

## GAUSS IŞINLARININ SAÇILMASININ SINIR KIRINIM DALGASI TEORİSİ İLE İNCELENMESİ

Uğur YALÇIN\*

**Özet:** Bu çalışmada, Gauss ışınlarının yutucu yarım bir düzlemden saçılması Sınır Kırınım Dalgası Teorisi ile incelenmiştir. İlk olarak, Gauss ışın demeti ifadesi kullanılarak uygun koordinatlarda vektör potansiyeli tanımlanmıştır. Bu potansiyel ifadesi Sınır Kırınım Dalgası Teorisi integralinde kullanılmıştır. Açıklık yüzeyinden geçen ve kırınan alanlar hesap edilmiştir. Ayrıca, yutucu yarım düzlemin kenarından kırınan alanlar düzgün (uniform) alanlar olarak ifade edilmiştir. Elde edilen alan ifadeleri, gelen alan (Gauss ışın demeti) ile sayısal olarak karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Sınır kırınım dalgası teorisi, saçılan alan, Gauss ışın demeti.

### Investigation of Gaussian Beams Scattering with the Theory of the Boundary Diffraction Wave

**Abstract:** In this study, scattering of Gaussian beams from an opaque half plane is investigated with the theory of the boundary diffraction wave. Firstly, a vector potential is described at appropriate coordinates by using the Gaussian beams expression. This vector potential is used in the theory of the boundary diffraction wave integral. The transmitted fields through the aperture surface and diffracted fields are calculated. Moreover, diffracted fields from the edge of the opaque half plane are expressed in the form of uniform fields. The obtained field expressions are numerically compared with the incident field (Gaussian beams).

**Key Words:** The theory of the boundary diffraction wave, scattered field, Gaussian beams.

## 1. GİRİŞ

Sınır Kırınım Dalgası Teorisi (SKDT) yaklaşımı oldukça kullanışlı ve uygulanma kolaylığı nedeniyle bir yüzeyden kırınan alanların hesabı için sıklıkla kullanılır (Ganci 1995, 1996, 2008, Tang ve diğ. 2005). SKDT yaklaşımının ilk formülasyonu birbirlerinden bağımsız olarak Maggi-Rubinowicz tarafından ortaya konmuştur (Maggi 1888, Rubinowicz 1917). Maggi-Rubinowicz formülasyonunun çeşitli tipte gelen alanlar için daha genel bir ifadesi ise Miyamoto ve Wolf tarafından öne sürülmüştür (Miyamoto ve Wolf 1962a, 1962b).

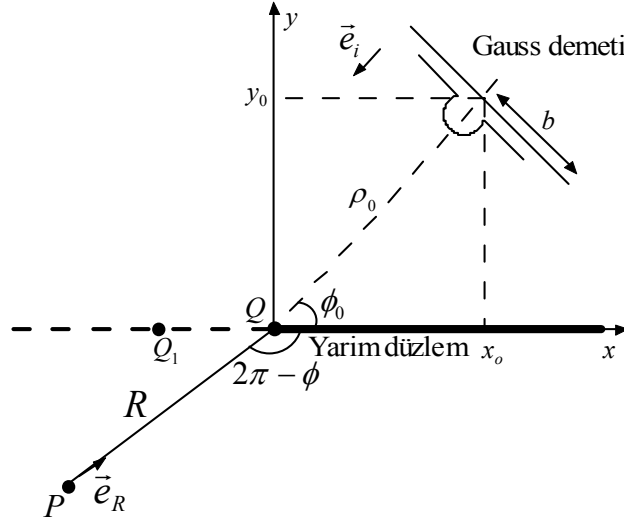
SKDT yaklaşımı açıklık yüzeylerinden kırınan alanların hesabında çok daha sıkça kullanılır (Lit 1972, Otis 1974, Ganci 1997, Liu ve Lü 2005). SKDT yaklaşımını kullanarak yutucu bir yarım düzlemin kenarından kırınan Gauss ışın demeti alanların hesabını ilk olarak Otis ve Lit yapmıştır (Otis 1975). Ancak elde edilen kırınan alan ifadeleri düzgün (uniform) değildir.

