# DOĞRUSAL PROGRAMLAMA ÇÖZÜCÜLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ

**Merve CÖMERTOĞLU ARIK**


T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# DOĞRUSAL PROGRAMLAMA ÇÖZÜCÜLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ

**Merve CÖMERTOĞLU ARIK**
**orcid ID: 0000-0002-9371-092X**

Doç. Dr. Fatih ÇAVDUR

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2020

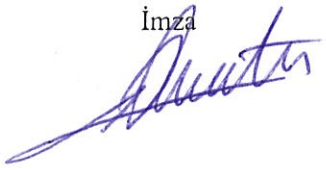
## TEZ ONAYI

Merve CÖMERTOĞLU ARIK tarafından hazırlanan "DOĞRUSAL PROGRAMLAMA ÇÖZÜCÜLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Fatih ÇAVDUR

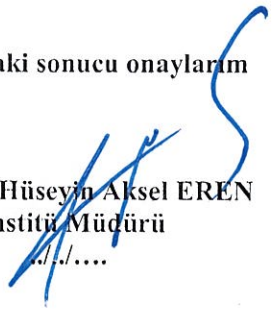
**Başkan** : Doç. Dr. Fatih ÇAVDUR
0000-0001-8054-5606
Uludağ Üniversitesi,
Mühendislik Fakültesi,
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı
İmza

**Üye** : Prof. Dr. Hüseyin Cenk ÖZMUTLU
0000-0003-2540-9657
Uludağ Üniversitesi,
Mühendislik Fakültesi,
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı
İmza



**Üye** : Dr. Yunus DEMİR
0000-0003-3868-1860
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı
İmza

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**



**Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN**
**Enstitü Müdürü**
**../../....**

**U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

18.02.2020

**Merve CÖMERTOĞLU ARIK**

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA ÇÖZÜCÜLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ

**Merve CÖMERTOĞLU ARIK**

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

**Danışman:** Doç. Dr. Fatih ÇAVDUR

Matematiksel programlama modellerinin çözümü için kullanılabilecek farklı çözücüler mevcuttur. Bu çözücülerin performansları farklılık gösterebilmektedir. Alternatif çözücülerin ortaya çıkması sonucu daha hızlı çözüme ulaşan çözücüler tercih edilmesi söz konusu olabilmektedir. Bu çalışma kapsamında bazı doğrusal programlama modelleri çözücüleri karşılaştırılarak yetenek ve hız açısından performanslarının analiz edilmesi amaçlanmıştır. Ticari çözücülerin maliyetli olmaları ve lisans gereksinimleri nedeniyle, alternatif olarak açık kaynak kodlu çözücülerin kullanılıp kullanılamayacağının araştırılması da bu çalışmanın amaçlarından biridir. Elde edilen sonuçların konuyla ilgili çalışma yapacaklara, çözücü performanslarıyla ilgili fikir vermesi amaçlanmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Matematiksel programlama, Doğrusal programlama, Doğrusal programlama çözücüsü, Çözücü performansı, Ticari çözücü, Açık kaynak kodlu çözücü, Performans analizi

## ABSTRACT

MSc Thesis

PERFORMANCE ANALYSIS OF LINEAR PROGRAMMING SOLVERS

**Merve CÖMERTOĞLU ARIK**

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Industrial Engineering

**Supervisor:** Doç. Dr. Fatih ÇAVDUR

There are different solvers that can be used for the solution of mathematical programming models. The perfomance of these solvers may differ. It may be preferable to use solvers that reach a faster solution as a result of the development of alternative solvers. In this study, it is aimed to analyze their performance in terms of ability and speed by comparing some linear programming models solvers. One of the aims of this study to search whether open-source solvers can be used as an alternative due to the cost of commercial solvers and license requirements. The results of this study obtained are intended to give ideas about solver performances to those who will work on the subject.



**Key words:** Mathematical programming, linear programming, linear programming solver, solver performance, commercial solver, open-source solver, performance analysis

## TEŞEKKÜR

Bu tezde, Uludağ Üniversitesi'nde yapmış olduğum matematiksel programlama çözücülerinin performans analizi konulu tez çalışmam sonucunda elde ettiğim bilgileri dikkatinize sunmaktayım. Bu çalışmayı hazırlarken geçirdiğim süreçte benden yardımlarını esirgemeyen başta Doç. Dr. Fatih ÇAVDUR olmak üzere Uludağ Üniversitesi Endüstri Mühendisliği bölümündeki hocalarıma, ayrıca manevi desteğini her an yanımda hissettiğim eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Merve CÖMERTOĞLU ARIK
18/02/2020

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

# SİMGELER DİZİNİ

| Simgeler | Açıklama |
|---|---|
| $z$ | Amaç fonksiyonu değeri |
| $c$ | Maliyet katsayıları |
| $x$ | Karar değişkenleri |
| $a$ | Teknolojik katsayılar |
| $B$ | Temel değişkenler matrisi |
| $N$ | Temel olmayan değişkenler matrisi |
| $w$ | Simpleks çarpanları vektörü |

# ŞEKİLLER DİZİNİ

**Sayfa**

# ÇİZELGELER DİZİNİ

**Sayfa**

# 1. GİRİŞ

Bazaraa ve ark. (2010) tarafından doğrusal programlama, bir dizi doğrusal eşitlik ve / veya eşitsizlik kısıtlamalarını veya sınırları karşılarken doğrusal bir fonksiyonun optimizasyonu (minimizasyon veya maksimizasyon) şeklinde tanımlanmıştır. Doğrusal programlama problemi ilk olarak 1947 yılında George B. Dantzig tarafından, Birleşik Devletleri Hava Kuvvetleri biriminde zaman aşamalı bir dağıtım, eğitim ve lojistik tedarik programı için mekanize bir planlama aracı geliştirme konusunda matematik danışanı olarak çalışırken ortaya çıkmıştır. Sovyet matematikçi ve ekonomist L. V. Kantorovich, 1939'da organizasyon ve planlama ile ilgili bu tür bir problemi formüle edip çözmüş olsa da, çalışmaları 1959'a kadar bilinmemiştir. Dantzig, yayınlanan ilk makalesinde, Hava Kuvvetleri biriminde uygulanacak plan ve programları doğrusal yapıda bir programlama modeli olarak ele almıştır. Doğrusal programlama terimi, ilk kez 1948 yılında iktisatçı ve matematikçi T. C. Koopmans tarafından kullanılmıştır.

1949 yılında George B. Dantzig tarafından doğrusal programları çözmek için Simplex Yöntemi ortaya konulmuştur (Bazaraa ve ark. 2010). Bu tarihten itibaren, farklı kişiler teorik gelişmeler, hesaplama yönleri ve konunun yeni uygulamalarının araştırılması dahil olmak üzere birçok farklı yöntem ile doğrusal programlama alanına katkıda bulunmuştur. Simpleks doğrusal programlama yöntemi, önemli ve karmaşık yönetim karar problemlerini modelleme yeteneği ve makul bir sürede çözüm üretme kabiliyeti nedeniyle oldukça fazla kabul görmektedir.

J. Laderman, Ulusal Standartlar Bürosunda 9 eşitlik kısıtı ve 27 negatif olmayan değişken içeren bir diyet planlama doğrusal programını çözmüştür. Hesap makineleri kullanılarak bu problemin çözümü 120 adam – gün sürmüştür ve çalışmanın sayfaları birbirine yapıştırılarak muhafaza edilmiştir. Günümüzde ise modern çağdaki bilgisayar olanakları ve Simpleks yönteminin gelişmiş uygulamaları kullanılarak, on binlerce kısıt ve değişkene sahip doğrusal programlar kolayca çözülebilmektedir. Ne kadar Simpleks yönteminin çeşitli varyantları geliştirilmiş ve diğer yeni rakip algoritmalar ileri sürülmüş olsa da Simpleks yöntemi doğrusal problemlerini çözmek için uygulanabilir ve popüler bir araç olmaya devam etmektedir (Bazaraa ve ark. 2010).

Çalışmanın içeriği genel olarak beş bölüme ayrılmıştır. 2. bölümde doğrusal programlama modeli temelleri, Simpleks yöntemi, Dual programlama modeli temelleri, Dual Simpleks yöntemi, Primal – Dual yöntem, İç Nokta algoritması, tamsayılı doğrusal programlama modeli temelleri teorik olarak açıklanmıştır. Bunlara ek olarak, matematiksel programlama modellerinin çözümünde kullanılan çözücüler, literatürde daha önce konuyla ilgili yapılmış çalışmalara genel bakış ve matematiksel programlama modellerinin çözücülerinin kullanıldığı platformlar yer almaktadır. Çalışmanın 3. bölümünde, test edilen Netlib (https://www.netlib.org/, 2020) veri seti ve problemlerin belirlenen çözücüler ile test edilmesi anlatılmıştır. 4. bölümde çalışma sonucu elde edilen bulgular ve 5. bölümde çalışma sonuçları sunulmuştur.

## 2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1. Doğrusal Programlama

Doğrusal programlama problemi formülasyonu aşağıdaki gibi özetlenebilir. Aşağıda $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ ile gösterilen ve minimize edilmek istenen amaç fonksiyonudur. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ katsayıları bilinen maliyet katsayıları ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ karar değişkenleridir.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcl}
\min & z & = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n & \\
\text{kısıtlar} & & & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
 & & & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
 & & & \vdots & & \vdots & + & \ldots & + & \vdots & & \vdots \\
 & & & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & \ldots & , & x_n & \geq & 0
\end{array} \quad (2.1)
$$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ eşitsizliği, $i$. kısıtı ifade etmektedir. $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ $için$ $a_{ij}$ katsayıları teknolojik katsayılar olarak adlandırılmaktadır. Bu katsayılar **A** matrisinde yer almaktadır.

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

$i$. bileşenin sutün vektörü olan ve sağ taraf vektörü olarak adlandırılan $b$ vektörü karşılanacak minimum gereklilikleri sağlamaktadır. $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ kısıtı ise negatif olmama kısıtı olarak adlandırılmaktadır. Tüm kısıtları sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişken değerleri seti uygun çözüm olarak adlandırılmaktadır. Bu değerlerin tamamına ise uygun alan ismi verilmektedir. Tüm uygun çözümlerin içinde amaç fonksiyonunu minimize veya maksimize eden karar değişkenlerini bulmak doğrusal programlama problemlerinin amacıdır.

Bir doğrusal programlama problemini sonlu olarak çözebilen algoritmanın hesaplama karmaşıklığını analiz etmek için, bu problemin çözmek için gereken eforun üst sınırının

belirlenmesi gerekmektedir. Bu efor, problemi çözmek için gereken, toplama, çarpma ve karşılaştırmalar gibi temel işlemlerin sayısı dikkate alınarak hesaplanabilir. Problemin boyutları açısından $g(m,n,L)$ fonksiyonunun belirlenmesi gerekmektedir. Bu fonksiyonda $L$, problemin tüm verilerini kaydetmek için gereken ikili bitlerin sayısıdır ve problemin girdi uzunluğu olarak bilinir. Yeterince büyük bir sabit olan $\tau > 0$ dikkate alınarak, problemi çözmek için algoritmanın gerektirdiği toplam temel işlem sayısı $\tau g(m,n,L)$ fonksiyonundan daha küçük olmak zorundadır. Böyle bir durumda, algoritmanın karmaşıklık derecesi $O\big(g(m,n,L)\big)$ ile hesaplanmaktadır.

$\mathbf{A}$, $m \times n$ boyutlu bir matris ve $\mathbf{b}$, $m$-boyutlu bir matris iken, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ve $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ olan bir sistem dikkate alındığında, $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = m$sıra olduğu varsayılırsa, $\mathbf{A}$ matrisinin sütunları yeniden düzenlendikten sonra, $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ olur. Burada $\mathbf{B}$, $m \times m$ boyutlu tersi alınabilir bir matris ve $\mathbf{N}$, $m \times (n-m)$ boyutlu bir matristir. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ denkleminde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$ olan çözüm, temel uygun çözüm olarak adlandırılır. Bu çözümde; $\mathbf{x}_B = \mathbf{B^{-1}b}$ ve $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$'dır. Eğer $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$ ise, $\mathbf{x}$, sistemin temel uygun çözümü olur. Burada $\mathbf{B}$, temel değişkenler matrisi ve $\mathbf{N}$, temel olmayan değişkenler matrisidir. $\mathbf{x}_B$ elemanları temel değişkenler (veya bağımlı değişkenler) ve $\mathbf{x}_N$ elemanları temel olmayan değişkenler (veya bağımsız değişkenler) olarak adlandırılmaktadır. Temel uygun çözüm sayısı, $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ile hesaplanır.

