SONLU ÖZEL TOPLAMLAR

Elif ÇETİN

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ÖZEL TOPLAMLAR

Elif ÇETİN

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (Danışman)

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (İkinci Danışman) (Akdeniz Üniversitesi)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2017

TEZ ONAYI

Elif ÇETİN tarafından hazırlanan "Sonlu Özel Toplamlar" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
İkinci Danışman : Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK, Akdeniz Üniversitesi

Üye: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. İlker KÜÇÜK
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Recep ŞAHİN
Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM

Enstitü Müdürü

03.03.2017

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

03/03/2017

İmza

Elif ÇETİN

ÖZET

Doktora Tezi

SONLU ÖZEL TOPLAMLAR

Elif ÇETIN

Uludag¼ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dal¬

Dan¬¸sman: Prof. Dr. Ismail Naci CANGÜL
Ikinci Dan¬¸sman: Prof. Dr. Y¬lmaz S¸IM¸SEK (Akdeniz Üniversitesi)

Bu çal¬¸smada baz¬ yeni sonlu özel toplamlar tan¬mlanm¬¸s ve diger¼ bilinen sonlu toplamlarla ili¸skileri verilmi¸stir. Ayr¬ca polinomlar¬n üçlü terim bag¬¼nt¬lar¬n¬n k¬smi türevleri yard¬m¬yla baz¬sonlu toplamlar elde edilmi¸stir. Bu tez be¸s bölümden olu¸s-maktad¬r. Birinci bölüm giri¸s bölümüdür. Ikinci bölümde çal¬¸sman¬n ilerideki bölüm-lerinde kullan¬lan tan¬m ve kavramlar verilmi¸stir. Üçüncü bölüm orijinal sonuçlar içermekte olup bu bölümde, baz¬ yeni özel sonlu toplamlar verilmi¸s ve üçlü terim bag¬¼nt¬s¬n¬n k¬smi türevleriyle olan ili¸skileri incelenmi¸stir. Dördüncü bölüm de ori-jinal sonuçlar içermekte olup bu bölümde, yeni iki sonlu toplam tan¬mlanm¬¸s ve bu sonlu toplamlar¬n diger¼ bilinen sonlu toplamlarla ili¸skileri incelenmi¸stir. Son bölüm olan be¸sinci bölümde ise dördüncü bölümde tan¬mlanm¬¸s olan sonlu toplamlar¬n Fi-bonacci say¬lar¬ ile ili¸skileri ve bu sayede Fibonacci say¬lar¬n¬n belli degerleri¼ için, bilinen diger¼ sonlu toplamlarla olan ili¸skileri incelenmi¸stir. Baz¬ orijinal sonuçlar elde edilmi¸stir.

2017, iv+77 sayfa.

Anahtar Kelimeler : Dedekind toplamlar¬, Hardy toplamlar¬, Y (h; k) toplamlar¬, Fibonacci say¬lar¬.

ABSTRACT

PhD Thesis

FINITE SPECIAL SUMS

Elif CETIN

Uludag¼ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ismail Naci CANGUL

Second Supervisor: Prof. Dr. Yilmaz SIMSEK (Akdeniz University)

In this thesis, some new …nite sums are de…ned and the relations between these new sums and other known …nite sums are given. Besides, with the help of the PDE of the three-term polynomial relation, some …nite sums are obtained. This thesis consists of …ve chapters. First chapter is introduction. In the second chapter some basic de…nitions and theorems which will be used in the other chapters are given. The third chapter contains the original results. In this chapter, some …nite special sums are given and the relations between these sums and the PDE of the three-term polynomial relations are investigated. The fourth section contains the original results too. In this section, two new …nite sums are de…ned and the relations between these new sums and the other known …nite sums are investigated. In the last chapter, relations between Fibonacci numbers and the new …nite sums which are de…ned in chapter four, are investigated. And for some speci…c values of Fibonacci numbers, some relations of these sums are given. Some original results are obtained.

2017, iv+77 pages.

Key Words: Dedekind sums, Hardy sums, $Y(h;k)$ sums, Fibonacci numbers.

TE¸SEKKÜR

Doktora egitimim¼ boyunca saglam¼ bir bilgi birikimine sahip olmam¬saglayan,¼ dok-tora tez konusunun belirlenmesinde ve kayda deger¼ sonuçlar elde edebilecegimiz¼ problemlerin ortaya at¬lmas¬nda çok büyük katk¬lar¬olan ve bu tez çal¬¸smas¬n¬n or-taya ç¬k¬¸s¬ndan son haline gelene kadar gerek akademik bilgisiyle gerek de manevi destegiyle¼ yan¬mda olduklar¬n¬hep gösteren hocalar¬m Say¬n Prof. Dr. Ismail Naci CANGÜL'e ve Say¬n Prof. Dr. Y¬lmaz S¸IM¸ SEK'e te¸sekkürü bir borç bilirim. Bu alanda her anlamda azimli, kararl¬ve bilgili olmamda en büyük pay sayg¬deger¼ ho-calar¬ma aittir.

Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç eksik etmeyen, haklar¬n¬asla ödeyemeyecegim¼ k¬ymetli annem Serife¸ ÇETIN, babam Fedai ÇETIN ve abim Yasin ÇETIN' e çok te¸sekkür ederim.
Ayr¬ca doktora egitimim¼ boyunca yurt içi doktora burs program¬ ile beni maddi olarak destekleyen TÜBITAK' a da çok te¸sekkür ediyorum.

Elif Çetin

03/03/2017

IÇINDEKILER

1. GIRI¸S

Bu çal¬¸sman¬n amac¬baz¬sonlu toplamlar tan¬mlamak ve bu toplamlar aras¬ndaki il-i¸skileri kurmakt¬. Buna ek olarak, Carlitz tipi polinomlar¬n üçlü terim bag¬¼nt¬lar¬n¬n k¬smi türevleri ile buldugumuz¼ yeni bir metod ile farkl¬ özel sonlu toplamlar da verilmi¸stir. Üçlü terim bag¬¼nt¬lar¬n¬n k¬smi türevleri arac¬l¬g¬¼ ile elde ettigimiz¼ bu yeni metod sayesinde, bu polinomlar¬n daha önce tan¬mlanan Dedekind toplamlar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬ve Sim¸sek toplamlar¬ile ili¸skileri ayr¬nt¬l¬bir ¸sekilde ver-ilmi¸stir. Bu toplamlar, H. Rademacher, B. C. Berndt, M. Beck, U. Dieter, M. R. Pettet, R. Sitaramachandrarao, V. Kurt, Y. Sim¸sek, W. P. Zang, J. Meyer ve M. Can gibi matematikçiler taraf¬ndan çal¬¸s¬lm¬¸st¬r.

