ilişkilerin tekrar düzenlenmesi ve gösterilendeki kavramların göndergeye yaklaşması anlamına gelir.

Altını çizmek gerekir ki, kağıt-kalem ortamından dinamik geometri ortamına geçiş, çizimi gerçekleştirip sonra çizim üzerinde muhakeme yapmaktan, önce geometrik nesnenin özellikleri üzerinde muhakeme yapıp sonra çizimi gerçekleştirmeye geçişi de beraberinde getirmektedir. Bunun nedeni, Cabri'de bir dinamik çizim gerçekleştirirken kullanılan araçların ilgili geometrik özellikleri beraberinde getirmesidir. Oysaki kağıt-kalem ortamında çizimin geometrik özellikleri üzerine muhakeme, genellikle çizimin gerçekleştirilmesinden sonra olur ki, gerçekleştirilen çizimlerin çoğunluğu prototip çizimlerdir.

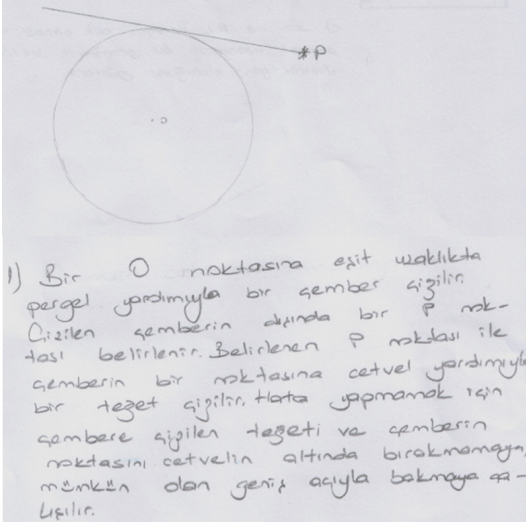
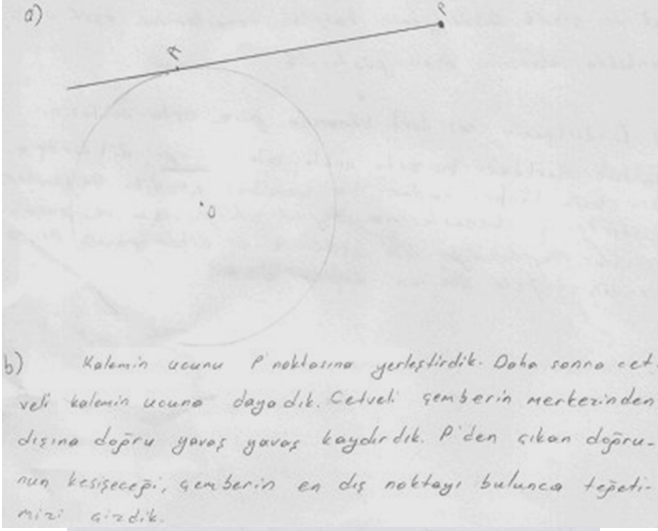
## **BULGULAR ve YORUMLAR**

Araştırmanın iki aşamada gerçekleşen uygulama kısmından elde edilen verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgular ve yorumları aşağıda ayrı ayrı verilmiştir.

### **Kağıt-kalem Ortamındaki Uygulamaya Ait Bulgular ve Yorumlar**

Kağıt-kalem ortamındaki ilk uygulamanın veri analizlerinin sonuçlarına göre görsel-uzamsal özellikleri kullanmadan, sadece geometrik

özellikleri kullanarak gerçekleştirilen öğrenci cevabı bulunmamaktadır. Öğretmen adaylarının çoğunluğu (58/75), ön analizlerde öngörülen, cetveli kaydırarak teğet doğruyu çizme yöntemini kullanmışlardır. 17 öğretmen adayı ise çember üzerindeki teğet noktasını rasgele seçip doğruyu çizmişlerdir.