Amaç fonksiyonu aşağıda $z_0$ ile belirtilmiş bir doğrusal programlama problemi için temel uygun çözümün $\begin{pmatrix} \mathbf{B^{-1}b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ olduğu varsayılır.

$$z_0 = \mathbf{c}\begin{pmatrix} \mathbf{B^{-1}b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N)\begin{pmatrix} \mathbf{B^{-1}b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{c}_B\mathbf{B^{-1}b}$$

Bu durumda uygunluk için $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N$ olması gerekmektedir. Bu eşitlik $\mathbf{B^{-1}}$ ile çarpıldığında;

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in J}\mathbf{B}^{-1}a_j x_j \\ &= \bar{\mathbf{b}} - \sum_{j\in J}(y_j)x_j \end{aligned} \qquad (2.2)$$

temel değişken seti elde edilir. Bu denklemde $J$, temel olmayan değişkenlerin indislerinin kümesidir. Bu değişkenlere göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in J}\mathbf{B}^{-1}a_j x_j\right) + \sum_{j\in J}c_j x_j \\ &= z_0 - \sum_{j\in J}(z_j - c_j)x_j \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Bu durumda her temel olmayan değişken için $z_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}a_j$ ifadesine eşittir. Bu dönüşümler kullanılarak, doğrusal programlama problemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = z_0 - \sum_{j\in J}(z_j - c_j)x_j \\ \text{kısıtlar} \quad & \sum_{j\in J}(y_j)x_j + \mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} \\ & x_j \geq 0, \quad j \in J, \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Temel uygun çözüm ve bu çözüme karşılık gelen bir temel değişken dikkate alındığında, $x_k$ ile ifade edilen bazı temel olmayan değişkenler için $z_k - c_k > 0$ ise geliştirilebilir veya tüm temel olmayan değişkenler için $z_j - c_j \leq 0$ ise optimal nokta ile durdurulabilirdir. Eğer $z_k - c_k > 0$ ve $y_k$ vektörü en az bir pozitif bileşen içeriyorsa, $x_k$ değişkenindeki artış mevcut temel değişkenlerden biri tarafından engellenir, değişken 0'a düşer ve temel değişken olmaktan çıkar. Diğer taraftan eğer $z_k - c_k > 0$ ve $y_k \leq 0$ ise $x_k$ süresiz olarak artırılabilir ve optimal amaç fonksiyonu değeri sınırsızdır $(-\infty)$. Bu konu tam olarak Simpleks yönteminin özüdür.

Simpleks yönteminde başlangıç adımı olarak $\boldsymbol{B}$ temel değişkenler matrisi ile bir başlangıç temel uygun çözümü seçilir.

Temel adımlar ise aşağıdaki gibidir:

**Adım 1:** $\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b}$ olan sistem çözülür ($\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}$ olan eşsiz çözüm ile). $\mathbf{x_B} = \bar{\mathbf{b}},\ \mathbf{x}_N = \mathbf{0}\ ve\ z = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B$ olsun.

**Adım 2:** $\mathbf{wB} = \mathbf{c}_B$ olan sistem çözülür ($\mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ olan eşsiz çözüm ile). ($\mathbf{w}$ vektörü simpleks çarpanların vektörü olarak adlandırılır, çünkü bileşenleri amaç fonksiyonunu kanonik forma dönüştürmek için eklenen **A** matrisinin satırlarıdır.) Tüm temel olmayan değişkenler için $z_j - c_j = \mathbf{w}a_j - c_j$ hesaplanır.

$$\left| z_k - c_k = \max_{j \in J}\{z_j - c_j\} \right|$$

olsun. $z_k - c_k \leq 0$ ise, mevcut temel uygun çözüm, optimal çözüm olarak durdurulur. Aksi takdirde, giriş değişkeni olarak $x_k$ ile Adım 3'e gidilir. (Giriş değişkeni seçimi için kullanılan bu strateji, "Dantzig kuralı" olarak bilinir.)

**Adım 3:** $\mathbf{B}y_k = a_k$ olan sistem çözülür ($y_k = \mathbf{B}^{-1}a_k$ olan eşsiz çözüm ile). Eğer $y_k \leq 0$ ise, optimal çözümün sınırsız olduğu sonucuna varılır.

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

$\boldsymbol{e}_k$, $k$. pozisyondaki 1 hariç $(n-m)$'lik sıfır-vektörüdür. Eğer $y_k \not\leq 0$ ise, Adım 4'e gidilir.

**Adım 4:** $x_k$, giriş değişkeni olarak seçilir. $r$, engelleme değişkeninin indisi olmak üzere, $x_{\boldsymbol{B}_r}$ değişkeni, aşağıdaki minimum oran testi ile belirlenmektedir:

$$\frac{\overline{\boldsymbol{b}_r}}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

$a_k$'nın $a_{B_r}$ ile yer değiştirdiği noktada **B** temel değişkeni güncellenir, $J$ indis kümesi güncellenir ve Adım 1 tekrarlanır.

Her bir doğrusal programlama problemiyle ilişkili olan ve dual olarak adlandırılan bir başka doğrusal programlama problemi mevcuttur. Dual doğrusal program orijinal primal doğrusal programa göre bazı avantajlara sahip olabilir. Orijinal programın çözümünü elde etmek için kullanılabilir ve değişkenleri, orijinal doğrusal programın optimal çözüm kümesi hakkında çok yararlı bilgiler sağlamaktadır. Dual teorem, primal ve dual problemin eşit optimal amaç fonksiyonu değerlerine sahip olduğunu belirtmektedir (eğer problemler optimal çözümlere sahipse). Bu teoreme dayanarak, primal problemin $m$ kısıtlı, $n$ değişkenli normal maksimizasyon problemi olduğunu varsayarsak, dual problemin $m$ değişkenli ve $n$ kısıtlı normal minimizasyon problemi olacağı söylenebilir.

Primal doğrusal programın aşağıdaki gibi kanonik formda verildiği varsayılırsa:

$$\begin{aligned} \text{P:} \quad & \min \quad \mathbf{cx} \\ & \text{kısıtlar} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dual doğrusal program aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \text{D:} \quad & \max \quad \mathbf{wb} \\ & \text{kısıtlar} \quad \mathbf{wA} \leq \mathbf{c} \\ & \qquad\quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Her bir primal kısıt için bir dual değişken ve her primal değişken için bir dual kısıt mevcuttur.

Eğer primal doğrusal program aşağıdaki gibi standart formda verildiği varsayılırsa:

$$\begin{aligned} \text{P:} \quad & \min \quad \mathbf{cx} \\ & \text{kısıtlar} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dual doğrusal program aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{array}{lll} \text{D:} & \max & \mathbf{wb} \\ & \text{kısıtlar} & \mathbf{wA} \leq \mathbf{c} \\ & & \mathbf{w}, \text{ kısıtlanmamış değişken} \end{array} \qquad (2.8)$$

Bir maksimizasyon problemini çözmek için Simpleks yöntemi kullanıldığında (maksimizasyon problemi primal problem olarak adlandırılır), çözüme ilk uygun çözüm ile başlanır (çünkü başlangıç tablosundaki her kısıtın sağ taraf değeri negatif olmayan değerlerden oluşur). Başlangıç tablosunun amaç fonksiyonu satırındaki en az bir değişken negatif katsayıya sahiptir, bu nedenle başlangıçtaki primal çözüm dual uygun çözüm değildir. Simpleks tablosu aracılığıyla primal uygunluk korunur ve dual uygunluğa ulaşıldığında (amaç fonksiyonu satırında bir negatif olmayan değer olduğunda) optimal bir çözüm elde edilir. Bununla birlikte, 0-sütunundaki her değişkenin negatif olmayan katsayı olduğu (dual uygun tablo) ve en az bir kısıtın sağ taraf değerinin negatif değer aldığı (ilk uygun olmayan) tablo ile doğrusal programlama problemi çözümüne başlamak daha kolaydır. Dual Simpleks metodu, negatif olmayan amaç fonksiyonu satırını sağlar ve sonunda sağ taraf değerlerinin negatif olmadığı bir tablo elde eder. Bu noktada optimal tablo elde edilir. Bu teknik dual uygunluğu sağladığı için Dual Simpleks metodu olarak adlandırılır.

Belirli durumlarda yapay değişkenler eklemeden uygun bir başlangıç temel çözümü (tüm $\bar{b}_\iota \geq 0$ olan) bulmak zordur. Bu durumlarda, uygun olmayan fakat dual uygun olan (bir minimizasyon problemi için tüm $z_j - c_j \leq 0$ olan) başlangıç temel çözümü bulmak mümkündür. Bu gibi durumlarda dual uygulanabilirlik ve tamamlayıcı gevşekliği sürdüren ve primal uygunluğa doğru yönelen bir dizi Simpleks tablonun geliştirileceği Simpleks yönteminin bir varyantının kullanılması yararlı olacaktır.

Dual Simpleks yönteminde başlangıç adımı olarak tüm $j$ değerleri için $z_j - c_j = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}a_j - c_j \leq 0$ olan primal $\boldsymbol{B}$ temel çözümü bulunur.

Temel adımlar ise aşağıdaki gibidir:

**Adım 1:** Eğer $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$, ise durulur; mevcut çözüm optimaldir. Aksi takdirde, $\overline{b_r} < 0$ olan $r$ pivot satırı seçilir; $\overline{b_r} = minimum\{\overline{b_\iota}\}$.

**Adım 2:** Eğer tüm $j$ değerleri için $y_{rj} \geq 0$ ise, durulur; dual sınırsızdır ve primal uygun değildir. Aksi takdirde, aşağıdaki minimum oran testiyle $k$ pivot sütunu seçilir:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}$$

**Adım 3:** $y_{rk}$ değeri için pivot tablo yapılır ve Adım 1'e dönülür.

Dual Simpleks metoduna benzer olarak, dual uygunluk ile başlayan ve tamamlayıcı gevşekliği korurken, primal uygunluğu elde etmeye devam eden bir başka yöntem de Primal-Dual Algoritma yöntemidir. Bununla birlikte, Dual Simpleks metodu ve Primal-Dual metod arasındaki fark, Primal-Dual algoritmanın dual uygun çözümünün temel çözüm olmasının zorunlu olmamasıdır. Verilen bir dual uygun çözüme göre, zor dual kısıtlara karşılık gelen primal değişkenler belirlenir. Simpleks yönteminin ilk aşaması kullanılarak belirlenmiş olan primal değişkenler ile birlikte primal uygunluğa ulaşılmaya çalışılır. Eğer primal uygunluk elde edilemezse, Simpleks yönteminin ilk aşama problemine en az bir yeni değişken alınarak dual uygun çözüm değiştirilir. Primal çözüm uygun hale gelene kadar veya dual çözüm sınırsız hale gelene kadar bu aşama devam ettirilir.

Primal – dual yönteminde başlangıç adımı olarak tüm $j$ değerleri için $\mathbf{w}a_j - c_j \leq 0$ olan bir $\mathbf{w}$ vektörü seçilir. $Q$, pozitif olmasına izin verilen primal değişkenlerin indislerinin kümesidir ve $Q = \{j : \mathbf{w}a_j - c_j = 0\}$ olarak ifade edilir.

Temel adımlar ise aşağıdaki gibidir:

**Adım 1:** $Q = \{j: \mathbf{w}a_j - c_j = 0\}$ olarak kabul edilir ve aşağıdaki sınırlı primal problem çözülür:

$$\begin{array}{lllllll} \min & \sum_{j\in Q} 0x_j & + & \mathbf{1}\mathbf{x}_a & & & \\ \text{kısıtlar} & \sum_{j\in Q} a_j x_j & + & \mathbf{x}_a & = & \mathbf{b} & \\ & & & x_j & \geq & 0 \quad \forall j \in Q & \\ & & & \mathbf{x}_a & \geq & \mathbf{0} & (2.9) \end{array}$$

$x_0$ ile optimal amaç fonksiyonu değeri belirlenir. Eğer $x_0 = 0$ ise, durulur; optimal çözüm elde edilmiştir. Aksi takdirde; $\mathbf{v}^*$**,** yukarıda belirtilen sınırlı primal problem için optimal dual çözüm olarak ifade edilir.

**Adım 2:** Eğer tüm $j$ değerleri için $\mathbf{v}^* a_j \leq 0$ ise, durulur; dual problem sınırsızdır ve primal çözüm de uygun değildir. Aksi takdirde;

$$Q = \min_j \left\{ \frac{-(\mathbf{w}a_j - c_j)}{\mathbf{v}^* a_j} : \mathbf{v}^* a_j > 0 \right\} > 0$$

olarak belirlenir ve $\mathbf{w}$ değeri, $\mathbf{w} + Q\mathbf{v}^*$ ile değiştirilir. Adım 1 tekrarlanır (Bazaraa ve ark. 2010).

Doğrusal programlama problemlerinin çözümünde önemli bir yer tutan Simpleks algoritması, 1984 yılında N. Karmarkar tarafından yeni bir polinom – zaman algoritması önermesiyle ciddi bir rakip elde etmiştir. Karmarkar algoritması, uygun alanda belirlenen bir alanı tamamen eniyilemek için izlenen izdüşümsel dönüşümlerin yinelenmesine dayanır. Doğrusal programlama problemlerinin çözümünde Karmarkar yönteminin kullanılması için problemin aşağıdaki biçimde bulunması gerekmektedir:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ \text{kısıtlar} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{1x} = \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Bu gösterimde **A**, $m, n \geq 2$ olan, tüm elemanları tamsayı olan $m \times n$ boyutlu bir matris, **c**, tüm elemanları tamsayı olan bir matris, **1**, n adet 1'den oluşan bir satır vektörüdür ve burada aşağıdaki varsayımlar geçerli olmalıdır:

- Verilen doğrusal programlama problemi için $x^0 = \left[\frac{1}{n}\ \frac{1}{n}\ \ldots\ \frac{1}{n}\right]$ noktası uygun olmalıdır.
- Verilen doğrusal programlama problemi için optimal z-değeri 0'a eşittir.

$\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots x_n]^T$ matrisinde **K**, $m \times n$'lik bir matristir. $\boldsymbol{c} = [c_1\ c_2\ \ldots c_n]$ matrisi ise n-boyutlu sütun vektörüdür ve 0'a eşittir. Karmarkar algoritmasının adımları aşağıdaki gibidir:

**Adım 1:** $x^0 = \left[\frac{1}{n}\ \frac{1}{n}\ \ldots\ \frac{1}{n}\right]^T$ uygun noktasından başlanır ve $k = 0$ olarak alınır.