Bu çal¬¸smada yeni sonlu toplamlar tan¬mlanm¬¸st¬r. Bunlar, $Y_{n\ 1}(a_1; : : : ; a_{n\ 1}; a_n)$, $B_{n\ 1}(a_1; : : : ; a_{n\ 1}; a_n)$ ve $C(a_1; a_2; : : : ; a_{n\ 1}; a_n; k)$ notasyonlar¬ile gösterilm¸stir. Bu bulunan yeni toplamlar¬n, n = 2 ve k = 2 için, $Y_1(a_1; a_2)$, $B_1(a_1; a_2)$ ve $C(a_1; a_2; 2)$ özel halleri ile Dedekind toplamlar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬ve Sim¸sek toplamlar¬ aras¬ndaki ili¸skiler verilmi¸stir. Bu sonlu toplamlar içerisinde $Y_{n\ 1}(a_1; : : : ; a_{n\ 1}; a_n)$ toplamlar¬için reciprocity (indirgeme) bag¬¼nt¬s¬n¬n ispat¬bulunmu¸stur. Fakat tan¬m-lanm¬¸s olan $B_{n\ 1}(a_1; : : : ; a_{n\ 1}; a_n)$ ve $C(a_1; a_2; : : : ; a_{n\ 1}; a_n; k)$ sonlu toplamlar¬için henüz reciprocity bag¬¼nt¬s¬bulunamam¬¸st¬r. Bu iki toplam¬n reciprocity bag¬¼nt¬lar¬n¬n bulunmas¬n¬n aç¬k iki problem oldugu¼ Cetin ve ark. (2014) çal¬¸smas¬nda belirtilmi¸stir. Ayr¬ca bu tezde yeni $C_1(h; k)$ ile gösterilen bir sonlu toplam tan¬mlanm¬¸st¬r. $C_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬n¬n baz¬özellikleri incelenmi¸s, diger¼ bilinen sonlu toplamlarla ve Fi-bonacci say¬lar¬yla olan ili¸skileri verilmi¸stir. $C_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬n¬n en ilgi çeken özelliklerinden birisi, h ve k tek tamsay¬lar oldugunda,¼ toplam¬n sadece tek degi¸¼skene yani k'ya bagl¬olmas¬¼d¬r. Bununla birlikte, $C_1(h; k)$ toplamlar¬n¬n Dedekind toplam-lar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬ve Sim¸sek toplamlar¬Y (h; k) gibi bilinen toplamlarla ili¸skili olmas¬, bu yeni toplam¬n analitik say¬lar teorisi ve diger¼ alanlardaki öne-mini vurgulamaktad¬. $C_1(h; k)$ toplamlar¬ ile Fibonacci say¬lar¬ aras¬nda kurulan baglant¬¼ ayn¬ zamanda analiz (polinomlar¬n üçlü terim bag¬¼nt¬lar¬ ve k¬smi türev-leri gibi) ve say¬lar teorisi aras¬nda köprü olu¸sturmaktad¬. Bu sebeple bu tezde

Analiz ve Say¬lar Teorisi'ndeki ispat metodlar¬kullan¬lm¬¸st¬r. Ayr¬ca buradan yola ç¬k¬larak, Fibonacci say¬lar¬n¬n belli degerleri¼ için, Fibonacci say¬lar¬ile Dedekind, Hardy-Berndt ve Y (h; k) Sim¸sek toplamlar¬aras¬ndaki ili¸skiler de incelenmi¸stir. Ben-zer ¸sekilde, iki degi¸¼skenli halde B_1 toplamlar¬ için de benzer özellikler incelenmi¸s, Fibonacci say¬lar¬n¬n baz¬ özel degerleri¼ için B_1 toplamlar¬n¬n rekürans bag¬¼nt¬s¬ elde edilmi¸stir. Diger¼ toplamlarda kullan¬lan notasyon ile uyum saglamas¬aç¬¼s¬ndan, dördüncü ve be¸sinci bölümde B_1 toplam¬ndan bahsedilirken, bundan böyle $a_1 = h$ ve $a_2 = k$ olarak al¬nacak, böylece B_1 toplamlar¬$B_1(h; k)$ olarak gösterilecektir.

Bu tez be¸s bölümden olu¸smaktad¬r. İlk bölüm giri¸s bölümüdür.

İkinci bölüm temel kavramlar olup üç k¬s¬mdan olu¸smaktad¬r. Birinci k¬s¬mda Möbi-ous dönü¸sümleri ve modüler gruplar hat¬rlat¬lm¬¸s, ayr¬ca temel özellikleri verilmi¸stir. Çünkü daha sonra verilecek olan Dedekind-eta fonksiyonunun tan¬mlanmas¬nda önemli rol oynamaktad¬rlar. İkinci k¬s¬mda baz¬özel fonksiyonlardan bahsedilmi¸stir. Özel fonksiyonlar içerisinde baz¬ özel sonlu toplamlarda kullan¬lacak olanlar¬ ele al¬nm¬¸s ve bunlarla ilgili temel bilgiler verilmi¸stir. Bu k¬s¬mda k¬saca [x] tam deger¼ fonksiyonu, ((x)) testere agz¬fonksiyonu,¼ Dedekind-eta fonksiyonu ve teta fonksiy-onlar¬ hakk¬nda genel bilgiler verilmi¸stir. Üçüncü k¬s¬mda baz¬ bilinen özel sonlu toplamlar tan¬t¬lm¬¸st¬r. Önce Dedekind toplamlar¬ile ilgili genel bilgiler verilmi¸s ve önemli özellikleri anlat¬lm¬¸st¬r. Dedekind toplamlar¬ literatürde bilinen en me¸shur sonlu toplamlardan birisi olup, çok geni¸s uygulama alanlar¬na sahiptir. Daha sonra da görülecegi¼ gibi, Dedekind toplamlar¬n¬n, bu tezde yeni tan¬mlanm¬¸s olan $C_1(h; k)$ ve $B_1(h; k)$ toplamlar¬ ba¸sta olmak üzere, bilinen diger¼ sonlu toplamlarla ili¸skisi mevcuttur. Dedekind toplamlar¬n¬n ard¬ndan, yine çok önemli sonlu toplamlar olan Hardy-Berndt toplamlar¬hat¬rlat¬lm¬¸s ve genel özellikleri verilmi¸stir. Daha sonraki bölümlerde ise Hardy-Berndt toplamlar¬n¬n $C_1(h; k)$, $B_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬ ve diger¼ sonlu toplamlar ile ili¸skileri verilecektir. Son olarak da Y (h; k) sonlu toplam-lar¬ndan bahsedilmi¸s, bu sonlu toplamlar¬n özellikleri ve uygulamadaki önemi an-lat¬lm¬¸st¬r. Üçüncü, dördüncü ve be¸sinci bölümlerde Dedekind toplamlar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬, $C_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬, $B_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬ ve Y (h; k) sonlu toplamlar¬ile ilgili orijinal sonuçlar verilecektir.