Bu çalışmada, SKDT yaklaşımı kullanılarak yutucu bir yarım düzlemin kenarından kırınan Gauss ışın demeti alanların hesabı farklı bir şekilde bulunacaktır. Bulunan kırınım alanları Otis ve Lit' nin çalışmasındakinin aksine düzgün alanlar olarak da ifade edilecektir.

Zaman faktörü çalışmanın tamamında  $e^{j\omega t}$  olarak göz önüne alınacaktır.

\* Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü, 16059 Görükle, BURSA.





Şekil 2:  
Yutucu Yarım Düzlemden Saçılma Geometrisi

$$U_i(P) = u_i H_0^{(2)}(kR_1) \quad (5)$$

olarak verilebilir. Burada,

$$u_i = \omega\mu_0 I / 4 \quad (6)$$

şeklinde ve konum vektörünün genliği ise,

$$R_1 = \{[(x - x_0) + jb \cos \phi]^2 + [(y - y_0) + jb \sin \phi]^2\}^{1/2} \quad (7)$$

olarak verilebilir. Probleme ait vektör potansiyel  $Q$  ikincil kaynak noktasında (3) ve (5) eşitlikleri kullanılarak

$$\vec{W}(Q, P) = u_i H_0^{(2)}(kR_1^Q) \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \left[ \frac{\vec{e}_R \times \vec{e}_i}{1 + \vec{e}_R \cdot \vec{e}_i} \right] \quad (8)$$

şeklinde bulunabilir. Burada,  $\vec{e}_i$  gelen alanın yayılım yönündeki birim vektörünü göstermektedir.  $R_1^Q$ 'in  $Q$  noktasındaki değeri

$$R_1^Q = \{[-x_0 + jb \cos \phi_0]^2 + [-y_0 + jb \sin \phi_0]^2\}^{1/2} \quad (9)$$

olarak verilebilir.

$Q \rightarrow Q_1$  giderken  $R_1^Q \rightarrow R_1$  gider (bkz. Şekil-2). (3) ve (4) eşitliği kullanılarak açıklık yüzeyinden geçen alan ifadesi

$$F_1(P) = \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \frac{u_i}{4\pi} \int_{\Gamma_1} H_0^{(2)}(kR_1) \frac{e^{-jkR}}{R} \left[ \frac{(\vec{e}_R \times \vec{e}_i) \cdot \vec{l}}{1 + \vec{e}_R \cdot \vec{e}_i} \right] dl \quad (10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Son eşitlikte görülen,

$$\frac{\vec{e}_R \times \vec{e}_i}{1 + \vec{e}_R \cdot \vec{e}_i} = \vec{m} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \vec{m} \cot \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

ifadesi olarak hesaplanabilir. Burada  $\alpha$ ,  $Q_1P$  ve  $QP$  arasındaki açıyı göstermektedir.  $\vec{m}$  birim vektörü ise

$$\vec{m} = \vec{e}_R \times \vec{e}_i / |\vec{e}_R \times \vec{e}_i| \quad (12)$$

olarak verilebilir (Bkz. Şekil 1). Burada  $dl = \sigma_1 d\phi_1 / (\bar{m} \cdot \bar{l})$  ve  $\phi_1$ ,  $Q_1$  noktasını saran  $\Gamma_1$  çevresini taramaya açıdır. Böylece, (10) eşitliği

$$F_1(P) = \frac{1}{4\pi} u_i H_0^{(2)}(kR_1) \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \int_{\phi_1=0}^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\sigma_1}{\tan \frac{\alpha}{2}} d\phi_1 \quad (13)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\sigma_1$  yeterince küçük kabul edilerek ihmal edilebilir bir yaklaşıklıkla

$$\alpha = \sigma_1 / R \quad (14)$$

eşitliği yazılabilir. Sonuç olarak, açıklık yüzeyinden geçen alan ifadesi (13) eşitliğinden, limit durumunda ( $\sigma_1 \rightarrow 0$ ),  $Q_1$  noktası için  $R = 0$  olmak üzere,

$$F_1(P) = u_i H_0^{(2)}(kR_1) \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_1=0}^{2\pi} d\phi_1 = u_i H_0^{(2)}(kR_1) \quad (15)$$

olarak bulunabilir.