**Adım 2:** Eğer $cx^k < \epsilon$ ise durulur, değilse 3. adıma gidilir.

**Adım 3:** Aşağıda verilen denklem ile dönüştürülmüş birim simpleks $y^{k+1} = [y_1^{k+1}\ y_2^{k+1}\ \ldots\ y_n^{k+1}]^T$ noktası elde edilir.

$$y^{k+1} = \left[\frac{1}{n}\ \frac{1}{n}\ \ldots\ \frac{1}{n}\right]^T - \frac{\theta(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[Diag(x^k)]c^T}{\|c_p\|\sqrt{n(n-1)}}$$

Verilen denklemde $\|c_p\|$, $(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[Diag(x^k)]c^T$uzunluğuna eşittir ve $P$ ise ilk $m$ satırı $A[Diag(x^k)]$ olan son satırı 1 vektörü olan ve $0 < \theta < 1$ değerleri arasında algoritmanın yakınsamasını sağlamak için seçilen $(m+1) \times n$'lik matristir. Yakınsamayı sağlamak için $\theta = \frac{1}{4}$ olarak seçilebilir. Ardından orijinal alanda $y^{k+1}$ noktasına karşılık gelen noktayı belirlemek için merkezleme

dönüşümü kullanılarak yeni bir $x^{k+1}$ noktası elde edilir. $x^{k+1} = f^{-1}(y^{k+1}/x^k)$ Adım 1'e dönülerek $k$ artırılır ve Adım 2 ile devam edilir.

## 2.2. Tamsayılı Doğrusal Programlama

Doğrusal programlama problemlerinde değişkenlerin tamsayı değerleri olması durumunda, probleme tamsayılı doğrusal programlama problemi adı verilir. Değişkenlerin yalnızca bir kısmının tamsayı değerlerine sahip olması durumunda bu model, karışık tamsayılı programlama problemi olarak adlandırılır. Eğer değişkenlerin tamamı tamsayılardan oluşuyor ise, saf tamsayılı programlama problemi olarak adlandırılır. Yalnızca 0 ve 1 ikili değişkenlerini içeren tamsayılı problemlere ise ikili (veya 0-1 tamsayı) programlama problemi adı verilir.

Karışık tamsayılı programlama problemlerinin genel formülasyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{kısıtlar} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b, \qquad i = 1,2,\dots,m \\ & x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \\ & x_j \text{ tamsayı}, \quad j = 1,2,\dots,I \; I \leq n \end{aligned} \tag{2.11}$$

Bu formülasyonda $I = n$ olduğunda, problem saf tamsayılı programlama problemine dönüşmektedir.

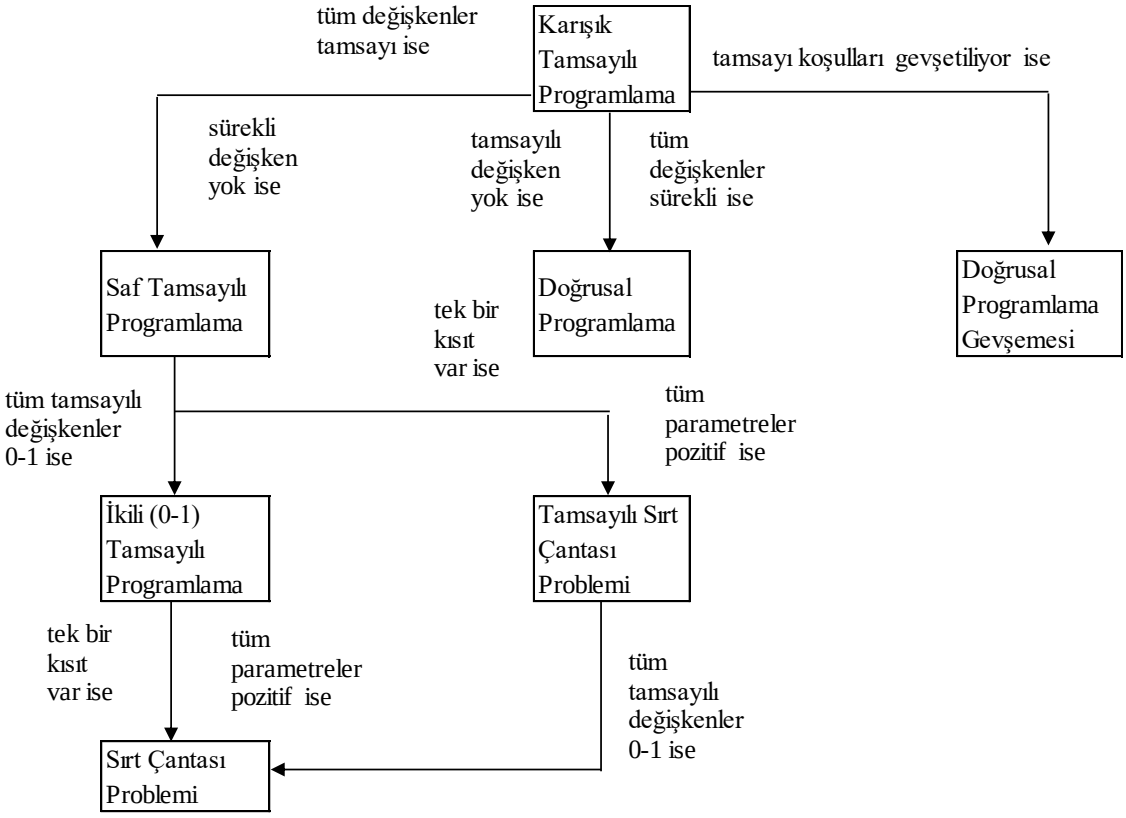
Problem değişkenlerinin 0 ve 1 ile temsil edildiği ikili programlama problemleri için değişkenler aşağıdaki gibi ifade edilir (Hillier ve Lieberman 2001):

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j.\text{karar evet ise} \\ 0, & \text{eğer } j.\text{karar hayır ise} \end{cases}$$

Karışık tamsayılı programlama modellerinde tüm değişkenler tamsayılı ise ve sürekli değişken bulunmuyorsa, problem saf tamsayılı programlama modeline dönüşmektedir. Eğer tamsayılı değişken bulunmuyorsa ve tüm değişkenler sürekli ise, problem doğrusal

programlama modeline dönüşmektedir. Doğrusal programlama ayrıca, belirli bir karışık tamsayılı programlama probleminin tamsayı koşullarının gevşetilmesi (veya yok sayılması) yoluyla da elde edilir. Bu nedenle elde edilen doğrusal programlama modeline doğrusal programlama gevşemesi (belirli bir tamsayılı programlama modelinin) adı verilir. Doğrusal programlama gevşemesi, $x$ ve $y$ değişkenlerinin ikisini de içerir ve $y$ vektörünü, sürekli değişkenlerin bir vektörü olarak davranır.

Tamsayı değişkenlerinin 0 veya 1 ile kısıtlandığı bir tamsayı programına 0-1 (ikili) tamsayılı programlama modeli adı verilir. Amaç fonksiyonu ve kısıt katsayıları pozitif olan tek bir $<$ doğrusal kısıt içeren ikili doğrusal programlama problemine sırt çantası (knapsack) problemi denir. Tek bir kısıt ve tüm kısıtların katsayılarının pozitif olduğu, tamsayılı değişken değerlerinin 0-1 ile kısıtlı olmadığı tamsayılı programlama modeline tamsayılı sırt çantası problemi ismi verilir. Belirli koşullar altında çeşitli karışık tamsayılı programlama sınıfları arasındaki ilişki Şekil 2.1'de verilmiştir.




**Şekil 2.1.** Karışık tamsayılı programlama sınıfları (Chen ve ark. 2010)

Karışık tamsayılı programlama problemlerinin çözümünde Dal–Sınır algoritması kullanılabilmektedir. Dal–Sınır algoritmasının uygulanmasında başlangıç olarak $z^* = -\infty$ olarak belirlenir, burada $z^*$, $z$ fonksiyonunun güncel değeridir. Aşağıdaki dallanma adımı, sınırlama adımı, budama (fathoming) adımı ve optimallik testi tüm probleme uygulanır.

**Dallanma Adımı:** Budama adımı uygulanmamış alt problemler içinden en son oluşturulan alt problem seçilir. Alt problemin doğrusal programlama gevşemesi için optimal çözümde tamsayı olmayan bir değere sahip tamsayı kısıtlı değişkenler arasında dallanma değişkeni olarak değişkenlerin doğal sıralamasında ilki seçilir. Bu değişken $x_j$ ve bu değişkenin çözüm değeri $x_j^*$ olsun. Alt problem için düğümden dallanma ile iki yeni alt problem yaratma amacıyla; $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ ve $x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$ kısıtları eklenir.

**Sınırlama Adımı:** Her yeni alt problem için doğrusal programlama gevşemesine Simpleks yöntemi (veya yeniden optimize ederken Dual Simpleks yöntemi) uygulayarak ve elde edilen optimal çözüm için $Z$ değerini kullanarak sınır elde edilir.

**Budama Adımı:** Her yeni alt problem için, aşağıda verilen üç budama testi uygulanır ve testlerin herhangi biriyle budanan alt problemler çıkarılır.

Test 1: Sınır değeri $\leq Z^*$midir? Buradaki $Z^*$, mevcut $Z$ fonksiyonunun güncel değeridir.

Test 2: Doğrusal programlama gevşemesinin uygun bir çözümü yok mudur?

Test 3: Doğrusal programlama gevşemesi için optimal çözüm, tamsayı kısıtlı değişkenler için tamsayı değerlere sahip midir? (Bu çözüm mevcut çözümden daha iyi ise, yeni mevcut çözüm olarak belirlenir ve test 1, daha iyi $Z^*$ ile tüm budanmamış alt problemlere yeniden uygulanır.)

**Optimallik Testi:** Alt problem kalmadığında durulur, mevcut çözüm optimaldir. Aksi takdirde, başka bir iterasyon ile devam edilir.

## 2.3. Doğrusal Programlama Çözücüleri

Tez çalışması kapsamında farklı çözücüler kullanılarak çeşitli testler gerçekleştirilmiştir. Bu kısımda, öncelikle mevcut çeşitli doğrusal programlama çözücüleri hakkında bilgi verilmiştir. Bu çalışma kapsamında ticari çözücülerden CPLEX ve GUROBI, açık kaynak kodlu çözücülerden ise CLP, LP_SOLVE ve GLPK kullanılarak testler gerçekleştirilmiştir.

**LINGO:** Lingo, doğrusal, doğrusal olmayan (dışbükey ve dışbükey olmayan / küresel), ikinci dereceden, ikinci dereceden kısıtlı, ikinci dereceden konik, yarı belirli, stokastik ve tamsayılı optimizasyon modellerini daha hızlı, daha kolay ve daha verimli çözmek için tasarlanmış kapsamlı bir araçtır. Lingo, doğrusal, doğrusal olmayan ve tamsayılı problemleri hızla okunabilir bir formda formüle etmeye olanak sağlamaktadır. Doğrudan veritabanından veya elektronik tablolardan bilgi alan modeller oluşturmaya olanak sağlar. Modeller Lingo içinde oluşturulabilir, çözülebilir veya doğrudan yazılan bir uygulamadan çağrılabilir (https://www.lindo.com/index.php/products/lingo-and-optimization-modeling).

**MATLAB:** Matlab Optimization Toolbox, doğrusal programlama, karışık tamsayılı doğrusal programlama, ikinci dereceden programlama, doğrusal olmayan programlama, kısıtlı doğrusal en küçük kareler, doğrusal olmayan en küçük kareler ve doğrusal olmayan denklemler için çözücüleri içermektedir. Sürekli ve kesikli problemlere en uygun çözümleri bulmak, trade-off analizi yapmak ve algoritma ve uygulamalara optimizasyon metodlarını dahil etmek için Matlab çözücüleri kullanılabilir. Toolbox ile parametre tahmini, bileşen seçimi ve parametre ayarını içeren optimizasyon görevleri tasarlanabilir. Portföy optimizasyonu, kaynak atama ve üretim planlama, çizelgeleme gibi uygulamalarda en uygun çözümü bulmak için kullanılabilir (https://www.mathworks.com/products/matlab.html).

**XPRESS:** Xpress Optimizasyon paketi - sadece Xpress olarak da adlandırılır – karışık tamsayılı doğrusal problemleri çözmek için tasarlanmış ticari tescilli bir yazılımdır. Xpress, bilgisayar platformlarında çok yaygın kullanılmaktadır ve ayrıca birkaç

programlama dili için çağrılabilr bir kütüphane API'si (Application Programming Interface) ve bağımsız bir komut satırı arayüzü de dahil olmak üzere çeşitli arayüzler sunmaktadır (https://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization).

**CPLEX:** Genellikle sadece CPLEX olarak adlandırılan IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, büyük ölçekli karışık tamsayılı doğrusal problemleri çözmek için tasarlanmış ticari bir çözücüdür. CPLEX, IBM tarafından geliştirilmiştir. Yazılım ayrıca çeşitli arayüzlere sahiptir, böylece çözücü ile farklı programlama dilleri veya programlar ile bağlantı kurmak mümkündür. Bununla birlikte programın tek başına da çalıştırılabilmesi mümkündür (https://www.ibm.com/tr-tr/analytics/cplex-optimizer).

**GUROBI:** GUROBI optimizer, karışık tamsayılı matematiksel optimizasyon problemlerinin yanısıra doğrusal olmayan problemler için de kullanılan modern bir çözücüdür. GUROBI optimizer C dilinde yazılmıştır, tüm bilgisayar platformlarında geçerlidir ve çeşitli programlama dillerinden erişilebilirdir. Standart bağımsız modelleme sistemleri, problemleri tanımlamak ve modellemek için kullanılabilir (http://www.gurobi.com/).

**LP_SOLVE:** lp_solve, doğrusal (karışık-tamsayılı) programları çözmek için kullanılan ve tamsayılı programları Revize Simpleks ve Dal–Sınır metodu ile çözen ücretsiz ve açık kaynak kodlu programlama çözücüsüdür. Temel olarak lp_solve, karışık tamsayılı programlama problemlerini çözmek için neredeyse her programlama dilinden çağırılabilen API adı verilen bir dizi kütüphanedir (http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/).