Üçüncü bölümde baz¬yeni özel sonlu toplamlar elde edilmi¸stir. Hardy-Berndt toplamlar¬ için üçlü terim bag¬¼nt¬lar¬ incelenmi¸stir. Orijinal sonuçlar içeren bu bölümde, [x] ve ((x)) fonksiyonlar¬n¬ içeren $Y_{n\ 1}(a_1; : : : ; a_{n\ 1}; a_n)$, $B_{n\ 1}(a_1; : : : ; a_{n\ 1}; a_n)$ ve $C(a_1; a_2; : : : ; a_{n\ 1}; a_n; k)$ toplamlar¬ bulunmu¸s ve bunlardan $Y_{n\ 1}(a_1; : : : ; a_{n\ 1}; a_n)$ için reciprocity bag¬¼nt¬s¬ elde edilmi¸stir. Bu yeni bulunan sonlu toplamlar¬n baz¬ özel degerleri¼ de hesaplanm¬¸st¬r. Ayr¬ca ilerideki çal¬¸smalara yönelik baz¬aç¬k soru-lar b¬rak¬lm¬¸st¬r. Bir sonraki bölümde ayr¬nt¬l¬olarak incelenecek olan yeni $C_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬da bu bölümde tan¬mlanm¬¸st¬r. Daha sonra, Carlitz polinomlar¬n¬n k¬smi türevleri yard¬m¬yla etkili bir metod geli¸stirilmi¸ olup, bu metodun uygula-malar¬verilmi¸stir.

Dördüncü bölümde öncelikle, üçüncü bölümde tan¬mlanm¬¸s olan $C_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬ayr¬nt¬l¬olarak incelenmi¸s ve önemli orijinal sonuçlar elde edilmi¸stir. İlk olarak $C_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬n¬n özellikleri incelenmi¸s, reciprocity bag¬¼nt¬s¬verilmi¸ ve bu yeni toplamlar¬n öneminden bahsedilmi¸stir. Daha sonra ise üçüncü bölümde bahsedilen $B_{n\ 1}(a_1; : : : ; a_{n\ 1}; a_n)$ toplam¬nlar¬n¬n iki degi¸¼skene indirgenmi¸s özel hali olan $B_1(h; k)$ toplamlar¬ndan bahsedilmi¸ ve bu toplamlar¬n temel özellikleri ver-ilmi¸stir.

Be¸sinci bölümde baz¬yeni özel sonlu toplamlar¬n Fibonacci say¬lar¬yard¬m¬yla bilinen diger¼ sonlu toplamlar ile aralar¬ndaki ili¸slere yer verilmi¸stir. Be¸sinci bölüm üç k¬s¬mdan olu¸smaktad¬r. Birinci k¬s¬mda Fibonacci say¬lar¬ve Fibonacci say¬lar¬n¬n üreteç fonksiyonu hat¬rlat¬lm¬¸st¬r. Daha sonra simetrik çiftler kavram¬ndan bahsedilmi¸ ve simetrik çiftlerin baz¬özellikleri verilmi¸stir. Simetrik çiftler ve Fibonacci say¬lar¬ ili¸skili olduklar¬ndan, bu k¬s¬mda ayr¬ca bu ili¸skiye yer verilmi¸stir. Fibonacci say¬lar¬yla diger¼ sonlu özel toplamlar aras¬nda kurulan ili¸skiler, simetrik çiftler yard¬m¬yla kurulmu¸stur. Bu nedenle simetrik çiftler kavram¬bu tez için büyük önem te¸skil etmek-tedir. Fibonacci say¬lar¬yla, üçüncü bölümde yeni tan¬mlanan, $C_1(h; k)$ sonlu toplam-lar¬ aras¬ndaki ili¸skiler ve buradan hareketle Fibonacci say¬lar¬yla, bilinen diger¼ sonlu toplamlar aras¬ndaki ili¸skiler çal¬¸smaya zenginlik katm¬¸st¬r. Dolay¬s¬yla ikinci k¬s¬mda Fibonacci say¬lar¬ ile C_1(h; k) toplamlar¬ aras¬ndaki ili¸ski verilmi¸s ve buradan hareketle, C_1(h; k) sonlu toplamlar¬ile bilinen diger¼ sonlu toplamlar aras¬nda bir çok bag¬¼nt¬elde edilmi¸stir. Yani C_1(h; k) toplamlar¬ile s¬ras¬yla, Dedekind toplamlar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬ ve Y (h; k) toplamlar¬ aras¬ndaki ili¸skiler, Fibonacci say¬lar¬na bagl¬¼ olarak elde edilmi¸stir. Son olarak üçüncü k¬s¬mda ise daha önce üçüncü bölümde tan¬mlanm¬¸s ve dördüncü bölümde özellikleri incelenmi¸s olan B_1(h; k) toplamlar¬n¬n Fibonacci say¬lar¬yla olan ili¸skisi incelenmi¸stir.

Bu tezde bahsedilen sonlu toplamlar ayr¬ca q analiz, nümerik analiz ve p adik analiz gibi alanlarda da çal¬¸s¬lm¬¸s, genel halleri verilmi¸s ve bir çok sonuç ile uygulama elde edilmi¸stir. Ancak bu sonuçlar, bu tezin kapsam¬d¬¸s¬nda oldugundan,¼ bu tezde q analiz, nümerik analiz ve p adik analiz gibi konulara deginilmeyecektir¼.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullan¬lacak olan baz¬temel kavramlar, teo-rem ve tan¬mlar verilmi¸stir. Bu bölümde tez için elde edilen yeni sonuçlar bulunma-makla birlikte, bu bölüm daha önce çe¸sitli matematikçiler taraf¬ndan yap¬lan çal¬¸s-malar¬n bir derlemesi biçimindedir. Temel kavramlar bölümü üç k¬s¬mdan olu¸smak-tad¬r.
.
Birinci k¬s¬mda Möbious dönü¸sümleri ve modüler gruplardan bahsedilmi¸stir. Ikinci

k¬s¬mda baz¬özel fonksiyonlar hakk¬nda genel bilgiler verilmi¸stir. Bu k¬s¬mda s¬ras¬yla [x] tam deger¼ fonksiyonu, ((x)) testere agz¬fonksiyonu,¼ Dedekind-eta fonksiy-onu ve teta fonksiyonlar¬ ile ilgili genel bilgiler verilmi¸stir. Üçüncü k¬s¬mda baz¬ özel sonlu toplamlardan bahsedilmi¸stir. Bu k¬s¬mda s¬ras¬yla, Dedekind toplamlar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬ve Y (h; k) toplamlar¬ile özellikleri anlat¬lm¬¸st¬r.