$P$  gözlem noktasındaki kırınan alanlar (2) eşitliğinde (8) eşitliği kullanılarak bulunabilir. İlgili birim vektörler Şekil-2'deki geometri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &= -\cos \phi_0 \bar{e}_x - \sin \phi_0 \bar{e}_y \\ \bar{e}_R &= -\cos \phi \bar{e}_x - \sin \phi \bar{e}_y \\ \bar{l} &= -\bar{e}_z \end{aligned} \quad (16)$$

şeklinde bulunabilir. İlgili vektörel çarpımların yapılmasıyla

$$\frac{(\bar{e}_R \times \bar{e}_i) \cdot \bar{l}}{1 + \bar{e}_R \cdot \bar{e}_i} = \frac{\sin(\phi - \phi_0)}{1 + \cos(\phi - \phi_0)} = -\tan\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) \quad (17)$$

kolayca bulunabilir. Böylece, kırınan alana ait integral eşitliği (2), (8) ve (17) eşitlikleri kullanılarak

$$U_B(P) = -u_i H_0^{(2)}(kR_1^Q) \frac{1}{4\pi} \tan\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) \int_{\Gamma} \frac{e^{-jkR}}{R} dl \quad (18)$$

olarak bulunabilir. Bu problem için  $Q$  noktası orijinde olduğundan

$$R = [x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad (19)$$

şeklinde dir. Burada

$$dl = dz' \quad (20)$$

olmak üzere (18) eşitliği

$$U_B(P) = -u_i H_0^{(2)}(kR_1^Q) \frac{1}{4\pi} \tan\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) \int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR}}{R} dz' \quad (21)$$

olarak ifade edilebilir. Bu son eşitlikteki integral ifadesi

$$(z - z') = \rho \operatorname{sh} \beta \quad (22)$$

değişken dönüşümü kullanılmasıyla

$$\int_c e^{-jkch\beta} d\beta = \frac{\pi}{j} H_0^{(2)}(k\rho) \quad (23)$$

Hankel fonksiyonu verir. Burada,

$$\rho = [x^2 + y^2]^{1/2} \quad (24)$$

şeklinde dir. Sonuç olarak, (21) eşitliğinden

$$U_B(P) = -u_i H_0^{(2)}(kR_1^Q) \frac{1}{4j} \tan\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) H_0^{(2)}(k\rho) \quad (25)$$

ifadesi bulunabilir. Son eşitlikte görülen Hankel fonksiyonun ( $k\rho \rightarrow \infty$ ) Debye asimptotik açılımı göz önüne alınarak yutucu yarım düzlemin kenarından kırınan alan ifadesi

$$U_B(P) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} u_i H_0^{(2)}(kR_1^Q) \tan\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) \frac{e^{-jk\rho - j\pi/4}}{\sqrt{k\rho}} \quad (26)$$

olarak bulunabilir. Bulunan kırınan alan ifadesi gölge sınırında sonsuza yaklaşır. Bu yüzden, düzgün (uniform) kırınan alanlar hesaplanacaktır. (26) eşitliği

$$1 = 2 \cos^2(A) - \cos(2A) \quad (27)$$

trigonometri özelliği kullanılarak, uygun şekilde düzenlenirse

$$U_B(P) = -\frac{u_i e^{-j\pi/4}}{2\sqrt{\pi}} H_0^{(2)}(kR_1^Q) \sin\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) \frac{e^{-j2k\rho \cos^2\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right)}}{\sqrt{2k\rho \cos\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right)}} e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} \quad (28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\hat{F}(\xi) = e^{-j(\xi^2 + \pi/4)} / (2\sqrt{\pi}\xi) \quad (29)$$

olmak üzere, (28) eşitliği

$$U_B(P) = u_i \hat{F}(\xi) H_0^{(2)}(kR_1^Q) \sin\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} \quad (30)$$

olarak bulunabilir. Bu problem için detour parametresi ise

$$\xi = -\sqrt{2k\rho} \cos[(\phi - \phi_0) / 2] \quad (31)$$

şeklinde verilebilir. Böylece,

$$\hat{F}(\xi) \approx F(|\xi|) \text{sgn}(\xi) \quad (32)$$

özelliliği kullanılarak düzgün kırınan alanlar

$$U_B(P) \approx u_i F(|\xi|) \text{sgn}(\xi) H_0^{(2)}(kR_1^Q) \sin\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} \quad (33)$$

olarak bulunabilir. Burada,  $\text{sgn}(\xi)$  signum fonksiyonudur. Fresnel integrali ise