**GLPK:** GLPK (GNU Doğrusal Programlama Kiti) paketi, büyük ölçekli doğrusal programlama, karışık tamsayılı programlama ve ilişkili diğer problemlerin çözümü için tasarlanmıştır. GLPK paketi; Primal ve Dual Simpleks yöntemleri, Primal ve Dual İç Nokta yöntemi, Dal–Kesim yöntemi, GNU MathProg için çevirmen, API bileşenlerini içeren ücretsiz açık kaynak kodlu programlama çözücüsüdür (https://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html).

**CLP:** Coin - OR projesi yöneylem araştırması topluluğuna açık kaynak kodlu yazılım oluşturmayı amaçlamaktadır. Coin - OR projesine bağlı olan projelerden bazıları: karışık tamsayılı doğrusal programlama problemlerini çözmek için kullanılan Symphony, doğrusal programlama tabanlı Dal–Kesim kütüphanesi olan CBC, doğrusal optimizasyon problemlerini çözmek kullanılan CLP kütüphanesi şeklinde özetlenebilir (https://www.coin-or.org/).

Tez çalışması kapsamında belirlenen LP_SOLVE, GLPK ve CLP çözücülerinin kaynak kodu kamuya açık olduğu ve genellikle çok iyi belgelendiği için bir yazılımda herhangi bir kısıtlama olmaksızın kullanılmıştır. Böylece farklı platformlarda çözücüleri derlemek mümkün olmuştur. Ayrıca, hemen hemen tüm açık kaynak kodlu programlama kitlerinin herhangi bir yazılım ürünü ve bir doğrusal programlama çözücüsü arasında veri alışverişi için kullanılabilecek bir çeşit yapılandırılmış API'ye sahip olduğuna da dikkat edilmelidir. Ek olarak bu doğrusal programlama çözücüleri için mevcut uygulama programı arayüzleri R programlama diliyle çağırılacak şekilde kullanılmıştır.

### 2.4. Kaynak Araştırması

Literatürde çözücü performanslarını analiz eden geçmiş çalışmalara rastlanmaktadır. Bunlara örnek olarak Bongartz ve ark. (1997) çalışması verilebilir. Büyük ölçekli problemlerin çözümünde LANCELOT ve MINOS çözücülerinin karşılaştırılmasını ele alan bir çalışmada, 913 problem seçilmiştir. Problemlerden doğrusal olanlar Netlib veri setleri kullanılarak, bunun dışındakiler ise CUTE veri seti kullanılarak elde edilmiştir. Toplamda 112 doğrusal problem, 225 kuadratik problem, 300 kısıt problemi (bound – constrained problem), 58 doğrusal kısıtlı problem ve 218 doğrusal olmayan kısıtlı problem çözücülerin test edilmesi için kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda LANCELOT çözücüsünün kısıtsız ve doğrusal olmayan kısıtlı problemlerde avantajlı olmasının yanı sıra MINOS çözücüsünün doğrusal kısıtlı problemlerde çok iyi performans sergilediği belirtilmiştir. Ayrınca serbestlik derecesinin büyük olduğu durumlarda da LANCELOT çözücüsünün daha iyi sonuç verdiği belirtilmiştir.

Bir başka çalışmada ise Dolan ve ark. (2001) optimizasyon yazılımlarının karşılaştırılması için performans profilleri belirlenmiştir. Performans profilleri,

çözücünün hesaplama süresi ve tüm çözücüler içindeki en iyi süreye bağlı olarak hesaplanmıştır. Çözücülerin test edilmesi için COPS 3.0 problem seti (Anonim 2020) ve Mittelmann tarafından oluşturulan doğrusal programlama problemleri kullanılmıştır. LANCELOT, MINOS, SNOPT ve LOQO çözücüleri karşılaştırılmıştır.

Bir başka çalışma kapsamında ise Meindl ve Templ (2012) çözücülerin karışık tamsayılı doğrusal programlama problemleri üzerindeki performansları karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada CBC (branch - and - cut tabanlı doğrusal programlama çözücüsü), CPLEX (https://www.ibm.com/tr-tr/analytics/cplex-optimizer), GLPK (https://www.gnu.org/software/glpk/), GUROBI (http://www.gurobi.com/), LP_SOLVE (http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/), SCIP (C - L - S) (https://scip.zib.de/) ve XPRESS (https://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization) çözücüleri test edilmiştir. Bu çalışmada kullanılan problemler de Mixed Integer Linear Programming kütüphanesinden alınmıştır. Bu kütüphanede bulunan problem örnekleri, karmaşıklık seviyesi (complexity) farklı olan ve farklı çözücüleri karşılaştırmak için kullanılabilecek karışık tamsayılı doğrusal problemleri içermektedir. Çalışmada kullanılan veri seti, iki saat içinde en az bir çözücü tarafından optimal çözüme ulaşabilen 87 problemden oluşmaktadır. Sonuç olarak tüm çözücüler arasında CPLEX'ten sonra en iyi çözücünün GUROBI olduğu ve açık kaynaklı çözücülerin ticari çözücülere oranla çok daha yavaş çözüme ulaşmalarına rağmen GLPK – CLP ve lp_solve olarak sıralandığı belirtilmiştir.

Gearhart J. ve ark. (2013) tarafından yapılan bir başka çalışmada ise, açık kaynaklı doğrusal programlama çözücüleri karşılaştırması incelenmiştir. Çalışmada öncelikle potansiyel açık kaynaklı çözücüleri belirlemek için doğrusal programlama araçları araştırması yapılmıştır. Araştırma sonucu COIN-OR Doğrusal Programlama (CLP), GNU Doğrusal Programlama Kiti (GLPK), lp_solve ve MINOS çözücülerinin test edilmesi kararlaştırılmıştır. Bu çözücülerin test edilmesi için kullanılan toplam 201 problem, üç farklı veri kaynağından elde edilmiştir. Netlib veri kaynağının LP kütüphanesinden 138 adet problem, çalışmanın desteklendiği CCO (Contingency Contcractor Optimisation) projesi dahilinde bulunan 24 problem ve Hans Mittelmann tarafından oluşturulan veri setinden (Anonim, 2019) 39 doğrusal programlama problemi, çözücüler tarafından test edilmek üzere seçilmiştir. Problemler CPLEX çözüsünde çözüm

sürelerine göre zor ve kolay olarak gruplanmıştır. 180 problem kolay, 21 problem zor olarak belirlenmiştir. Sonunda bir endüstri standardı olan CPLEX ile karşılaştırılmıştır. Çalışma sonucunda hiçbir açık kaynaklı çözücünün CPLEX'ten daha iyi performans göstermediği ve çözücüleri içinden CLP'nin hız ve yetenek açısından en iyi performansı gösteren çözücü olduğu bulunmuştur.

Kronqvist J. ve ark. (2018) tarafından yapılan bir başka çalışmada ise, konveks karışık tamsayılı doğrusal olmayan programlama (MINLP – mixed integer nonlinear programming) problemlerini çözmek için deterministik yazılımların incelenmesi ve yaygın olarak kullanılan çözücülerin karşılaştırması incelenmiştir. Bu çalışmada test seti olarak MINLPLib kütüphanesindeki konvex olarak sınıflandırılan 335 problemin tümü kullanılmıştır. Çözücüler arasındaki farkların daha iyi vurgulanması için konveks MINLP problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın yöntemlerin özeti verilmiştir. Çözücülerin farklı özelliklere sahip problemlerde nasıl performans gösterdiğini incelemek için test seti sürekli gevşeme farkına, doğrusal olmama derecesine ve göreceli bağımsız değişken sayısına bağlı alt kümelere ayrılmıştır. Çalışma sonuçları, belirli bir çözücü veya yöntemin belirli bir MINLP problem tipi için ne kadar uygun olduğuna dair bilgiler sunmaktadır.

Literatür çalışması kapsamında incelenen makalelerde kullanılan çözücüler ve çözücüler ile ilgili temel bilgiler (erişilebilir olup olmadıkları, lisans gerekip gerekmediği, hangi programlama dilinin kullanıldığı bilgileri) Çizelge 2.1'de yer almaktadır.

**Çizelge 2.1.** Literatür çalışma özetleri

| No | Çalışmanın İsmi | Kullanılan yazılım / solver | Erişim | Gerekli Lisanslar | Kullanılan Programlama Dili |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Comparison of Open-Source Linear Programming Solvers | -COIN-OR Linear Programming (CLP) | Var | Eclipse Public License Version 1.0 | C++ |
| | | -GNU Linear Programming Kit (GLPK) | Var | GNU General Public License | C |
| | | -Lp_solve | Var | GNU Lesser General Public License | C |
| | | -MINOS | Yok | Ücretli bir lisans gerekli | Fortran 77 |
| 2 | Analysis of Commercial and Free and Open Source Solvers for Linear Optimization Problems | -GNU Linear Programming Kit (GLPK) | Var | GNU General Public License | C |
| | | -Lp_solve | Var | GNU Lesser General Public License | C |
| | | -COIN-OR Linear Programming (CLP) | Var | Eclipse Public License Version 1.0 | C++ |
| | | -CPLEX | Var | Akademik lisans gerekli | Kendi dilinde yazılmıştır |
| | | -GUROBI | Var | Akademik lisans gerekli | C |
| 3 | Benchmarking Optimization Software with Performance Profiles | -LANCELOT | Var | Akademik lisans gerekli | AMPL |
| | | -MINOS | Yok | Ücretli bir lisans gerekli | AMPL |
| | | -SNOPT | Var | Akademik lisans gerekli | AMPL |
| | | -LOQO | Var | Ücretli bir lisans gerekli | AMPL |

**Çizelge 2.1.** Literatür çalışma özetleri (devam)

| No | Çalışmanın İsmi | Kullanılan yazılım / solver | Erişim | Gerekli Lisanslar | Kullanılan Programlama Dili |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | A Review and Comparison of Solvers for Convex MINLP | -AlphaECP (Alpha Extended Cutting Plane) | Var | Ücretli bir lisans gerekli | GAMS |
| | | -ANTIGONE (Algorithms for Continuous Integer Global Optimization of Nonlinear Equations) | Var | Ücretli bir lisans gerekli | GAMS |
| | | -AOA (AIMMS Outer Approximamation) | Var | Ücretli bir lisans gerekli | AIMMS |
| | | -BARON (Branch and Reduce Optimization Navigator) | Var | Ücretli bir lisans gerekli | GAMS |
| | | -BONMIN (Basic Open-source Nonlinear Mixed Integer Programming) | Var | Eclipse Public License Version 1.0 | GAMS |
| | | -Couenne (Convex Over and Under Envelopes for Nonlinear Estimation) | Var | Eclipse Public License Version 1.0 | GAMS |
| | | -DICOPT (Discrete Continuous Optimizer) | Var | Ücretli bir lisans gerekli | GAMS |
| | | -Juniper | Var | Açık kaynak kodlu | JuMP |
| | | -Knitro | Var | Ücretli bir lisans gerekli | GAMS |
| | | -LINDO | Var | Ücretli bir lisans gerekli | GAMS |
| | | -Minotaur (Mixed-Integer Nonlinear Optimization Toolkit: Algorithms, Underestimators and Relaxations) | Var | Açık kaynak kodlu | Kendi dilinde yazılmıştır |
| | | -Muriqui | Var | Açık kaynak kodlu | Kendi dilinde yazılmıştır |
| | | -Pavito | Var | Açık kaynak kodlu | JuMP |
| | | -SBB (Simple Branch and Bound) | Var | Ücretli bir lisans gerekli | GAMS |
| | | -SCIP (Solving Constraint Integer Programs) | Var | Akademik lisans gerekli | GAMS |
| | | -SHOT (Supporting Hyperplane Optimization Toolkit) | Var | Eclipse Public License Version 2.0 | GAMS |

## 2.5. Doğrusal Programlama Çözücüleri için Kullanılan Platformlar

Tez çalışması kapsamında kullanılan açık kaynak kodlu çözücüler için R-Studio platformu, ticari çözücüler için ise Maximal Software Mathematical Programming Language (MPL), OptiMax kütüphanesi kullanılmıştır.

RStudio, doğrudan kod yürütmeyi destekleyen bir konsol, sözdizimi vurgulama düzenleyicisi ve çizim, geçmiş, hata ayıklama ve çalışma alanı yönetimi araçları ile R için entegre bir geliştirme ortamıdır (https://rstudio.com/). RStudio ortamında GLPK, LP_SOLVE ve CLP çözücülerini kullanmak için ROI (R Optimization Infrastructure) kütüphanesine bağlı ilgili çözücülerin ve çözümü test edilecek Netlib datasetinin kütüphaneleri kullanılmıştır.

MPL (Matematiksel Programlama Dili), model geliştiricinin karmaşık optimizasyon modellerini açık, özlü ve verimli bir şekilde formüle etmesini sağlayan gelişmiş bir modelleme sistemidir. MPL'de geliştirilen modeller, bugün piyasada bulunan çok sayıda ticari optimize ediciden herhangi biri ile çözülebilir (http://www.maximalsoftware.com/mpl/).

MPL OptiMax kütüphanesi, optimizasyon modellerini son kullanıcı uygulamalarına entegre etmek için özel olarak tasarlanmış, nesne yönelimli bir bileşen kütüphanesidir. OptiMax tasarımı Microsoft Activex / Automation bileşen yazılım teknolojilerine dayanmaktadır. OptiMax, MPL modellerini Excel / Access için VBA, Visual Basic, Visual C++, Delphi, Java ve Web için standart kodlama dilleri gibi çeşitli farklı programlama platformlarına sorunsuz bir şekilde entegre etmek için kullanılabilmektedir.