2.1. Möbious Dönü¸sümleri ve Modüler Gruplar

Möbious dönü¸sümleri bile¸ske i¸slemi alt¬nda bir grup olu¸sturur. Bu grubun alt gru-plar¬ndan biri modüler gruplard¬. Dedekind-eta fonksiyonunun modüler gruplar al-t¬ndaki davran¬¸s¬n¬n incelenmesiyle, Dedekind toplamlar¬ ortaya ç¬km¬¸st¬r. Bu ne-denle Dedekind toplamlar¬ için temel olu¸sturan Dedekind-eta fonksiyonunun daha iyi anla¸s¬labilmesi aç¬s¬ndan Möbious dönü¸sümleri ve modüler gruplar hakk¬nda k¬saca bilgi verilmesi uygun görülmü¸stür. Bu k¬s¬mda önce k¬saca Möbious dönü¸süm-lerinden bahsedilecek, daha sonra da modüler gruplar hakk¬nda temel bilgiler ver-ilecektir. a; b; c; d key… kompleks say¬lar olmak üzere

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (2.1)$$

dönü¸sümü ele al¬ns¬n. (2.1) denklemi, f(z)’yi z = d=c hariç, tüm geni¸sletilmi¸ kompleks say¬lar sisteminde yani C = C [f1g’de tan¬mlamaktad¬r. f’nin tan¬m¬

$$f\left(\frac{d}{c}\right) = 1 \text{ ve } f(1) = \frac{a}{c}$$

olarak tan¬mlanarak tüm C kümesine geni¸sletilebilir. Tabii ki burada eger¼ z 6= 0 ise z=0 = 1 kabulü kullan¬lm¬¸st¬r.

$$f(w) \quad f(z) = \frac{(ad \ \ bc)(w \ \ z)}{(cw + d)(cz + d)} \tag{2.2}$$

e¸sitligi¼ ele al¬n¬rsa, bu e¸sitlik eger¼ ad bc = 0 ise f'nin sabit oldugunu¼ göstermektedir. Bu durumdan kaç¬nmak için ad bc 6= 0 oldugu¼ kabul edilecektir. Elde edilen rasyonel fonsiyona bir Möbious dönü¸sümü denir. Bu fonksiyon, z = d=c basit kutup noktas¬ haricinde tüm C kümesinde analitiktir (Apostol 1976).

(2.2) e¸sitliginden¼ her Möbious dönü¸sümünün C üzerinde birebir oldugu¼ görülür. Eger¼ (2.1) e¸sitligi¼ z için f(z) cinsinden çözülecek olursa

$$z = \frac{df(z) \ b}{cf(z) + a}$$

elde edilir. Yani f, C kümesini yine C kümesine resmetmektedir. Bu da f ^{1} ters fonksiyonunun da bir Möbious dönü¸sümü oldugunu¼ gösterir. Eger¼ tüm a; b; c; d katsay¬lar¬ s¬f¬rdan farkl¬ bir sabitle çarp¬l¬rsa, bu i¸slem bir Möbious dönü¸sümünü degi¸¼stirmez. Bu nedenle, ad bc = 1 olarak al¬nmas¬genelligi¼ bozmaz.

ad bc = 1 olmak üzere, (2.1) ile verilen her Möbious dönü¸sümü

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

biçiminde 2 2 formunda bir matris ile gösterilebilir. Bu durumda det A = ad bc = 1 dir. Eger¼ f ve g Möbious dönü¸sümlerinin matris gösterimleri s¬ras¬yla A ve B ise bu durumda f g bile¸skesinin yani (f g)(z) = f(g(z)) e¸sitliginin,¼ AB matris çarp¬m¬n¬ temsil ettigi¼ kolayca gösterilebilir. Ayr¬ca birim dönü¸süm olan

$$f(z) = z = \frac{1z + 0}{0z + 1}$$

e¸sitligi,¼ birim matris olan

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ile temsil edilir. f dönü¸sümünün tersi

$$f^{1}(z) = \frac{dz \;\; b}{cz + a}$$

biçimindedir ve matris tersi olan

$$A^{1} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

ile temsil edilmektedir (Apostol 1976).

Böylece görülüyor ki ad bc = 1 olacak ¸sekildeki tüm Möbious dönü¸sümlerinin kümesi, bile¸ske i¸slemine göre bir grup olu¸sturur. Simdi,¸ Modüler grup ad¬verilen bu grubun temel özellikleri verilecektir.

a; b; c; d 2 Z ve ad bc = 1 olmak üzere,

$$0 = \frac{a + b}{c + d}$$

¸seklindeki tüm Möbious dönü¸sümlerinin olu¸sturdugu¼ gruba modüler grup denir ve ile gösterilir (Apostol 1976). Bu grup

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1$$

olacak ¸sekildeki 2 2 tipindeki elemanlar¬tam say¬lar olan matrislerle gösterilebilir. A ve A ayn¬dönü¸sümü gösterdiklerinden, her matris negati… ile özde¸sle¸stirilebilir.

Eğer

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ise bu durumda

$$A = \frac{a + b}{c + d}$$

yazılabilir. Ayrıca sırada verilecek olan teoremde görüleceği gibi , $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$T = + 1 \text{ ve } S = \frac{1}{}$$

dönüşümleri ile üretilmektedir.

Teorem 2.1.1. modüler grubu

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri tarafından üretilmektedir. Yani, 'daki her A elemanı, $n_i \in Z$ olmak üzere

$$A = T^{n_1} S T^{n_2} S \cdots S T^{n_k}$$

formunda yazılabilir. Bu gösterim bir tek değildir. Bu tez boyunca, $A \in$ ise

$$A = \frac{a + b}{c + d}$$

olarak alınacaktır (Apostol 1976).