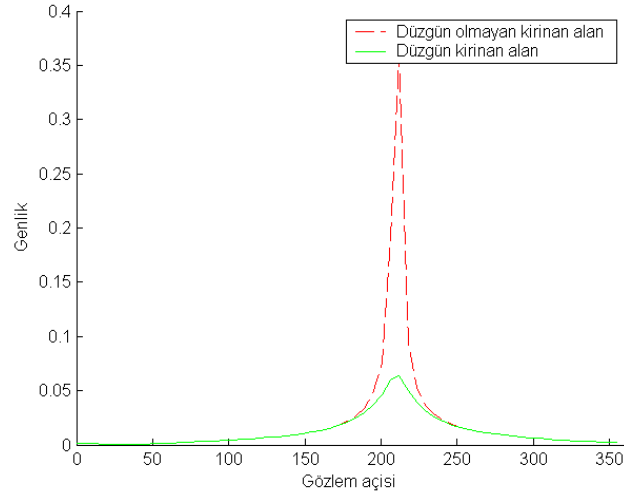
$$F(\xi) = \frac{e^{j\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-jt^2} dt \quad (34)$$

şeklinindedir.

#### 4. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde Gauss ışınının yutucu yarım bir düzlemden saçılması sayısal sonuçlarla tartışılacaktır. Sayısal olarak çizilen grafiklerde  $u_i$  birim genlik seçilmiştir. Gauss ışınının genişliği  $b = 1/k$ , koordinatları  $x_0 = 3/k$ ,  $y_0 = 4/k$  ve yüzeye geliş açısı  $\phi_0 = \pi/6$  şeklinde göz önüne alınmıştır. Diğer ilgili parametreler ise,  $k = 20\pi$  ve  $\rho = 20/k$  olarak seçilmiştir.

İlk olarak, düzgün olmayan ve düzgün kırınan alanlar Şekil 3' de karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada (26) ve (33) eşitlikleri sayısal olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca, ilgili eşitlikler çizdirilirken mutlak değerleri alınmıştır.



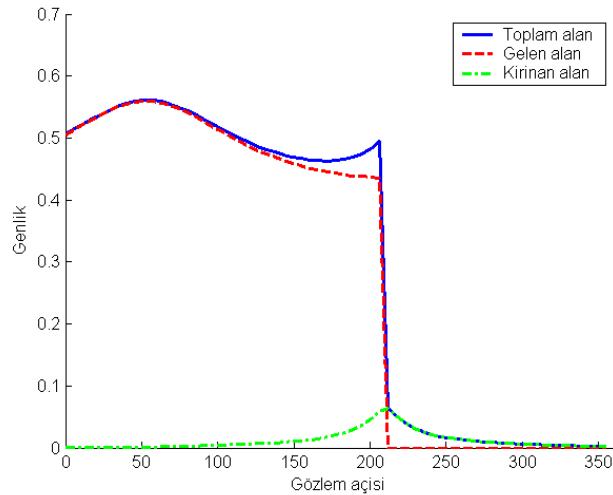
Şekil 3:  
Düzgün ve Düzgün Olmayan Kırınım Alanları

Şekil 3’den görüldüğü gibi (26) eşitliği düzgün olmayan kırınım alan ifadesi, sayısal olarak çözüldüğünde fiziksel probleme uygun olmayan sonuçlar vermektedir. Bunun nedeni,  $\phi = \pi + \phi_0$  gölge sınırında alan ifadesinin sonsuz değer vermesidir. Bunun için detour parametresi tanımlanarak alanlar düzgün hale getirilmiştir. Böylece fiziksel problemle örtüşen uygun çözüm elde edilebilmiştir.