# 3. MATERYAL VE YÖNTEM

## 3.1. Test Problemleri

Çalışmanın bu bölümünde problemlerin bazı (veya tümü) değişkenlerinin tamsayı (ikili tamsayı) olduğu karışık tamsayılı matematiksel problemler için sağlanan sonuçlar analiz edilecektir. Netlib (https://www.netlib.org/, 2020) veri seti, karışık tamsayılı problemler için veri setleri sunmaktadır. Test senaryoları LP kütüphanesinden alınmıştır. Bu kütüphanede bulunan problem örnekleri karmaşıklık bakımından farklılık gösteren ve farklı çözücüleri karşılaştırmak için kullanılabilen bir dizi gerçek dünya karışık tamsayılı doğrusal problemleri içermektedir.

Tez çalışması kapsamında Netlib veri seti kullanılarak farklı çözücülerin performans değerlendirilmesi yapılması amaçlanmıştır. Netlib veri setinin LP kütüphanesindeki 93 adet problem dikkate alınmıştır.

Çizelge 3.1'de Netlib veri setinin LP kütüphanesinden seçilmiş olan problemlerin kısıt sayısı, değişken sayısı ve sıfır olmayanların sayısı yer almaktadır. Bu veriler doğrultusunda problemlerin kısıt ve değişken sayılarının grafik üzerinde gösterimi Şekil 3.1'de yer almaktadır. Problemlerden kısıt sayısı en fazla olan problem, 8388 kısıt ve 8426 değişken bulunan "*stocfor3*" problemidir. Değişken sayısı en fazla olan problem ise 3000 kısıt ve 13525 değişken bulunan "*fit2p*" problemidir. Kısıt sayısı ve değişken sayısı en az olan problem, 2 kısıt ve 8 değişkene sahip "*seba*" isimli problemdir.

**Çizelge 3.1.** Netlib veri setindeki problemlerin temel özellikleri

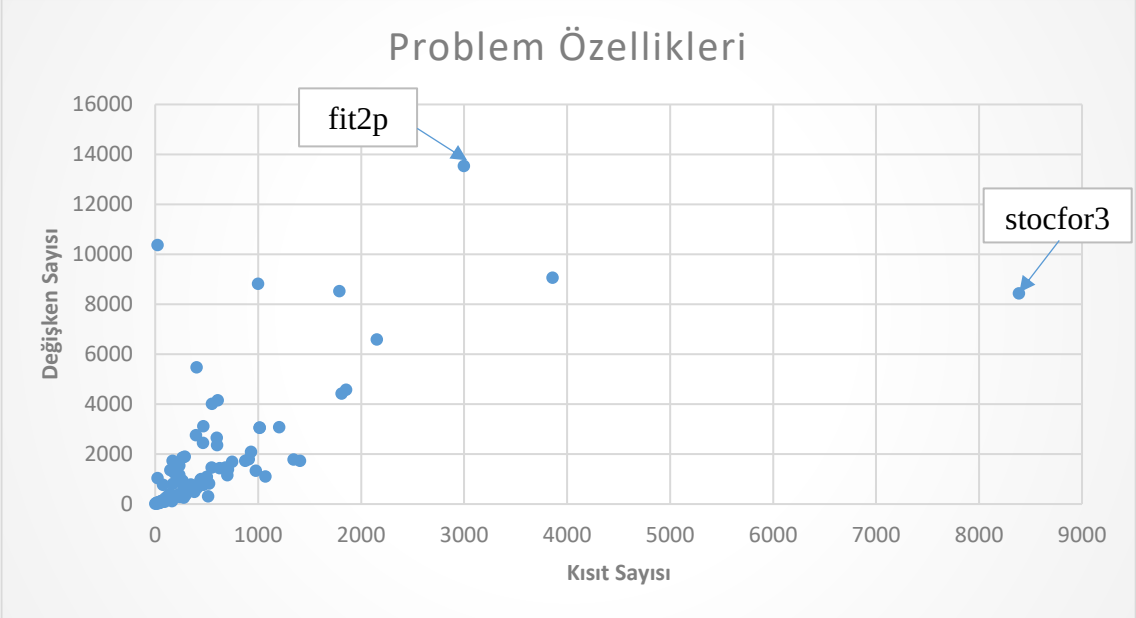
| Problem İsmi | Kısıt Sayısı | Değişken Sayısı | SFR OLM | Problem İsmi | Kısıt Sayısı | Değişken Sayısı | SFR OLM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| adlittle | 53 | 94 | 372 | pilot.we | 602 | 2346 | 8234 |
| afiro | 11 | 14 | 36 | pilot4 | 348 | 770 | 4603 |
| agg | 164 | 107 | 867 | pilot87 | 1811 | 4416 | 70189 |
| agg2 | 280 | 250 | 2267 | pilotnov | 748 | 1686 | 11390 |
| agg3 | 516 | 302 | 4300 | recipe | 48 | 71 | 359 |
| bandm | 173 | 223 | 1485 | sc105 | 32 | 31 | 212 |
| beaconfd | 16 | 39 | 86 | sc205 | 62 | 61 | 503 |
| blend | 51 | 58 | 396 | sc50a | 17 | 16 | 72 |
| bnl1 | 446 | 990 | 4613 | sc50b | 15 | 15 | 56 |
| bnl2 | 932 | 2083 | 10177 | scagr25 | 240 | 391 | 1223 |
| boeing1 | 287 | 418 | 2764 | scagr7 | 60 | 103 | 305 |
| boeing2 | 122 | 160 | 811 | scfxm1 | 233 | 379 | 2147 |
| bore3d | 40 | 60 | 333 | scfxm2 | 467 | 759 | 4317 |
| brandy | 104 | 173 | 1641 | scfxm3 | 701 | 1139 | 6487 |
| capri | 142 | 203 | 1241 | scorpion | 57 | 83 | 327 |
| cycle | 909 | 1784 | 12791 | scrs8 | 174 | 799 | 2542 |
| czprob | 464 | 2433 | 4866 | scsd1 | 77 | 760 | 2388 |
| d2q06c | 1855 | 4561 | 30506 | scsd6 | 147 | 1350 | 4316 |
| d6cube | 402 | 5467 | 34332 | scsd8 | 397 | 2750 | 8584 |
| degen2 | 382 | 473 | 3851 | sctap1 | 269 | 339 | 1444 |
| degen3 | 1406 | 1721 | 24422 | sctap2 | 977 | 1326 | 5717 |
| dfl001 | 3861 | 9052 | 31400 | sctap3 | 1344 | 1767 | 7630 |
| e226 | 146 | 249 | 2261 | seba | 2 | 8 | 11 |
| etamacro | 290 | 474 | 1913 | share1b | 93 | 194 | 1028 |
| fffff800 | 292 | 636 | 4792 | share2b | 93 | 79 | 691 |
| finnis | 296 | 363 | 1361 | shell | 236 | 1157 | 2320 |
| fit1d | 24 | 1024 | 13386 | ship04l | 288 | 1886 | 4267 |
| fit1p | 627 | 1427 | 9618 | ship04s | 188 | 1238 | 2804 |
| fit2d | 25 | 10364 | 127769 | ship08l | 470 | 3099 | 7100 |
| fit2p | 3000 | 13525 | 50284 | ship08s | 234 | 1526 | 3508 |
| ganges | 409 | 647 | 3123 | ship12l | 609 | 4147 | 9222 |
| gfrd.pnc | 277 | 742 | 1580 | ship12s | 267 | 1847 | 4121 |
| greenbea | 1015 | 3048 | 22970 | sierra | 877 | 1723 | 6202 |
| greenbeb | 1015 | 3039 | 22870 | stair | 241 | 269 | 3518 |
| grow15 | 300 | 645 | 5620 | standata | 164 | 331 | 757 |
| grow22 | 440 | 946 | 8252 | standmps | 266 | 925 | 2167 |
| grow7 | 140 | 301 | 2612 | stocfor1 | 44 | 59 | 313 |

SFR OLM: Sıfır Olmayanlar

**Çizelge 3.1.** Netlib veri setindeki problemlerin temel özellikleri (devam)

| Problem İsmi | Kısıt Sayısı | Değişken Sayısı | SFR OLM | Problem İsmi | Kısıt Sayısı | Değişken Sayısı | SFR OLM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| israel | 163 | 141 | 2256 | stocfor2 | 1070 | 1088 | 5994 |
| kb2 | 37 | 30 | 260 | stocfor3 | 8388 | 8426 | 46700 |
| lotfi | 117 | 282 | 596 | truss | 1000 | 8806 | 27836 |
| maros.r7 | 2152 | 6578 | 80167 | tuff | 142 | 388 | 4047 |
| maros | 524 | 809 | 5717 | vtp.base | 40 | 61 | 177 |
| modszk1 | 550 | 1455 | 2936 | wood1p | 170 | 1716 | 44572 |
| nesm | 598 | 2645 | 12869 | woodw | 551 | 4006 | 14468 |
| perold | 503 | 1074 | 5346 | 25fv47 | 682 | 1446 | 9895 |
| pilot.ja | 708 | 1369 | 10840 | 80bau3b | 1789 | 8510 | 18645 |
| pilot | 1204 | 3066 | 40102 | | | | |

SFR OLM: Sıfır Olmayanlar




**Şekil 3.1.** Netlib problemlerinin kısıt ve değişken sayıları grafiği

### 3.2. Seçilen Çözücülerin Test Edilmesi

Çalışmanın bu bölümünde amacı, ticari ve ticari olmayan (açık kaynak kodlu) çözücülerle ilgili kıyaslama karşılaştırmalarının sonuçları özetlenmiştir.

Tüm problemler, Windows 10 Home Single Language 64-bit (10.0, Build 18362) (18362.19h1_release.190318-1202) işletim sistemine sahip, Intel® Core ™ i5-7200U CPU @ 2.50GHz (4 CPUs), ~2.7GHz işlemcili, 8192MB RAM'e sahip bilgisayar ile çözdürülmüştür.

Çalışma kapsamında kullanılan iki ticari ve üç ticari olmayan çözücü için aşağıdaki versiyonlar kullanılmıştır:

- CPLEX (12.6.2.0)
- GUROBI (7.5.2)
- CLP (Coin – OR) (0.4)
- GLPK (0.3-0)
- LP_SOLVE (0.3-2)

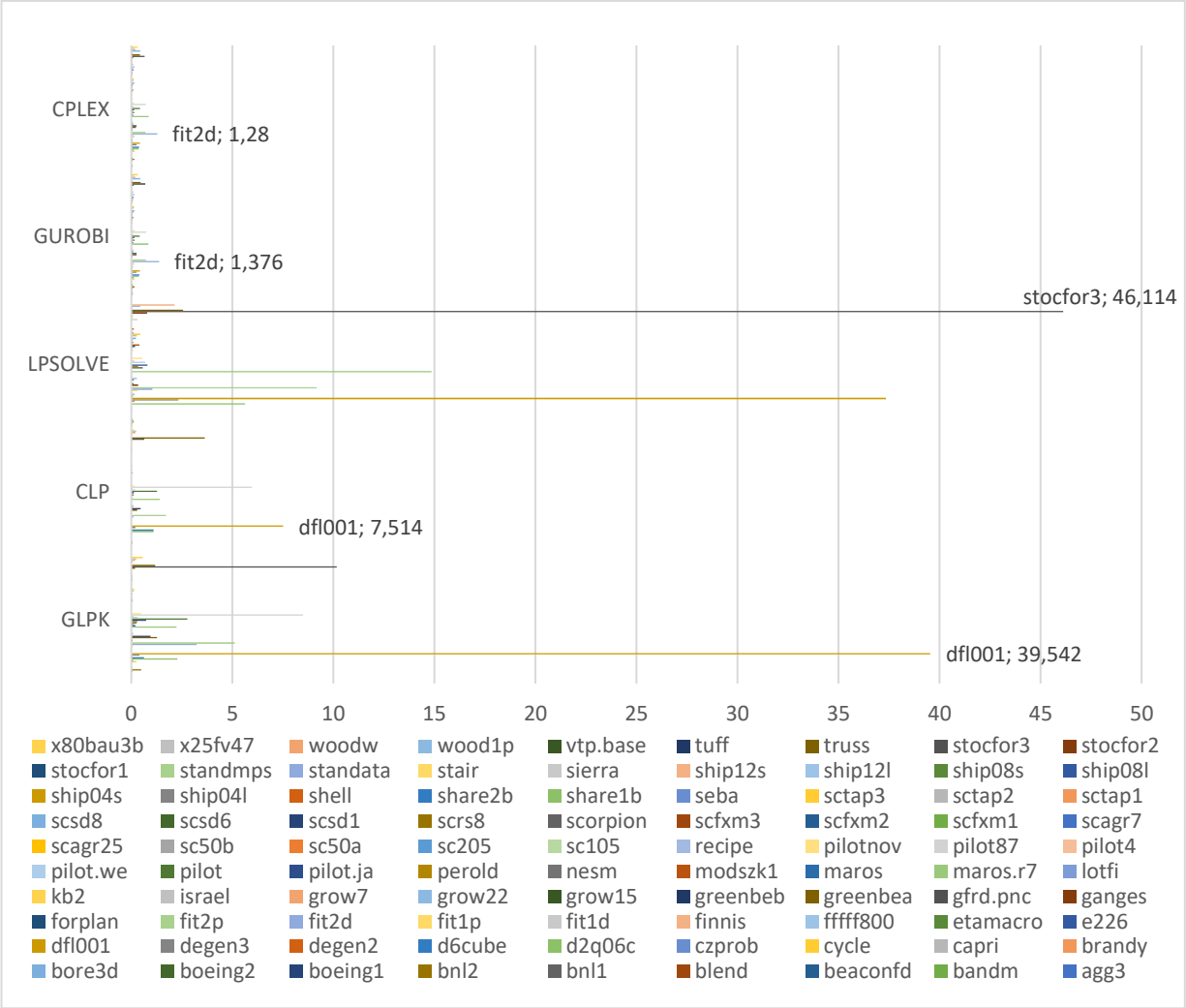
## 4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Tüm test problemlerinin içinde Lp_solve çözücüsü için optimal çözüme ulaşmayan toplam 28 problem mevcuttur. Bu problemlerin isimleri Çizelge 4.1'de verilmiştir.