Aşağıdaki kısımda bilinen bazı özel fonksiyonlar ve bunların temel özelliklerinden bahsedilecektir.

2.2. Baz¬Özel Fonksiyonlar

Bu k¬s¬mda, daha sonraki bölümlerde kullan¬lacak olan baz¬özel fonksiyonlar ver-ilmi¸stir. Bu özel fonksiyonlar, Dedekind toplamlar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬ ve diger¼ bir çok sonlu toplam için temel olu¸sturmaktad¬. Bu özel fonksiyonlardan ilk önce [x] ve ((x)) fonksiyonlar¬incelenecek, daha sonra da Dedekind-eta fonksiyonu ve teta fonksiyonlar¬ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

2.2.1. [x] fonksiyonu

Bu k¬s¬mda bahsedilecek olan [x] tam deger¼ fonksiyonu, bir çok sonlu toplam için temel olu¸sturmaktad¬. Bu nedenle bu k¬s¬mda, tam deger¼ fonksiyonunun baz¬temel özellikleri verilecektir. A¸sag¬¼da verilen tam deger¼ fonksiyonunun tan¬m¬bir çok analiz kitab¬nda mevcuttur.

Tan¬m 2.2.1.1. Bir x reel say¬s¬ndan büyük olmayan (yani küçük veya e¸sit olan) en büyük tam say¬ya x reel say¬s¬n¬n tam de¼geri denir ve [x] ¸seklinde gösterilir. Bir x reel say¬s¬n¬tam degerine¼ dönü¸stüren

f : R ! R; f(x) = [x]

fonksiyonuna tam de¼ger fonksiyonu denir. Bu fonksiyon literatürde ayn¬ zamanda taban fonksiyonu olarak da bilinmektedir. Örnegin,¼ [2; 3] = 3; [ ] = 3; [e] = 2; [0; 2] = 0 e¸sitlikleri geçerlidir.

Daha genel olarak, m 2 Z olmak üzere

[g(x)] = m; m   g(x) < m + 1;

olarak tan¬mlan¬r. Ayr¬ca

$$x \; 2 \; Z \text{ ise } [x] = x;$$

dir. 1808'de Carl Friedrich Gauss tam deger¼ fonksiyonu için ilk defa kö¸seli paran-tezli [x] notasyonunu tan¬mlam¬¸st¬r. Bu notasyon uzun y¬llar kullan¬lm¬¸st¬r. 1962'de Kenneth E. Iverson taban ve tavan fonksiyon kavram¬n¬ tan¬mlay¬nca, tam deger¼ fonksiyonu, yani taban fonksiyonu için bxc notasyonu da kullan¬lmaya ba¸slanm¬¸st¬r. Günümüzde tam deger¼ fonksiyonu için iki notasyon da kullan¬lmaktad¬r. Bu tezde tercihen tam deger¼ fonksiyonu için [x] notasyonu kullan¬lacakt¬r.

Teorem 2.2.1.2. x bir reel say¬olsun. Bu durumda,

1. n 2 Z ise [x + n] = [x] + n;
2. n 2 Z ise $\text{"} \frac{[x]}{n} \text{i} = \frac{x}{n}$;
3. P 1 n x 1 = [x] ;
4. 0 x [x] < 1;
5. x [x] $\frac{1}{2}$ < $\frac{1}{2}$;
6. [x] + [y] [x + y] [x] + [y] + 1;
7. x 2= Z ise [x] = [x] 1
8. [2x] 2 [x] = 8 1 [2x] tek ise,
   : < 0 [2x] çift ise.

olarak verilen özellikler geçerlidir (Grosswald 1984).

Önerme 2.2.1.3. a = 1 için

$$[ax] = \sum_{r=0}^{a-1} \left[x + \frac{r}{a} \right]$$

d¬r (Carlitz 1975).

Ayr¬ca $(\ 1)^{[x]}$ fonksiyonu a¸sag¬¼daki Fourier serisi ile tan¬mlan¬r:

$$(\ 1)^{[x]} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n \ 1) \ x)}{2n \ 1} : \qquad (2.3)$$

2.2.2. ((x)) fonksiyonu

((x)) fonksiyonu [x] tam deger¼ fonksiyonuna bagl¬olarak¼ verilen ve sonlu toplamlar¬n temelini olu¸sturan bir fonksiyondur. Bu k¬s¬mda ((x)) fonksiyonunun baz¬özellikleri verilecektir. [x] tam deger¼ fonksiyonu olmak üzere, a¸sag¬¼daki ¸sekilde tan¬mlanm¬¸st¬r:

$$((x)) = \begin{cases} x \ [x] \ \frac{1}{2} ; & x \ 2= Z \\ 0 ; & x \ \ Z \end{cases}$$

Yukar¬da tan¬mlanan ((x)) fonksiyonuna testere a¼gz¬ fonksiyonu denilmektedir.

Teorem 2.2.1.2.'den görülebilecegi¼ gibi $|((x))| \ \frac{1}{2}$ dir. Asl¬nda $x = \frac{1}{2}$ için $((x)) = 0$ oldugundan¼ $\ \frac{1}{2} < ((x)) < \frac{1}{2}$ de yaz¬labilir (Grosswald 1984). Ayr¬ca ((x)) fonksiy-onu

$$((x + b)) = ((x)) \ ; \ b \ 2 \ Z$$

özelligini¼ saglamaktad¬¼r. Buna ek olarak, ((x)) fonksiyonu tek bir fonksiyondur ve

$$((\ x)) = \ \ ((x))$$

e¸sitligini¼ saglar¼.

Teorem 2.2.2.1. ((x)) fonksiyonu a¸sag¬¼daki özellikleri saglar:¼

1. $y = ((x))$ fonksiyonu 1 periyotlu ve parçal¬lineer bir fonksiyondur.
2. $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ olmak üzere $x \notin \mathbb{Z}$ için $((x)) = B_1(x - [x])$ dir.
3. $-\frac{1}{2} < ((x)) < \frac{1}{2}$ dir.
4. $\int_0^1 ((x)) = 0$ d¬r.
5. Tüm reel $\alpha;\ \beta$ say¬lar¬için $\int_\alpha^\beta ((x))\, dx \leq 1/8$ dir.
6. $y(x) = \int_1^x ((x))\, dx$ e¸sitligi¼ $|y(x)| \leq 1/8$ e¸sitsizligini¼ saglar¼.
7. $h;\ k \in \mathbb{Z}^+$ için $\sum_{m=1}^{k} \left(\left(\frac{mh}{k}\right)\right) = 0$ d¬r (Grosswald 1984).