Şekil 4’de yüzeye gelen alan, düzgün kırınım alan ve toplam saçılan alanlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada (5) eşitliği gölge bölgesinde gelen alan olmayacağından

$$U_i(P) = u_i H_0^{(2)}(kR_1) u_s(-\xi) \quad (35)$$

şeklinde göz önüne alınmıştır. Burada  $u_s(-\xi)$  birim basamak fonksiyonunu göstermektedir. (33) ve (35) eşitlikleri sayısal olarak çizdirilirken mutlak değerleri alınmıştır. Toplam saçılan alan ise (33) ve (35) eşitliklerinin ayrı ayrı mutlak değerlerinin alınıp toplanmasıyla elde edilmiştir.



Şekil 4:  
Gelen, Kırınım ve Toplam Saçılan Alanlar

Şekil 4'den görüldüğü gibi toplam saçılan alan, yüzeyi aydınlatan gauss ışını göz önüne alınmadığında maksimum değerini beklenildiği gibi gölge sınırında almaktadır. Ayrıca Şekil 4'den gelen Gauss ışınının kırınımına ilişkin kırınan alan ve gelen alanın karşılaştırması açıkça görülmektedir.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada, Gauss ışınının yutucu yarım bir düzlemden saçılması Sınır Kırınım Dalgası Teorisi (SKDT) yaklaşımıyla incelenmiştir. Gauss ışın demeti uygun koordinatlarda ifade edilerek, vektör potansiyelinde kullanılmış ve SKDT integrali elde edilmiştir. Bu integral ifadesi göz önüne alınarak açıklık yüzeyinden geçen ve yutucu yarım düzlemin kenarından kırınan düzgün (uniform) alanlar hesap edilmiştir. Sonuçlar gelen alan (Gauss ışın demeti) ifadesi ile sayısal olarak karşılaştırılmıştır.

## KAYNAKLAR

1. Ganci, S. (1995) A general scalar solution for the half-plane problem, *J. Modern Opt.*, 42(8), p. 1707-1711.
2. Ganci, S. (1996) Half-plane diffraction in a case of oblique incidence, *J. Modern Opt.*, 43(12), p. 2543-2551.
3. Ganci, S. (1997) Boundary Diffraction Wave theory for rectilinear apertures *Eur. J. Phys.*, 18, p. 229-236.
4. Ganci, S. (2008) Diffracted wavefield by an arbitrary aperture from Maggi-Rubinowicz transformation: Fraunhofer approximation, *Optik*, 119(1), p. 41-45.
5. Lit J. W. Y. (1972) Boundary-Diffraction Waves due to a general point source and their applications to aperture systems, *J. Modern Opt.*, 19(12), p. 1007-1014.
6. Liu P. ve Lü B. (2005) Diffraction of spherical waves at an annular aperture in the use of the boundary diffraction wave theory: A comparison of different diffraction integral approaches, *Optik*, 116, p. 449-453.
7. Maggi, G. A. (1888) Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo izotropo, *Ann. di Mat. Ila*, 16, p. 21-48.
8. Miyamoto K. ve Wolf E. (1962) Generalization of the Maggi-Rubinowicz theory of the Boundary Diffraction Wave-Part I, *J. Opt. Soc. Am.*, 52(6), p. 615-625.
9. Miyamoto K. ve Wolf E. (1962) Generalization of the Maggi-Rubinowicz theory of the Boundary Diffraction Wave-Part II, *J. Opt. Soc. Am.*, 52(6), p. 626-637.
10. Otis G. (1974) Application of the boundary diffraction wave theory to Gaussian beams, *J. Opt. Soc. Am.*, 64(11), p. 1545-1550.
11. Otis G. ve Lit. J. W. Y. (1975) Edge-On diffraction of a Gaussian laser beam by a semi-infinite plane, *App. Optics*, 14(5), p. 1156-1160.
12. Rubinowicz, A. (1917) Die beugungswelle in der Kirchoffschen theorie der beugungsercheinungen, *Ann. Physik*, 4(12), p. 257-278.
13. Tang L. ve diğ. (2005) Analysis of near-field diffraction pattern of a metallic probe tip with the boundary diffraction wave method, *Chin Phys. Lett.*, 22(9), p. 2443-2446.

Makale 12.02.2008 tarihinde alınmış, 29.10.2010 tarihinde kabul edilmiştir. İletişim Yazarı: U. YALÇIN (uyalcin@uludag.edu.tr).