**Çizelge 4.1.** lp_solve çözücüsü ile optimal çözüme ulaşmayan problemler

| **Problem İsimleri** | |
|---|---|
| bnl1 | sc205 |
| bnl2 | sc50a |
| boeing1 | sc50b |
| boeing2 | ship04l |
| brandy | ship04s |
| cycle | ship08l |
| czprob | ship08s |
| d6cube | ship12l |
| forplan | ship12s |
| greenbea | tuff |
| greenbeb | pilot |
| maros | pilot87 |
| modszk1 | x25fv47 |
| sc105 | x80bau3b |

Tez çalışması kapsamında öncelikle tüm problemler 5 çözücü için 1'er kez çözdürülmüştür. Saniye cinsinden çözüm sonuçları Şekil 4.1'de verilmiştir. Bu verilere göre tüm problemlerin 5 farklı çözücü tarafından birer kez çözdürülmesi sırasında en uzun sürede optimal çözüme ulaşan problemler Çizelge 4.2'de mevcuttur.




**Şekil 4.1.** Netlib problemlerinin tüm çözücüler için çözüm süreleri grafiği

**Çizelge 4.2.** Tüm çözücüler için en uzun sürede çözülen problem isimleri

| **Çözücü ismi** | **Problem İsmi** | **Çözüm Süreleri (sn)** |
|---|---|---|
| GLPK | dfl001 | 39,542 |
| CLP | dfl001 | 7,514 |
| LPSOLVE | stocfor3 | 46,114 |
| GUROBI | fit2d | 1,376 |
| CPLEX | fit2d | 1,280 |

Tez çalışması kapsamında kullanılan tüm çözücülerin problem setindeki problemlerin çözüm sürelerine göre en uzun, en kısa sürede elde edilen çözüm süreleri, bu en uzun ve en kısa çözümler arasındaki süreler, ortalama süreler ve sürelerin standart sapmaları ile ilgili detaylı bilgiler Çizelge 4.3'te yer almaktadır. Bu veriler hesaplanırken, tüm

problemlerin tek çözüm sonuçları dikkate alınarak standart sapmalar hesaplanmıştır. Bu verilere göre standart sapması en yüksek olan çözücü Lp_solve iken, en düşük olan çözücünün CPLEX çözücüsü olduğu tespit edilmiştir.

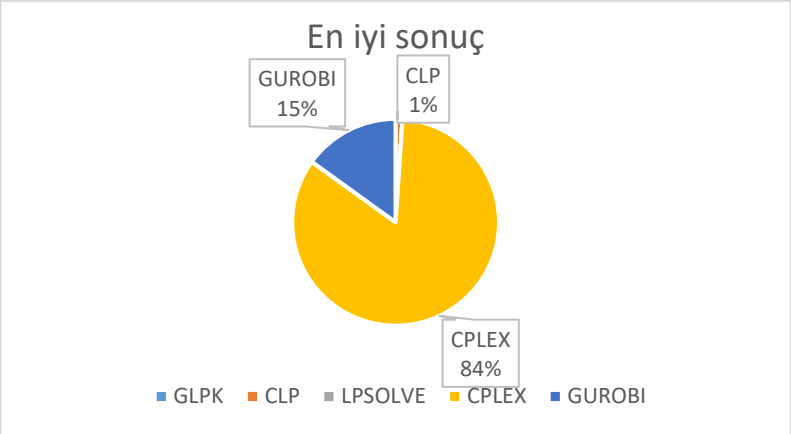
**Çizelge 4.3.** Tüm çözücüler için çözüm süreleri istatistikleri

| Çözücü ismi | En uzun süre | En kısa süre | Süre farkı | Ortalama | Standart Sapma |
|---|---|---|---|---|---|
| GLPK | 39,542 | 0,007 | 39,535 | 0,901 | 4,306 |
| CLP | 7,514 | 0,008 | 7,507 | 0,300 | 1,071 |
| LPSOLVE | 46,114 | 0,000 | 46,114 | 1,389 | 6,306 |
| GUROBI | 1,376 | 0,013 | 1,363 | 0,143 | 0,211 |
| CPLEX | 1,280 | 0,000 | 1,280 | 0,136 | 0,204 |

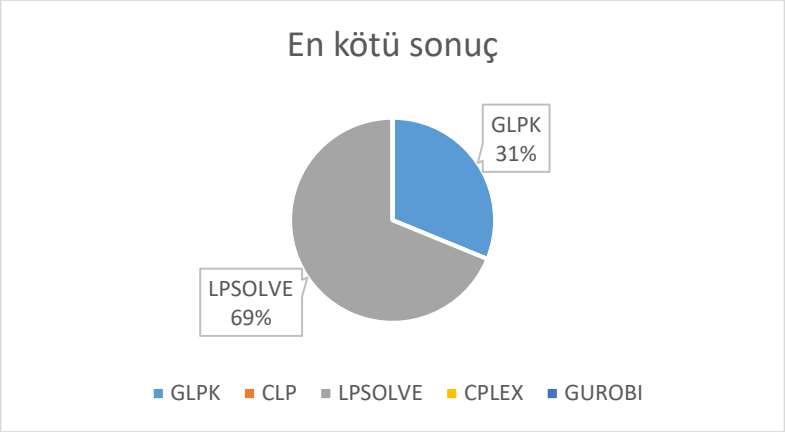
Tüm çözücülerin 1'er kez çözüm denemelerinin en iyi sonucu ve en kötü sonucu sağladığı çözücülerin listesi Çizelge 4.4'te yer almaktadır. Bu çizelgeye göre, tüm problemlerin 78 adedi en iyi sonucu CPLEX çözücüsü ile, 14 adedi GUROBI çözücüsü ile ve 1 adedi CLP çözücüsü ile elde edilmiştir. Tüm problemlerin 64 adedi ise en kötü sonucu LPSOLVE çözücüsü ile ve 29 adedi GLPK çözücüsü ile elde edilmiştir. Sonuçlar ile ilgili grafikler Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'te verilmiştir.

**Çizelge 4.4.** Tüm problemlerin en iyi ve en kötü sonucu elde ettiği çözücüler

| Çözücü İsmi | En iyi sonuç | En kötü sonuç |
|---|---|---|
| GLPK | 0 | 29 |
| CLP | 1 | 0 |
| LPSOLVE | 0 | 64 |
| CPLEX | 78 | 0 |
| GUROBI | 14 | 0 |




**Şekil 4.2.** Tüm problemlerin en iyi sonuçları elde ettiği çözücüler




**Şekil 4.3.** Tüm problemlerin en kötü sonuçları elde ettiği çözücüler

Netlib verisetine ait test edilmesi belirlenmiş problemler, Visual Basic for Applications platformunda OptiMax kütüphanesi kullanılarak MPL ortamında CPLEX ve GUROBI çözcüleri ile 100'er kez çözdürülmüştür. CPLEX çözücüsü için çözüm sürelerinin ortalamalarının bulunduğu grafik Ek-1'de, GUROBI çözücüsü için çözüm sürelerinin ortalamalarının bulunduğu grafik Ek-2'de verilmiştir.

Ticari çözücüler ile çözümler elde edildikten sonra, problemler RStudio platformunda ROI (R Optimization Infrastructure) kütüphanesi kullanılarak CLP, GLPK ve Lp_solve çözücüleri ile 100'er kez çözdürülmüştür. CLP çözücüsü için çözüm sürelerinin ortalamalarının bulunduğu grafik Ek-3'te, GLPK çözücüsü için çözüm sürelerinin ortalamalarının bulunduğu grafik Ek-4'te ve Lp_solve çözücüsü için çözüm sürelerinin ortalamalarının bulunduğu grafik Ek-5'te verilmiştir.

100’er tekrarlı çözüm sonuçlarında ticari çözücüler olan CPLEX ve GUROBI çözücüleriyle en uzun sürede optimal çözüme ulaşan problemler sırasıyla, 1,17 sn ile ”*fit2d*” ve 1,30 sn ile ”*fit2d*” problemidir. CLP, GLPK ve lp_solve açık kaynak kodlu çözücüleriyle en uzun sürede optimal çözüme ulaşan problemler ise sırasıyla şu şekildedir; 7,62 sn ile “*dfl001*”, 38,96 sn ile “*dfl001*” ve 44,63 sn ile “*stocfor3*” problemleridir.

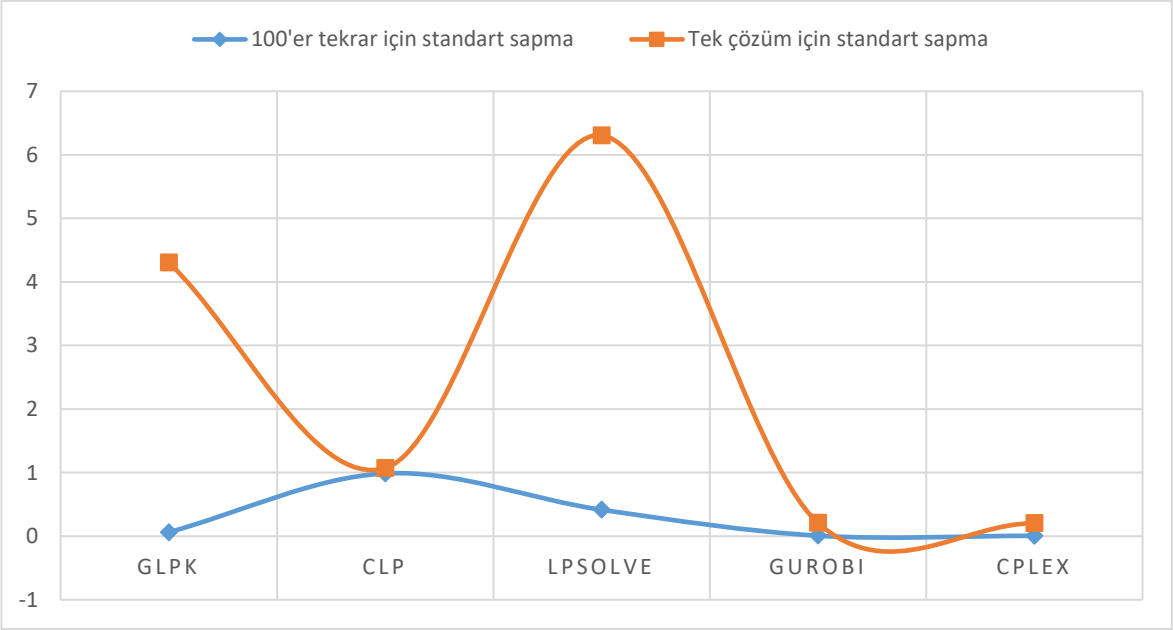
Tüm çözücülerin 100’er kez çözdürülmesi sonucu çözücülerin karşılaştırılması amacıyla istatistik değerleri Çizelge 4.5’te verilmiştir. Burada tüm problemler için en kısa ve en uzun çözüm süreleri, bu süreler arasındaki farklar, sürelerin ortalamaları ve standart sapmaları detaylı olarak verilmiştir.

**Çizelge 4.5.** Tüm çözücüler için tekrarlı çözüm süreleri istatistikleri

| **Çözücü ismi** | **En uzun süre** | **En kısa süre** | **Süre farkı** | **Ortalama** | **Standart Sapma** |
|---|---|---|---|---|---|
| GLPK | 41,368 | 0,006 | 41,362 | 0,894 | 0,063 |
| CLP | 95,325 | 0,007 | 95,318 | 0,329 | 0,987 |
| LPSOLVE | 53,940 | 0,000 | 53,940 | 1,413 | 0,416 |
| GUROBI | 1,372 | 0,000 | 1,372 | 0,130 | 0,008 |
| CPLEX | 1,283 | 0,000 | 1,283 | 0,118 | 0,007 |

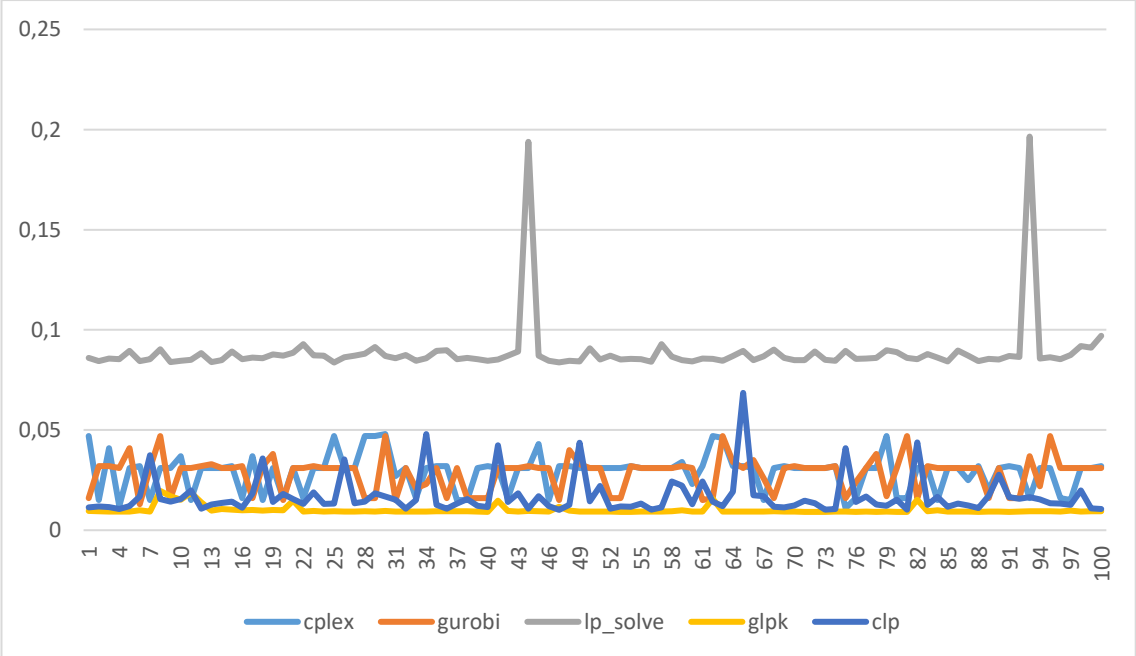
Çalışma sonucunda elde edilen verilere göre, birer kez çözüm testi sonucunda standart sapma değerleri küçükten büyüğe doğru sırasıyla şu şekildedir: CPLEX – GUROBI – CLP – GLPK – LP_SOLVE. Tüm problemlerin 100’er kez çözüm testi sonucunda standart sapma değerleri küçükten büyüğe doğru sırasıyla şu şekildedir: CPLEX – GUROBI – GLPK – LP_SOLVE – CLP.