$((x))$ aritmetik fonksiyonunun periyodu 1 oldugundan¼ a¸sag¬¼daki Fourier serisi ile temsil edilebilmektedir:

$$((x)) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}:$$

Bu e¸sitligin¼ detaylar¬Rademacher ve Grosswald (1972) çal¬¸smas¬nda bulunabilir.

2.2.3. Dedekind-eta fonksiyonu

Dedekind taraf¬ndan 1877'de verilmi¸s olan Dedekind-eta fonksiyonu modüler form-lar, say¬lar teorisi, analiz, kombinatorik, Weierstrass eliptik fonksiyonu, eliptik egriler¼ ve teta fonksiyonlar¬gibi bir çok alan ve konu ile baglant¬¼l¬d¬r. Daha önce belirtildigi¼ gibi Dedekind-eta fonksiyonunun modüler gruplar alt¬ndaki davran¬¸s¬n¬n incelen-mesi ile Dedekind toplamlar¬ortaya ç¬km¬¸st¬r. Böylece Dedekind-eta fonksiyonlar¬, Dedekind toplamlar¬ve Dedekind toplamlar¬na bagl¬olan¼ diger¼ tüm sonlu toplamlar için temel rol oynamaktad¬r. Bu nedenle bu k¬s¬mda öncelikle Dedekind-eta fonksiy-onunun tan¬m¬verilecek ve daha sonra temel baz¬özellikleri hat¬rlat¬lacakt¬r.

H üst yar¬düzlem yani $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ olsun (sonsuz çarp¬m¬n yak¬nsakl¬g¬¼ için gereklidir). Dedekind toplamı, $z \in H$ olmak üzere

$$\eta(z) = e^{\pi i z/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i n z});\ \mathrm{Im}(z) > 0$$

olarak tanımlanan Dedekind-eta fonksiyonunun dönüşüm formülünde ortaya çıkmaktadır. Buradaki çarpım $x = e^{2\pi i n z}$ olmak üzere $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$ biçimindedir. Eğer $z \in H$ ise bu durumda $|x| < 1$ dir. Bu nedenle çarpım, mutlak yakınsar ve sıfırdan farklıdır. Dahası, yakınsaklık H'ın kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün olduğundan, $\eta(z)$ H üzerinde analitiktir. Bu kısımda, $\eta(z)$ ile ilgili bazı özellikler verilecektir. Dedekind-eta fonksiyonu eliptik fonksiyonlar teorisi ve teta fonksiyonları için temel oluşturmaktadır. İspatlar ve detaylar için Dieter (1959), Knopp (1970), Apostol (1976) ve Berndt (1978) çalışmaları incelenebilir.

$T\tau = \tau + 1$ üreteci için,

$$\eta(T\tau) = \eta(\tau+1) = e^{\pi i(\tau+1)/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i n(\tau+1)}) = e^{\pi i/12}\,\eta(\tau) \quad (2.4)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\eta(T^b\tau) = \eta(\tau+b) = e^{\pi i b/12}\,\eta(\tau)$$

bulunur. (2.4) denklemi ayrıca $\eta^{24}(\tau)$ nun periyodik ve periyodunun 1 olduğunu gösterir (Apostol 1976).

Diğer $S\tau = -1/\tau$ üreteci için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.2.3.1. Eğer $\tau \in H$ ise bu durumda,

$$(S\ ) = \quad \frac{1}{\quad} \quad = (\ i\ )^{1=2}\ (\ )$$

denklemi elde edilir. Burada karekök z fonksiyonunun, $z > 0$ oldugunda,¼ pozitif olan dal¬seçilmi¸stir (Apostol 1976).

Dedekind, modüler dönü¸süm alt¬nda, Dedekind toplamlar¬n¬da içeren ¸s¬k bir fonksiy-onel denklem vermi¸stir:

Teorem 2.2.3.2. Eger¼ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} 2 \ 1$; c > 0 ve z 2 H ise bu durumda,

$$(Az) = e^{\frac{i(a+d)}{12c} + is(d;c)} \left(i(cz+d) \right)^{\frac{1}{2}} (z) \qquad (2.5)$$

elde edilir. Burada h bir tamsay¬ve k pozitif bir tamsay¬olmak üzere

$$s(h;k) = \sum_{\mod k} \frac{}{k} \frac{h}{k}$$

Dedekind toplam¬n¬göstermektedir (Apostol 1976).

(2.5) e¸sitliginin¼ iki taraf¬n¬n logaritmas¬al¬narak Dedekind toplam¬a¸sag¬¼daki den-klemin sonucunda ortaya ç¬km¬¸st¬r:

$$\log (Az) = \log (z) + \frac{i(a+d)}{12c} \ is(d;c) \quad \frac{i}{4} + \frac{1}{2} \log(cz+d): \qquad (2.6)$$

(2.6) denkleminin ispat¬Berndt (1973) ve Apostol (1976) taraf¬ndan verilmi¸stir.

2.2.4. Teta fonksiyonlar¬

Teta fonksiyonlar¬n¬n modüler gruplar alt¬ndaki davran¬¸s¬n¬n incelenmesiyle Hardy-Berndt toplamlar¬ ortaya ç¬km¬¸st¬r. Hardy-Berndt toplamlar¬n¬n ortaya ç¬k¬¸s¬n¬n daha iyi anla¸s¬lmas¬ aç¬s¬ndan bu k¬s¬mda, daha önce Jacobi taraf¬ndan ayr¬nt¬l¬ ¸sekilde çal¬¸s¬lm¬¸s olan teta fonksiyonlar¬ndan k¬saca bahsedilecektir. Bu dört teta fonksiyonu a¸sag¬¼daki ¸sekilde tan¬mlanmaktad¬r (Rainville 1960):

$$
\begin{aligned}
\theta_1(z;q) &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z;\\
\theta_2(z;q) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z;\\
\theta_3(z;q) &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz;\\
\theta_4(z;q) &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz:
\end{aligned}
$$

$\theta_1(z;q);\ \theta_2(z;q);\ \theta_3(z;q);\ \theta_4(z;q)$ olarak tan¬mlanan fonksiyonlarda her fonksiyonu z'nin bir fonksiyonudur ve burada q'lar parametredir. Bu fonksiyonlar sadece z'ye bagl¬olarak¼ yaz¬lmak istenirse

$$\theta_i(z) = \theta_i(z;q);\ i = 1;\ 2;\ 3;\ 4$$

¸seklinde ifade edilebilir. $\theta_1(z;q);\ \theta_2(z;q);\ \theta_3(z;q);\ \theta_4(z;q)$ teta fonksiyonlar¬n¬n tan¬m¬nda, tüm sonlu z'lerin mutlak yak¬nsakl¬g¬için¼ $|q| < 1$ olmas¬gerekmektedir. q parame-tresinin önemli oldugu¼ durumlarda ek olarak

$$q = \exp(\pi i \tau)$$

notasyonu kullan¬lmaktad¬r. $|q| < 1$ olmas¬, τ'nun sanal k¬sm¬ndaki katsay¬n¬n poz-itif, yani $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ olmas¬n¬gerektirir.