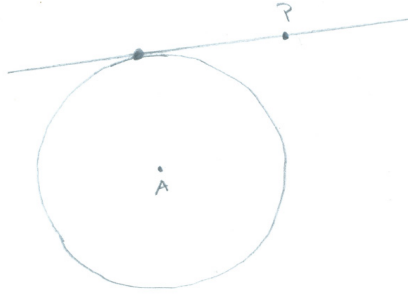


Şekil 8. Cetveli kaydırma yöntemini kullanan öğretmen adayı cevabı örnekleri



Öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde “çemberin en dış noktası”, “mümkün olan geniş açıyla bakmak” (bkz. Şekil 8) gibi ifadelerin kullanılmış olması görsel özelliklerin değme noktasını belirlemede kullanıldığını açıklar niteliktedir. Böylece, öğretmen adayları, bir gösteren olarak *çizimin göze en doğru görünecek* şekilde nasıl gerçekleştirileceğini anlatmaktadırlar. Başka bir deyişle, teğetin tanımı çerçevesinde, çembere değme noktasının görsel özellikler kullanarak nasıl çizildiğini açıklamaktadırlar. Oysaki tüm bu görsel özellikler çizimin yorumlama alanı dışında kalan özelliklerdir.

Öğretmen adayları tarafından kullanılan diğer bir çizim yöntemi, teğet noktasını çember üzerinde yaklaşık olarak işaretleyip teğet doğrusunu çizdikten sonra noktanın yerini hafif kaydırmak olmuştur. Bu çizim yönteminde de, öğretmen adayları geometrik özellikleri değil tamamen görsel özellikleri kullanarak teğet doğrusunun çembere değme noktasını belirlemektedirler.

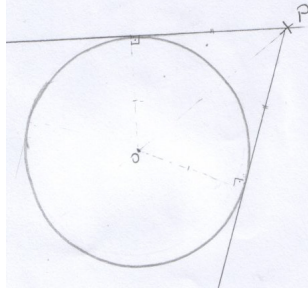


Bir A noktasını belirledim. A noktasına pergelimin sivri ucunu koyarak pergel yardımıyla A merkezli çember çizdim. Çemberin dışında bir P noktası aldım. Çembere teğet bir doğru çizebilmek için çemberin üzerinde bir nokta belirledim. Bu noktaya cetvel yardımıyla P noktasından çembere teğet bir doğru çizdim.

**Şekil 9.** Teğet noktasını yaklaşık olarak işaretleme yöntemini kullanan öğretmen adayı cevabı örneği

Yukarıdaki çizim yöntemi ile benzer görsel özellikleri kullanan başka bir çizim yöntemi de teğet noktasını diklik sağlanacak şekilde yaklaşık olarak belirleme yöntemidir. Öğretmen adayları bu çizim yönteminde teğet

doğrusu, yarıçapın teğet doğrusuna diklik ve değme noktası olmak üzere üç değişkeni aynı anda sabitlemektedirler. Diğer bir deyişle, teğet doğrusunun dik yarıçap ile kesişim noktasının çember üzerindeki konumu bu çözüm yolunda görsel olarak yerleştirilmektedir. Bu ise matematiksel olarak yanlış bir çözüm yoludur. Öyle ki teğetin değme noktası iki nesnenin kesişimi olarak belirlenmelidir.

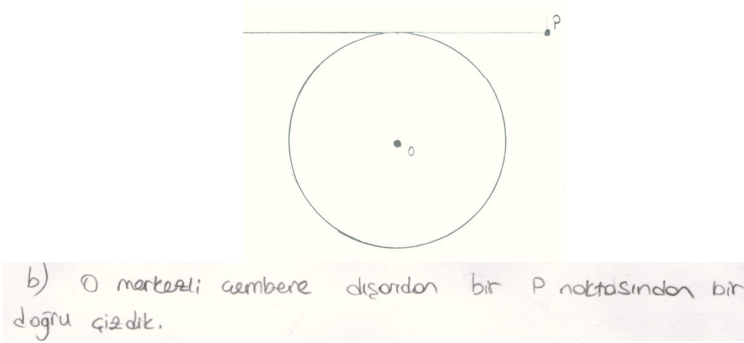


b) Pergel yardımı ile O merkezli çember çizilir.  
\* Verilen P noktasından çembere tek bir noktadan  
temas eden bir merkeze dik iki  
doğru çizilir.