Tek çözüm ve tekrarlı çözümler sonunda elde edilen standart sapma değerleri Şekil 4.4’te sunulmuştur. Bu değerlere göre Lp_solve ve GLPK çözücüleri için tekrarlı çözümler standart sapmanın büyük ölçüde azalmasını sağlamıştır. CLP, GUROBI ve CPLEX çözücüleri için standart sapma değerleri tek çözüm ve tekrarlı çözümler için çok değişiklik göstermemektedir.




**Şekil 4.4.** Tüm çözücülerin standart sapma değerleri

Netlib veri setinde bulunan "*agg2*" probleminin tüm çözücüler ile elde edilen çözüm süreleri saniye cinsinden Şekil 4.5'te verilmiştir. Buradan da anlaşılacağı gibi LPSOLVE çözücüsü dışındaki tüm çözücülerde yakın sonuçlar elde edilmesine rağmen, LPSOLVE çözücüsü için çözüm sonuçları tüm denemelerde daha yüksek çıkmıştır.




**Şekil 4.5.** "*agg2*" probleminin çözüm sonuçları

# 5. SONUÇ

Tez çalışması kapsamında literatürde geçerli olan Netlib datasetinin doğrusal programlama kütüphanesine ait 93 adet problem, belirlenmiş olan çözücülerin çözüm süreleri açısından performanslarının değerlendirilmesi amacıyla test edilmiştir. Belirlenmiş matematiksel programlama problemi çözücülerinden ticari olan çözücüler CPLEX ve GUROBI iken, açık kaynak kodlu çözücüler, GLPK, CLP ve Lp_solve çözücüleridir. Öncelikle tüm test problemlerinin birer kez çözdürülmesi, ardından 100'er kez çözdürülmesi ile istatistiki veriler elde edilmiştir.

Çalışma kapsamında lp_solve çözücüsü dışındaki tüm çözücüler tüm problemler için optimal çözümü elde etmiştir. Elde edilen optimal çözüm değerleri, Netlib datasetlerinin literatürde geçerli olan optimal çözüm değerlerine eşittir.

Literatürde yapılan çalışmalara paralel olarak ticari çözücülerin, çözüm süresi performansı açısından açık kaynak kodlu çözücülerden daha iyi sonuçlar elde ettiği tespit edilmiştir. Tek çözüm ve tekrarlı çözüm testlerinin her iki test için de en iyi çözüm sonuçlarının sağlandığı çözücü CPLEX'dir. Hem ticari hem de açık kaynak kodlu çözücüler arasında sapması en az olan çözücüdür. Tez çalışması kapsamında yapılan performans analizinin, konuyla ilgili çalışacak olan kişilere fikir vermesi amaçlanmıştır.

## KAYNAKLAR


**Anonim, 2012a.** GLPK (GNU Linear Programming Kit). https://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html - (Erişim tarihi: 12.01.2020)

**Anonim, 2016a.** COIN – OR (CLP). https://www.coin-or.org/ - (Erişim tarihi: 12.01.2020)

**Anonim, 2016b.** MPL Maximal Software. http://www.maximalsoftware.com/mpl/ - (Erişim tarihi: 13.01.2020)

**Anonim, 2019a.** Benchmarks for Optimization Software. http://plato.asu.edu/bench.html - (Erişim tarihi: 13.01.2020)

**Anonim, 2020a.** CPLEX Optimizer. https://www.ibm.com/tr-tr/analytics/cplex-optimizer - (Erişim tarihi: 12.01.2020)

**Anonim, 2020b.** COPS: Large Scale Optimization Problem. https://www.mcs.anl.gov/~more/cops/ - (Erişim tarihi: 12.01.2020)

**Anonim, 2020c.** GUROBI Optimizer. https://www.gurobi.com/ - (Erişim tarihi: 12.01.2020)

**Anonim, 2020d.** LINGO 18.0. https://www.lindo.com/index.php/products/lingo-and-optimization-modeling - (Erişim tarihi: 12.01.2020)

**Anonim, 2020e.** lp_solve 5.5.2.5. http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/ - (Erişim tarihi: 12.01.2020)

**Anonim, 2020f.** MATLAB. https://www.mathworks.com/products/matlab.html - (Erişim tarihi: 12.01.2020)

**Anonim, 2020g.** NETLIB https://www.netlib.org/ - (Erişim tarihi: 28.01.2020)

**Anonim, 2020.** RStudio. https://rstudio.com/ - (Erişim tarihi: 13.01.2020)

**Anonim, 2020h.** XPRESS Optimization. https://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization - (Erişim tarihi: 12.01.2020)

**Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J, Sherali, H.D. 2010.** Linear Programming and Network Flows. John Wiley & Sons, Inc., Canada, 748 pp.

**Bongartz, I., Conn, A.R., Gould, N.I.M., Saunders, M.A., Toint, L. 1997.** A Numerical Comparison Between the LANCELOT and MINOS Packages for Large-Scale Constrained Optimization. Council fort he Central Laboratory of the Research Councils.

**Chen, D.S, Batson, R.G., Dang, Y. 2010.** Applied Integer Programming. A John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, 468 pp.

**Dolan, E.D, More, J.J., Munson, T.S. 2004.** Benchmarking Optimization Software with COPS 3.0. Mathematics and Computer Science.

**Gearhart, J.L., Adair, K.L., Detry, R.J., Durfee, J.D., Jones, K.A., Martin, N. 2013.** Comparison of Open-Source Linear Programming Solvers.

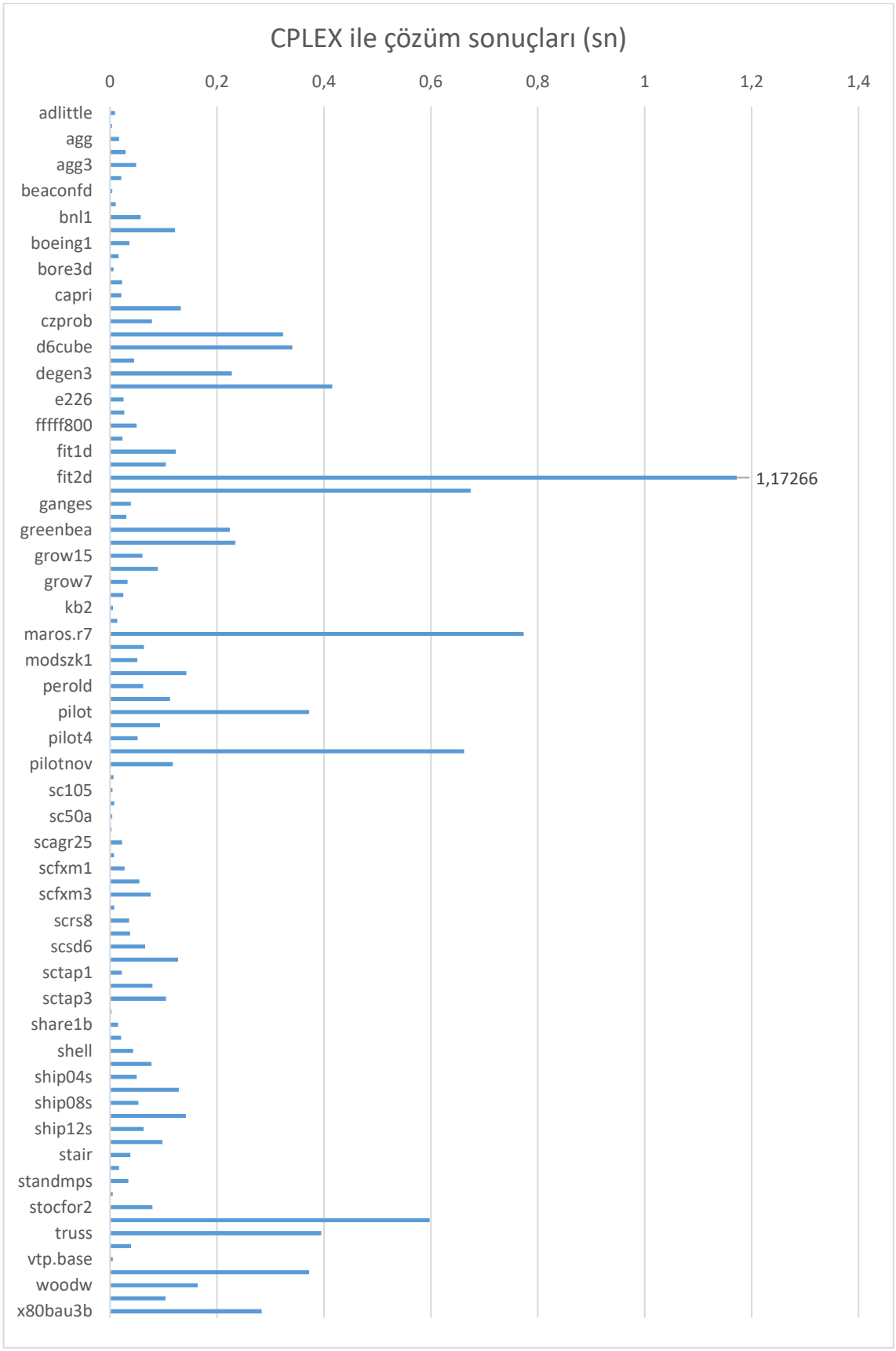
**Hillier, F.S., Lieberman G.J. 2001.** Introduction to Operations Research. McGraw-Hill Companies Inc., New York, 1213 pp.

**Kronqvist, J., Bernal, D.E., Lundell, A., Grossmann, I.E. 2018.** A Review and Comparison of Solvers for Convex MINLP. Optimization and Engineering.

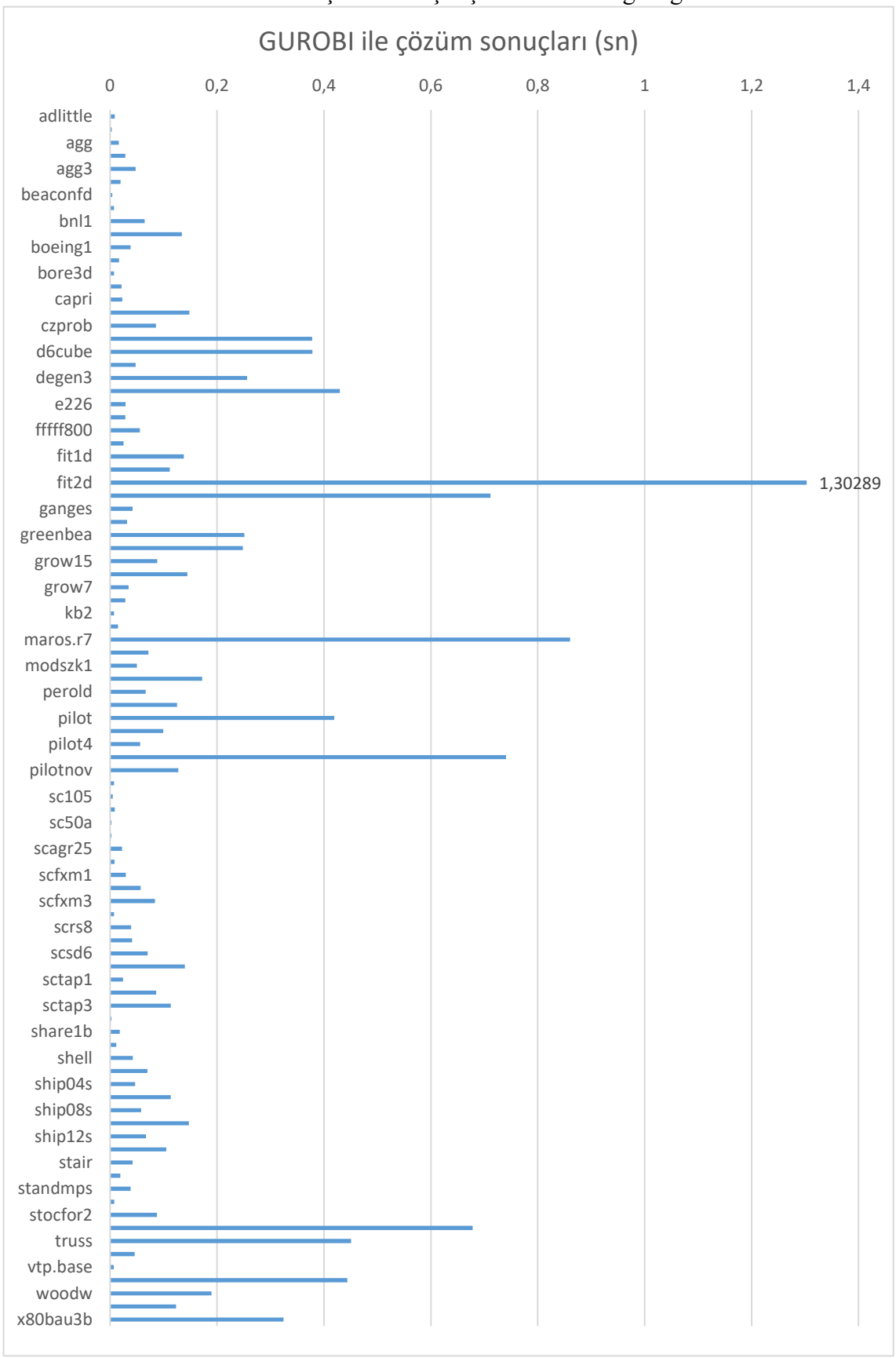
**Meindl, B., Templ, M. 2012.** Analysis of Commercial and Free and Open Source Solvers for Linear Optimization Problems. Vienna University of Technology.