Teta fonksiyonlar¬n¬n baz¬ özellikleri, direkt olarak tan¬mlar¬ndan ortaya ç¬kmak-tad¬r. $\theta_1(z)$ fonksiyonu z'nin tek bir fonksiyondur. Diger¼ teta fonksiyonlar¬ise ($\theta_2(z);\ \theta_3(z)$ ve $\theta_4(z)$) z'nin çift fonksiyonlard¬. Ayr¬ca $\theta_3(z)$ ve $\theta_4(z)$ fonksiyonlar¬n¬n periyotlar¬ π; $\theta_1(z)$ ve $\theta_1(z)$ fonksiyonlar¬n¬n periyotlar¬2π'dir. Teta fonksiyonunun uygulamada önemli bir yeri vard¬. Basit (tek boyutlu) ¬s¬denklemi ya da difüzyon denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

denklemi uygulamal¬matematigin¼ bir çok safhas¬nda ortaya ç¬kmaktad¬r. Dört teta fonksiyonu, z ve ’nun fonksiyonlar¬ olduklar¬ dü¸sünüldügünde,¼ (2.7) formundaki denklemi saglar¼ (Rainville 1960).

Bu tez boyunca $q = e^{iz}$ olmak üzere, $_1(0; q)$; $_2(0; q)$; $_3(0; q)$ ve $_4(0; q)$ s¬ras¬yla $_1(z)$; $_2(z)$; $_3(z)$ ve $_4(z)$ olarak gösterilecektir.

Teta fonksiyonlar¬n¬n sonsuz çarp¬mlar¬a¸sag¬¼daki ¸sekilde tan¬mlanm¬¸st¬r (Rainville 1960):

$$
\begin{aligned}
_1(z) &= 2q^{\frac{1}{2}} G \sin z \prod_{n=1}^{\infty} (1 \quad 2q^{2n} \cos 2z + q^{4n}); \\
_2(z) &= 2q^{\frac{1}{2}} G \cos z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2z + q^{4n}); \\
_3(z) &= G \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n \quad 1} \cos 2z + q^{4n \quad 2}); \\
_4(z) &= G \prod_{n=1}^{\infty} (1 \quad 2q^{2n \quad 1} \cos 2z + q^{4n \quad 2}):
\end{aligned}
$$

Burada

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} (1 \quad q^{2n})$$

dir.

Dedekind-eta fonksiyonu ile teta fonksiyonlar¬aras¬ndaki ili¸ski a¸sag¬¼da verilmi¸stir:

$$
\begin{aligned}
_2(z) &= \frac{2\,^2(2z)}{(z)}; \\
_3(z) &= \frac{^5(z)}{^2(2z)\,^2(\frac{z}{2})}; \\
_4(z) &= \frac{^2(\frac{z}{2})}{(z)}:
\end{aligned}
$$

Yukar¬da verilen son e¸sitlikler Rademacher (1967) taraf¬ndan çal¬¸s¬lm¬¸st¬r. S¬radaki e¸sitlikler, yukar¬da son verilen denklemlerin iki taraf¬n¬n logaritmas¬n¬n al¬nmas¬ile elde edilmi¸stir:

$$\log {}_2(z) = \log 2 + 2\log(2z) \quad \log(z);$$

$$\log {}_3(z) = 5\log\left(z\right) \quad 2\log(2z) \quad 2\log\frac{z}{2};$$

$$\log {}_4(z) = 2\log\frac{z}{2} \quad \log(z):$$

log (z)'nin aksine, klasik teta fonksiyonlar¬n¬n logaritmas¬fazla çal¬¸s¬lmam¬¸st¬r.

2.3. Baz¬Özel Sonlu Toplamlar

Bu k¬s¬mda bilinen baz¬ özel sonlu toplamlar ve özellikleri incelenecektir. Üçüncü bölümde verilecek olan yeni bulunan sonlu toplamlar¬n elde edilmesinde ve bu tezin ortaya ç¬kmas¬ndaki en büyük motivasyon kaynag¬¼, bu k¬s¬mda temel özellikleri verilecek olan Dedekind toplamlar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬ ve Y (h; k) Sim¸sek toplam¬d¬r. Tabii ki literatürde daha bir çok sonlu toplam bulunmaktad¬r. Ancak, literatürdeki sonlu özel toplamlar¬n baz¬lar¬bu tezin kapsam¬nda incelenmi¸stir.

2.3.1. Dedekind toplamlar¬ve özellikleri

Richard Dedekind'ten ad¬n¬alan Dedekind toplamlar¬((x)) fonksiyonuna bagl¬bir¼ toplamd¬r. Dedekind, bu toplamlar¬ Dedekind-eta fonksiyonunun fonksiyonel den-klemini belirtmek için kullanm¬¸st¬r. Dedekind toplamlar¬ayr¬ca say¬lar teorisi, Riemann-Roch teoremi ve Atiyah-Singer indeks teoremi gibi çe¸sitli alan ve konularda uygula-malara sahiptir. Daha çok say¬lar teorisinde çal¬¸s¬lmakta olup, topolojide ve matem-atigin¼ diger¼ bran¸slar¬ndaki problemlerde de ortaya ç¬kmaktad¬r. k > 0 olmak üzere k ve h aralar¬nda asal tamsay¬lar olsun. Dedekind-eta fonksiyonunun dönü¸süm for-mülünden ortaya ç¬kan s(h; k) klasik Dedekind toplamlar¬,

$$s(h;k) = \sum_{j \bmod k} \frac{j}{k} \quad \frac{hj}{k}$$

olarak tan¬mlan¬r. Dedekind (1930), Jacobi’nin eliptik fonksiyonlar için verdigi¼ teoriyi kullanarak Dedekind toplamlar¬ için reciprocity formülünün dogru¼ oldugunu¼ gös-terdi.

Teorem2.3.1.1. Eger¼ h ve k aralar¬nda asal tamsay¬lar ise

$$s(h;k)+s(k;h)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{k}+\frac{k}{h}+\frac{1}{hk}\right) \qquad (2.8)$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir.