**Şekil 10.** Teğet noktasını, diklik sağlanacak şekilde yaklaşık olarak belirleme yöntemini kullanan öğretmen adayı cevabı örneği

Öğretmen adayları tarafından gerçekleştirilen üçüncü bir çizim yöntemi, çemberin dışındaki noktayı, teğet doğrusu kağıdın yatayda konumlanan kenarına paralel olacak şekilde seçmek olmuştur. Burada, öğretmen adaylarının, çizimin yorumlama alanı dışında kalan bir çizim yöntemini, kağıt-kalem ortamının semiyotik yazmacı dâhilinde, geliştirdikleri görülmektedir. Bu çizim yönteminde geometrik özellikler kullanılmamaktadır ancak sadece görsel özelliklerin kullanıldığı da söylenemez. Aslında, ortamın sunduğu uzamsal bir aracı, çizimlerinde destek olarak kullanmışlardır ki bu yöntem uzamsal araçları kullanmaktadır. Böylece öğretmen adaylarının, kağıdın kenarlarını kullanarak, matematik

araçlar haricinde bir aracı problemin çözümü için kullanmışlardır ki düzlem geometri bağlamında sorulan bir çizim problemi için kullanılan yöntem bekleneni karşılamamaktadır.



**Şekil 11.** Kağıdın kenarlarını kullanma yöntemini kullanan öğretmen adayı cevabı örneği

Öğretmen adayları tarafından kullanılan çizim yöntemleri ve böylece gösterenler farklılıklar gösterse de uygulamaya katılan tüm öğretmen adayları için çemberde teğet kavramının gösterileninin “çembere bir noktada değen doğru” olduğu tespit edilmiştir. Bu gösterilen her ne kadar gönderge olarak teğet doğrunun “çembere bir noktada değip geçen doğru” tanımına uysa da değme noktasının tespiti için geometrik özelliklerin kullanılmamış olması gönderendeki özelliklerin etkinliğin gerçekleştirildiği süreçte gösterilende bulunmadığını belirtmektedir.

### **Dinamik Geometri Ortamındaki Uygulamaya Ait Bulgular ve Yorumlar**

Dinamik Geometri ortamında gerçekleştirilen ikinci uygulama öğretmen adaylarının, Cabri Geometri ortamında da kağıt-kalem ortamında olduğu gibi, öncelikle görsel özellikleri kullanarak çizimlerini gerçekleştirdiklerini göstermiştir. İkinci uygulamaya katılan tüm öğretmen adayları teğet doğrusunu çizmek için çemberin dışındaki noktadan geçen ve işaretçi çembere görsel olarak değme noktası olabilecek bir konuma yaklaştırdıklarında “bu çember üzerinde” iletisinin görüntülediği noktadan geçen doğruyu oluşturmuşlardır. Böylece, öğretmen adaylarının, kağıt-kalem ortamındaki gösterileni dinamik geometri ortamına taşıdıkları söylenebilir. Aşağıda öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında yaşadıkları sürece ait örnek bir diyalog sunulmaktadır.

M: Bu doğru...

Ama hayır şimdi 2 noktada kesiyor.

(Düzlemde bir noktası ve yönü ile belirlenen doğruyu oluşturduklar.

Bkz. Şekil 12.a)

Z: Hı?

M: Çevirdiğin zaman... gördün mü bak...

(Doğruyu, yönünü değiştirmek suretiyle hareket ettirdiler. Bkz. Şekil 12.b)

Burda bi nokta lazım ama...

Z: Doğru.... Bu nokta... ve bu...

Bu çember üzerine...

(Düzlemde bir nokta ve çember üzerinde bir noktadan geçen doğruyu oluşturduklar.

Bkz. Şekil 12.c)

Üçgenden gidebildiğim diye

düşünüyorum ama... o zaman çapı yapacaktık... yok neyse...

(Çapı belirleyen doğruyu çizdiler.

Bkz. Şekil 12.d)

M: Şimdi?

Z: Şimdi dik çizmemiz lazım bence

M: Evet

M&Z: O zaman olacak

M: Bu noktadan geçen... Bu noktaya dik... yok... olmadı... Teğet noktası buraydı...

Z: Biz de oraya nokta koyalım...

(Merkezden geçen doğru ve dik doğrunun kesişim noktasını oluşturduklar. bkz. Şekil 12.e)

M: Tamam şimdi olcak.

M&Z: A a!

M: Yok böyle bir şey... Bu doğrunun da orada kalması gerekiyordu...

(bkz. Şekil 12.f)

Dosya... yeni... [...]

M: Çember... sonra çapı yapalım...

Dik doğru...

Z: Dışarda bir nokta yapmalıydın.