## EKLER

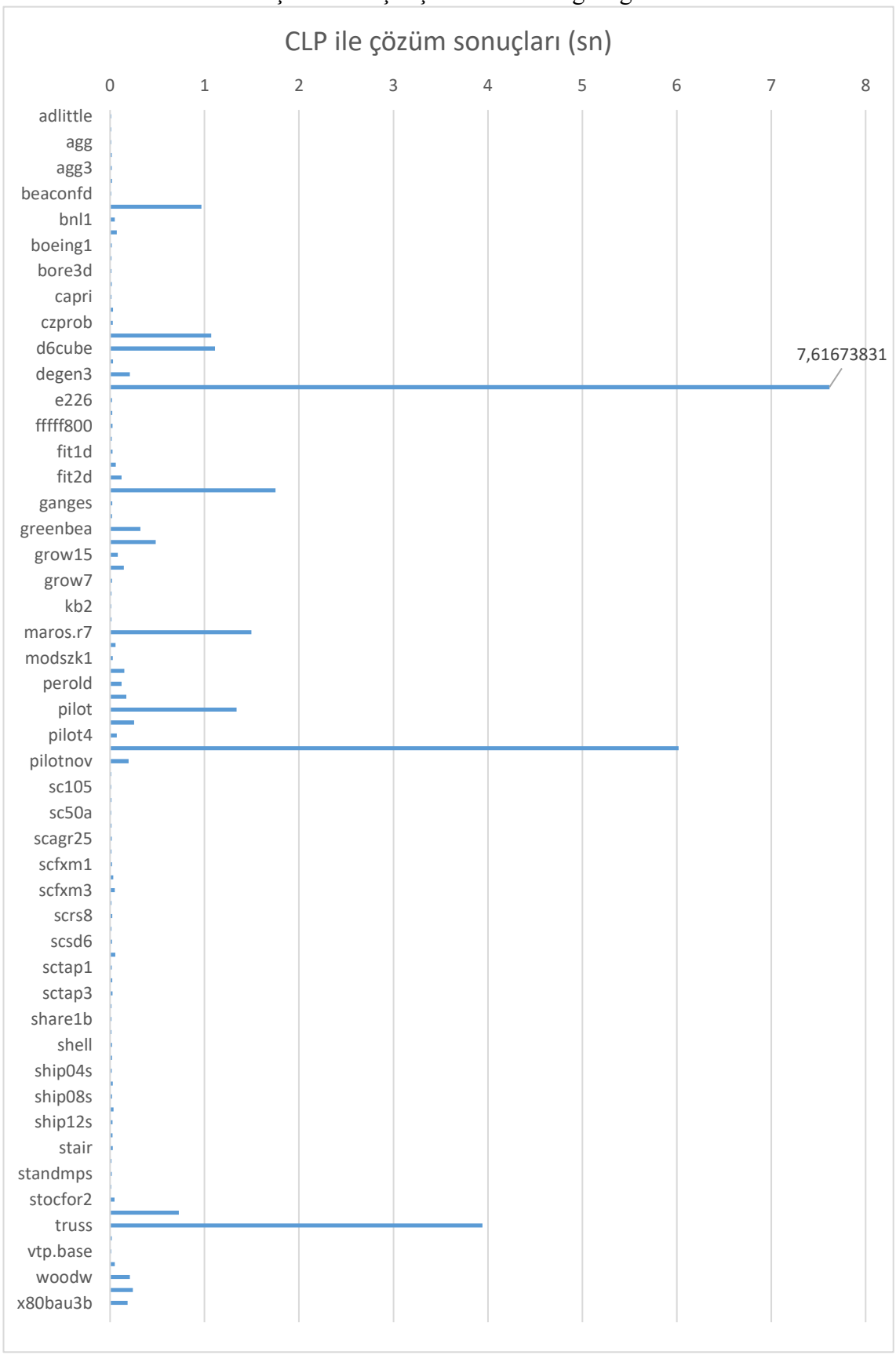
**EK 1** Problemlerinin CPLEX çözücüsü için çözüm süreleri grafiği



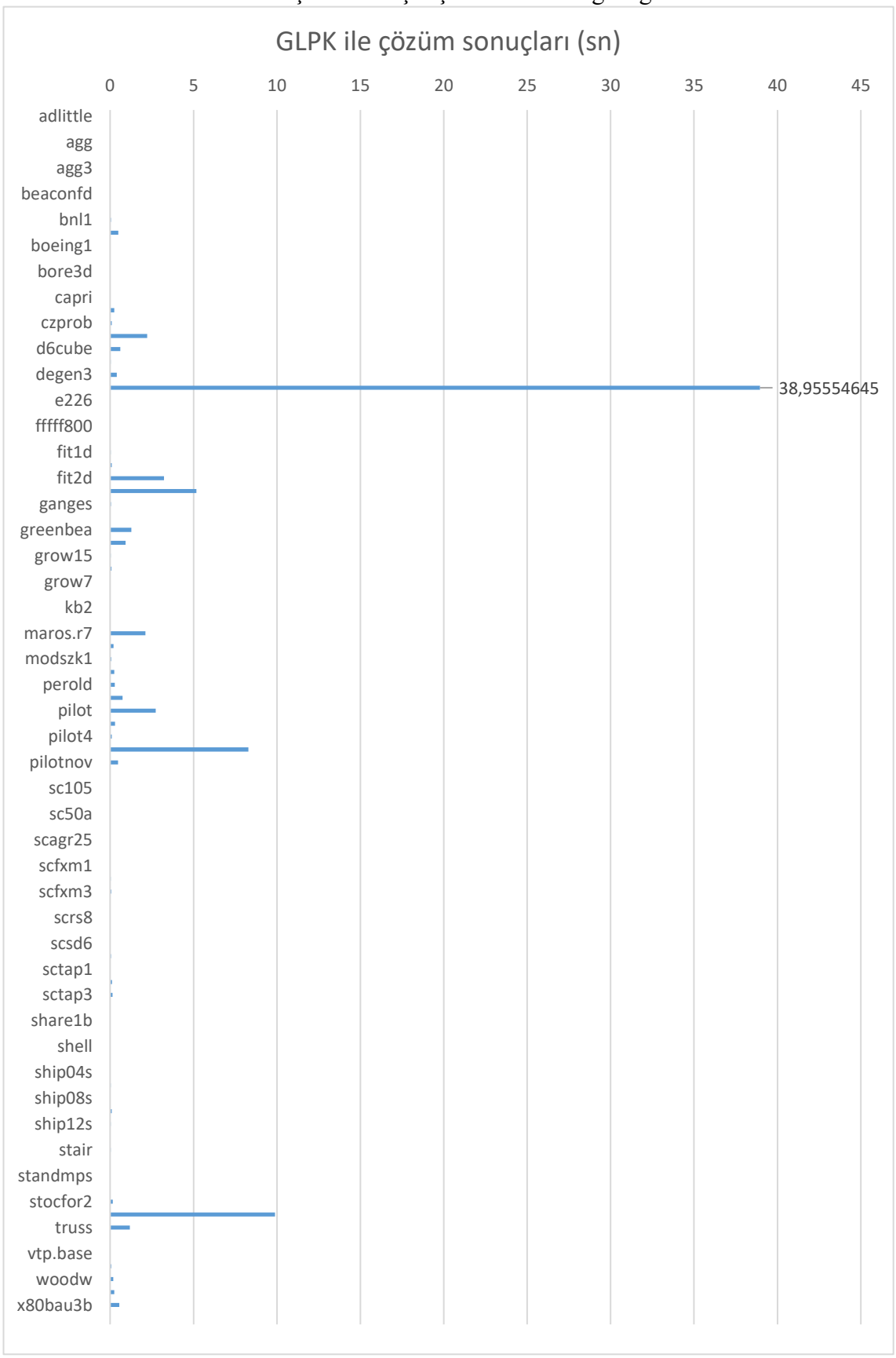
**EK 2** Problemlerinin GUROBI çözücüsü için çözüm süreleri grafiği



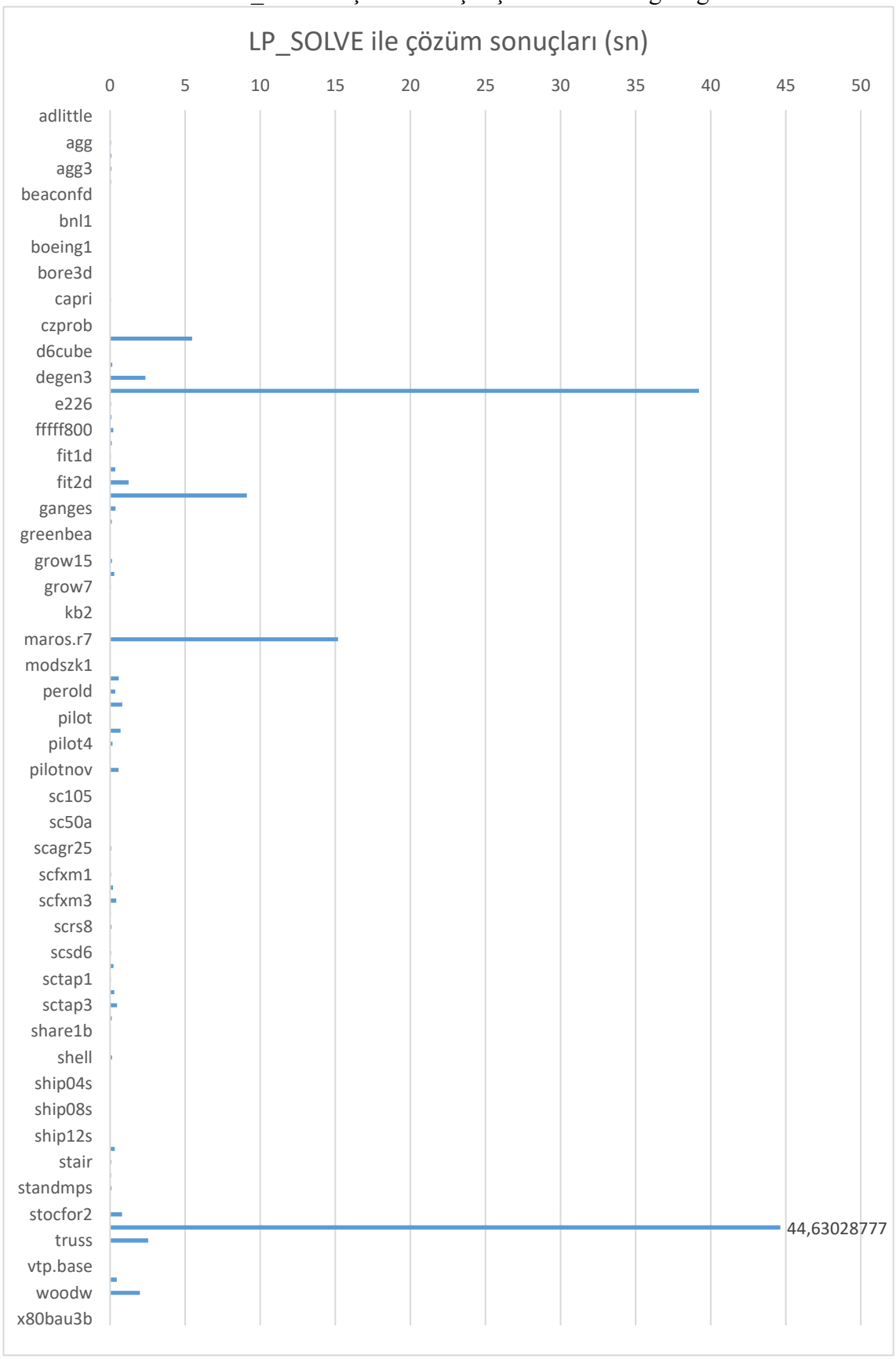
**EK 3** Problemlerinin CLP çözücüsü için çözüm süreleri grafiği



**EK 4** Problemlerinin GLPK çözücüsü için çözüm süreleri grafiği



**EK 5** Problemlerinin LP_SOLVE çözücüsü için çözüm süreleri grafiği



# ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Merve CÖMERTOĞLU ARIK
Doğum Yeri ve Tarihi : BURSA / 11.12.1993
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Bursa Nilüfer Milli Piyango Anadolu Lisesi
Lisans : Uludağ Üniversitesi Endüstri Mühendisliği
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi Endüstri Mühendisliği

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Valeo Otomotiv Sistemleri

İletişim (e-posta) : mervecmertoglu@gmail.com

Yayınları