M: Hmm... Nokta... Şimdi dik doğru...

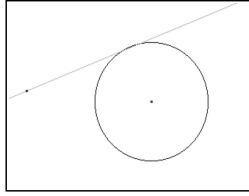
(bkz. Şekil 12.g)

Z: Yine olmadı. Nokta çemberin üzerinde

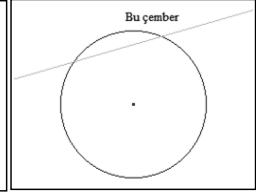
kalmalıydı... (bkz. Şekil 12.h)

M: Sadece dik doğruyu veya sadece çemberi sabitleyebiliyoruz.

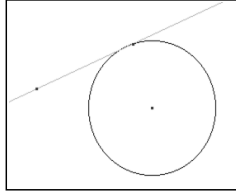
İkisini aynı anda sabitlemenin bir yolu bulmalıyız.



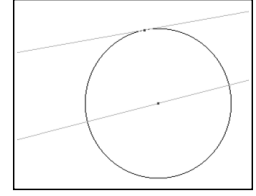
Şekil 12.a.



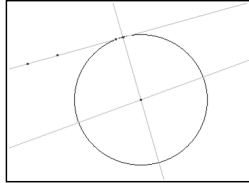
Şekil 12.b.



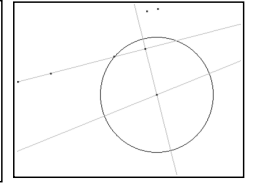
Şekil 12.c.



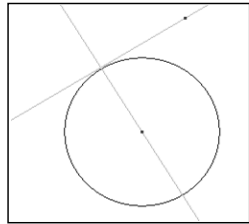
Şekil 12.d.



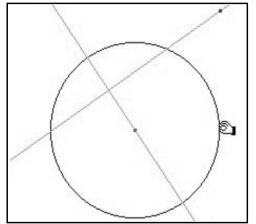
Şekil 12.e.



Şekil 12.f.



Şekil 12.g.



Şekil 12.h.

**Şekil 12.a-12.h.** Öğretmen adaylarının Cabri'de teğet doğrusu çizme teşebbüsleri

Dinamik geometri ortamındaki uygulama sırasında tüm öğretmen adayları yukarıdaki örnek diyaloga benzer süreçler yaşamışlardır. Öğretmen adayları, nesnelere hareket ettirdiklerinde gerçekleştirdikleri teğet çiziminin harekete dayanıklılık ilkesini sağlamadığını görüp, çizimleri üzerinde tekrar muhakeme etmişler ve teğet doğrusunun geometrik özelliklerini kullanmaya çalışarak bir dinamik çizim oluşturma çabasına girmişlerdir. Bu bağlamda,

öğretmen adayları için, çembere teğet göndergesinin gösterileni “çembere bir noktada değen doğru” iken dinamik geometri ortamındaki gösterenin (dinamik çizim) özellikleri ve ortamın yorumlama alanında sağladığı dönütler sayesinde, öğretmen adaylarında gösterilenin çembere teğetin geometrik özelliklerini de içine alacak şekilde ilerlediği görülmektedir.

Cabri’de gerçekleştirdikleri araştırmalar sonucunda, öğretmen adayları, problemde birden fazla değişkenin bulunduğunu ve geçerli bir dinamik çizim gerçekleştirebilmek için bu değişkenleri aynı anda sabitlemeyi sağlayacak geometrik özelliklerden yararlanmalarının gerekli olduğunu fark etmişlerdir. Ancak uygulamaya katılan öğretmen adayları bu değişkenleri sabitlemek için gerekli olan geometrik özelliği bulamamışlar ve istenen çizimi sonlandıramamışlardır. Buna rağmen, dinamik geometri ortamı nesnelere geometrik özellikler ile birbirine bağlanması ve bir geometrik şeklin elemanları arasındaki ilişkiler üzerinde çalışma fırsatını sağlamıştır. Aslında dinamik geometri ortamındaki gösterende, göndergedeki geometrik özellikler bulunmaktadır ve dinamik çizim gerçekleştirilirken göndergedeki bu geometrik özellikler gösterene de verilmiş olmalıdır.

Bu etkinlikte, öğretmen adaylarının, dinamik geometri ortamındaki işlem ve yorumlama alanlarının kağıt-kalem ortamına göre farklılıkları sayesinde, bir çembere teğetin “doğrunun çembere değmesi” gösterileninden “çembere tek bir noktada değen ve yarıçapa dik olan doğru” gösterilenine ilerledikleri görülmektedir. Dinamik geometri ortamında gerçekleştirilen uygulama sonucunda, dinamik çizimlerin çemberde teğet kavramının gösterileninde ilgili göndergeye yaklaşma sağladığı söylenebilir.

## TARTIŞMA

Kağıt-kalem ortamında yapılan çizimlerde öğretmen adaylarının görsel-uzamsal özellikleri kullanarak geometrik çizimleri gerçekleştirdikleri görülmüştür. Öğretmen adayları, verdikleri cevaplarda, çizimin estetik yönünü ön plana çıkarmakta ve “göze en doğru görünen” çizimleri elde etmek için çizim yöntemlerini anlatmaktadırlar. Geometrik çizimler üzerine yapılan çalışmalar, benzer bulguların genellikle ortaokul seviyesindeki (11-15 yaş) öğrenciler için söz konusu olduğunu göstermektedir (Laborde, 1994; Houdeman & Kuzniak, 1999; Gousseau-Coutat, 2006; Houdeman, 2007; Perrin-Glorian, 2012). Ortaokul görsel geometriden çıkarımsal geometriye geçiş sürecinin yaşandığı bir dönemdir (Laborde, 2004; Perrin-Glorian, 2012). Bu yaş grubu öğrencilerin çizimlerin görsel ve estetik yönleri üzerine

yoğunlaşmaları, matematiksel nesnelere gösterenlerinin onlar için öneminden kaynaklanmaktadır. Oysaki, öğretmen adayları ve öğretmenler söz konusu olduğunda, bir yandan bir gösteren olarak çizimlerin öğrenci için önemini diğer yandan çizimlerdeki görsel ve estetik kaygının matematiksel muhakemede yerinin olmadığını farkında olmaları beklenir. Böylece, kağıt-kalem ortamında yapılan uygulamaya ait bulgulardan öğretmen adaylarının istenen seviyede olmadıkları söylenebilir. Öğretmen adaylarının çizimlerinde görsel özelliklerden kopmamış olmalarının sebebinin Türkiye’de öğrencilerin geometrik çizim problemleri ile yeterince karşılaşmadıklarından kaynaklandığı düşünülebilir. Diğer ülkelerin müfredatları ile karşılaştırıldığında Türkiye’nin geometrik çizim problemleri ve bu çizimler üzerine tartışmalar konusunda zayıf olduğu görülmektedir (Erbaş, Çakıroğlu, Aydın & Beşer, 2006).

Dinamik Geometri ortamında gerçekleştirilen uygulama, öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında kullandıkları görsel özellikleri dinamik geometri ortamında da çizimlerinde kullandıklarını göstermektedir. Ancak dinamik geometri ortamında nesnelere sürüklenmesi esnasında gerçek zamanlı dönütler ve harekete dayanıklılık ilkesi sayesinde öğretmen adayları çizimlerinin hatalı olduğunu farkına varmışlardır. Nitekim dinamik geometri ortamları üzerine yapılan araştırmalar harekete dayanıklılık ilkesinin öğrencilerin kendi hatalarını kendilerinin fark edip düzeltmelerini üzerindeki etkililiğini göstermektedir (Healy, 2000; Mariotti, 2000; Laborde, 2002; Freiman, Martinovic & Karadağ, 2009).

Ayrıca dinamik geometri ortamında öğretmen adaylarının, görsel özellik kullanımından geometrik özellik kullanımına geçiş sağladıkları görülmüştür. Öyle ki ortamın sağladığı dönütler sayesinde hangi özelliklerin görsel, hangilerinin çizim için uygun geometrik özellikler olduğunu tespit edebilmişlerdir. Çizimde birden fazla değişken bulunduğunu ve geometrik nesnelere bu değişkenlerle birbirine bağlamayı sağlayacak geometrik özelliklerin arayışına girmişlerdir. Bu bulgu ile paralel olarak farklı öğrenci seviyeleri ile yapılan pek çok araştırma, dinamik geometri ortamlarının öğrencilerin geometrik özellikleri kullanmaları ve bu geometrik özellikleri çıkarımsal bir geometrik muhakeme bağlamında anlamlandırmalarını sağladığını açığa çıkarmaktadır (Gousseau-Coutat, 2006; Çalışkan-Dedeoğlu, 2006; Restrepo, 2008; Mithalal, 2010; Tapan-BROUTIN, 2010b).

## SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, çizimler ve matematiksel nesnelere arasındaki ilişkilerin incelenmesi için gönderge – gösteren – gösterilen üçlüsü ile tanımlanan klasik semiyotik üçgen kullanılmıştır. Semiyotik üçgenin soyut matematiksel nesnelere ve bunların temsillerini incelemek için uygun bir kuramsal çerçeve olduğu söylenebilir.

Matematik öğretiminde çizim, dinamik çizim ve geometrik şekil kavramları açığa çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu sayede, çizimlerden dinamik çizimlere geçiş aşamasında Öklid geometrisindeki “çembere teğet” göndergesinin gösterenleri olarak çizim ve dinamik çizimlerin öğretmen adaylarında gösterenlerde oluşturdukları değişimler ve bu değişimlerin gönderge ile bağlantısı incelenmiştir. Öğretmen adaylarının, kağıt-kalem ile yapılan çizimlerde görsel eleman kullanarak çizim yaptıkları, dinamik geometri ortamında yapılan çizimlerde ise geometrik özellik arayışına girdikleri görülmüştür. Araştırmanın sonucunda, bir gösteren olarak kağıt-kalem ortamında çizimlerin yetersiz kaldığı, dinamik çizimlerin ise çemberde teğet kavramının gösterileninde ilgili göndergeye yaklaşma sağladığı açığa çıkarılmıştır. Matematik nesne ile gösterilen arasındaki uzaklığın azaltılması (ya da var edilmesi) olayı ise öğrenme olarak adlandırılır.

Sonuç olarak, öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında çalışmalarının analizlerinden, geometrik çizim problemlerinde, dinamik geometrinin görsel elemanların kullanımından geometrik özelliklerin kullanımına geçişi sağladığı açık bir şekilde ortaya konulmuştur.

Bu sonuçlar ışığında, dinamik geometri ortamlarının ortaokuldan hizmet içi eğitime kadar kullanılmış olmasının, bu tür ortamların sunduğu harekete dayanıklılık ilkesi sayesinde, görsel özellik ile geometrik özellik arasındaki farkların kavranması ve kavratılması açısından etkili olacağı düşünülmektedir. Diğer yandan, dinamik geometri ortamlarındaki dönütlerin kağıt-kalem ortamına göre daha zengin olması, öğretmenin bilgiye sahip ve bilgiyi onaylayan kişi rolünden, öğrenmelere rehberlik eden ve öğrenme ortamlarını düzenleyen kişi rolüne geçişini sağlayacaktır ki bu da yapılandırmacı bir öğrenme ortamı için en önemli unsurlardan birisidir.

Ayrıca, matematiksel soyut nesnelere bilgisayar ekranında kağıt-kalem ortamına göre göndergeye daha yakın gösterenlerle somutlaştırılabilme imkanı, genel olarak matematiğin özel olarak geometrinin temel (primer) nesnelere birbirlerine geometrik özelliklerle bağlandığı ve bu geometrik özellikler ile bağlanma sonucunda yeni

geometrik nesnelerin oluştuğu fikrinin öğrencilerde yerleşmesi için dinamik geometri ortamlarında çizim etkinliklerinin sınıf içi uygulamalarına yer verilmesi gerektiği düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR

- Anton, J.; Vlastos, G.; Mourelatos, A.; Turnbull, R.; Mueller I. (1984). Science and the sciences in Plato, *Revue d'histoire des sciences*, 37 (1), 82-83.
- Balacheff Nicolas, Guillerault M., Laborde C. (1981). Situations expérimentales de communication en mathématique. In: *Langage et société*, supplément au n°17, Pratiques langagières et stratégies de communication. Terrains, méthodes d'enquête et d'analyse, 30-34.
- Brousseau, G. (1995) Promenade avec THALES, entre la Maternelle et l'Université. In *Autour de Thalès*, (pp. 87 -124). IREM de Lyon Villeurbanne.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques en mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage éditions
- Çalışkan-Dedeoğlu, N. (2006) *Usages de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en œuvre: quelles motivations, quelles pratiques ?*. These d'Etat, Université Paris 7 – Denis Diderot.
- Dahan, J.J. (2005). *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-Géomètre en mathématiques Un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problèmes de boîtes noires*. These d'Etat, Université Joseph Fourier-Grenoble 1.
- De Saussure, F. (1916). *Cours de Linguistique Générale*. Paris: Payot.
- Duval, R. (1988). Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1, 57-74.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, 5, 37-65.
- Duval, R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, 17, 121-138.



- Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education, in T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Japan, Nishiki Print Co., Ltd. I, 55–69.
- Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, 76, 7–27.
- Erbaş, A.K., Çakıroğlu, E., Aydın, U. & Beşer, S. (2006). Professional Development Through Technology-Integrated Problem Solving: From InterMath to T-Math, *The Mathematics Educator*, 16(2), 35–46.
- Freiman, V.; Martinovic, D.; Karadag, Z. (2009). Découvrir le potentiel éducatif du logiciel dynamique GeoGebra : communauté de collaboration et de partage. *Bulletin AMQ Association Mathématique du Québec*, 49(4), 34-49.
- Gousseau-Coutat, S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété*. These d'Etat, Université Joseph Fourier.
- Gülensoy, T. (2007). *Türkiye Türkçesindeki Türkçe sözcüklerin köken bilgisi sözlüğü*. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions, *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Japan, Nishiki Print Co., Ltd. I, 103-117
- Houdeman, C.; Kuzniak, A. (1999) .Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 283-312
- Houdement, C.; Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193
- Houdeman, C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM*, 67, 69-84
- Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14 (1.2), 165-210.

- Laborde, C. (1994). Enseigner la géométrie: Permanences et révolutions. In C. Gaulin, B. Hodgson, D. Wheeler, & J. Egsgard (Eds.), *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 47-75). Les Presses de L'Université Laval, Sainte-Foy, PQ, Canada.
- Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 6(3), 283-317
- Laborde, C. (2003). Géométrie - Période 2000 et après. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B.R. Hodgson, & G. Schubring (Eds.). *One Hundred years of L'Enseignement Mathématique: moments of mathematical education in the twentieth century*. Monograph 39. Geneva: L'Enseignement Mathématique.
- Laborde, C. (2004). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry In J. Kilpatrick, C. Hoyles and O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp.159-180). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53.
- Mesquita, A.L. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves: éléments pour une typologie*. Thèse de doctorat. Strasbourg: Université Louis Pasteur.
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. These d'Etat, Université de Grenoble.
- Noirfalise, R. (1991). Figures prégnantes en géométrie? *Repères-IREM*, 2, 51-58.
- Parzysz, B. (1988). Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.
- Peirce, C. (1978). *Écrits sur le signe*, Paris: Seuil
- Perrin-Glorian, M.J. (2012). Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? L'exemple de la symétrie axiale. *Bulletin de l'APMEP*, 499, 325-332.

- Restrepo, A.M. (2008). *Genese instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6eme*. These d'Etat, Université Joseph Fourier.
- Rigaut, J. (2013). *Le passage du dessin à la figure grâce à l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique*, Master M2 SMEEF specialite professorat des ecoles, Université d'Artois, IUFM Nord Pas de Calais, Villeneuve d'Ascq.
- Schneider, M. (2012). Un obstacle épistémologique comme trait d'union des travaux d'un laboratoire de didactique des mathématiques, *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, (pp. 214-228), Paris.
- Steinbring, H. (1988). Nature du savoir mathématique dans la pratique de l'enseignant In: Laborde, Colette (Hrsg.): *Actes du premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, (pp. 307-316). Grenoble.
- Tapan Broutin, M.S. (2010a). *Bilgisayar etkileşimli geometri öğretimi: Cabri Geometri ile dinamik geometri etkinlikleri*. Bursa: Ezgi Kitabevi.
- Tapan Broutin, M.S. (2010b). *Technologies de Géométrie Dynamique Dans la Formation des Enseignants*. Allemagne: Editions universitaires europeennes
- Vergnaud, G. (1994). Homomorphisme réel - représentation et signifié – signifiant. *Didaskalia*, 5, 25-34.

Başvuru: 12.06.2014

Yayına Kabul: 15.06.2014