(2.8) ile verilen e¸sitligin¼ ilk ispat¬n¬, Log ( ) için verdigi¼ dönü¸süm formüllerine daya-narak, Dedekind (1930) verdi. Simdilerde¸ (2.8) e¸sitliginin,¼ farkl¬bir kaç ispat¬daha mevcuttur. Bu konuda detayl¬bilgi için Rademacher ve Grosswald (1972), Berndt (1974) ve Dieter (1984) kaynaklar¬tavsiye edilebilir.

Sitaramachandrarao (1987) yapt¬g¬¼ çal¬¸sman¬n amac¬n¬n Dedekind’in sonsuz seri temsili için temel bir ispat vermek oldugunu¼ belirtmi¸stir. Yani bu çal¬¸smas¬nda, (h; k) = 1 olmak üzere

$$s(h;k)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{r=1\\ r\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ k)}}^{\infty}\frac{\cot(\pi hr/k)}{r}$$

sonsuz seri temsili için temel bir ispat vermi¸stir. Bu ispat¬ise sonlu Fourier serilerini kullanarak vermi¸stir. Ayr¬ca sonlu Fourier serilerini kullanarak, Rademacher (1933, 1964) çal¬¸smalar¬nda (h; k) = 1 için

$$s(h;k)=\frac{1}{4k}\sum_{r=1}^{k-1}\cot\frac{\pi r}{k}\cot\frac{\pi hr}{k}$$

oldugunu¼ ispatlad¬.

Teorem 2.3.1.2. k > 0, h ve k tamsay¬lar ve (h; k) = 1 olmak üzere,

a) Eger¼ h^0 h (mod k) ise bu durumda

$$s(h^0; k) = \quad s(h; k)$$

dir.

b) Eger¼ $\overline{h}h$ 1 (mod k) ise bu durumda

$$s(\overline{h}; k) = \quad s(h; k)$$

dir.

c) Eger¼ $h^2 + 1$ 0 (mod k) ise bu durumda

$$s(h; k) = 0$$

d¬r (Apostol 1976).

Dedekind toplamlar¬ a¸sag¬¼daki aritmetik özelliklere sahiptir (Hardy 1969, Apostol 1976, Berndt 1978, Goldberg 1981, Berndt ve Goldberg 1984, Asai 1986, Pettet ve Sitaramachandraro 1989):

$$((\quad x)) = \quad ((x))$$

oldugundan¼

$$s(\quad h; k) = \quad s(h; k)$$

ve

$$s(h; \quad k) = s(h; k)$$

d¬r.

Teorem 2.3.1.3. 6ks(h; k) say¬s¬ bir tamsay¬d¬r. Dahas¬ eger¼ = (3; k) ise bu durumda,

$$12hks(k;h) \quad 0 \pmod{k}$$

ve

$$12hks(h;k) \quad h^{2} + 1 \pmod{k}$$

d¬r (Apostol 1976).

Teorem 2.3.1.4. Dedekind toplamlar¬

$$12ks(h;k)\ (k\ 1)(k+2)\ 4h(k\ 1) + 4 \pmod{8}\ k \sum_{r<k=2} \frac{2hr}{\ }$$

kongrüans¬n¬saglar¼. Eger¼ k bir tek tam say¬ise bu durumda yukar¬da verilen kongrüans

$$12ks(h;k)\ k\ 1 + 4 \pmod{8}\ k \sum_{r<k=2} \frac{2hr}{\ }$$

d¬r (Apostol 1976).

2.3.2. Hardy-Berndt toplamlar¬ve özellikleri

Hardy-Berndt toplamlar¬iyi bilinen sonlu özel toplamlardan birisidir. Daha önce de bahsedildigi¼ gibi, teta fonksiyonlar¬n¬n modüler gruplar alt¬ndaki davran¬¸s¬n¬n incelenmesiyle Hardy-Berndt toplamlar¬bulunmu¸stur. Daha sonraki bölümlerde verilecek olan yeni bulunan sonlu toplamlarla da ili¸skili olan Hardy-Berndt toplam-lar¬n¬n bu çal¬¸smadaki yeri ve önemi büyüktür. Bu k¬s¬mda önce k¬saca Hardy-Berndt toplamlar¬n¬n tarihinden bahsedilecek, daha sonra da baz¬ temel ve trigonometrik özellikleri verilecektir.

Hardy 1905’de Dedekind toplamlar¬n¬n reciprocity bag¬¼nt¬s¬n¬n ispat¬n¬ degi¸¼sik bir metodla veren ilk ki¸siydi. Asl¬nda Hardy, s¬n¬r integrasyonunu kullanarak ek olarak baz¬ reciprocity bag¬¼nt¬lar¬ da ispatlad¬ ve çal¬¸smas¬n¬n sonunda benzer aritmetik toplamlar için onbir tane daha reciprocity teoremi verdi. Bunlardan birisi Dedekind toplamlar¬n¬içeren reciprocity teoremidir (Hardy 1969).

Son y¬llarda Hardy toplamlar¬bir çok matematikçinin ilgi alan¬na girmi¸stir. Goldberg, Hardy toplamlar¬üzerine doktora tez çal¬¸smas¬n¬tamamlad¬ktan sonra, Berndt ve Goldberg taraf¬ndan Hardy toplamlar¬n¬n alt¬tanesinin aritmetik özellikleri, bun-lar¬n reciprocity bag¬¼nt¬lar¬ve sonlu-sonsuz seri temsilleri verilmi¸stir. Hardy’nin reci-procity teoremlerinden be¸s tanesi, Berndt (1978) ve Goldberg (1981) taraf¬ndan il-ginç bir ¸sekilde ele al¬nm¬¸st¬r. T¬pk¬Dedekind’in (2.8) e¸sitligine,¼ Log ( ) için verdigi¼ dönü¸süm formülleri yard¬m¬yla ula¸smas¬gibi, Berndt (1978) ve Goldberg (1981) de bu toplamlarla kar¸s¬la¸st¬lar ve Berndt’in (1978) klasik teta fonksiyonlar¬n¬n logarit-malar¬için vermi¸s oldugu¼ dönü¸süm formülü sayesinde reciprocity teoremlerini elde ettiler.

Hardy öldükten sonra, Hardy taraf¬ndan verilen onbir toplam¬n alt¬tanesi B. Berndt, Goldberg ve diger¼ matematikçiler taraf¬ndan, Hardy toplamlar¬olarak adland¬r¬lm¬¸st¬r. Günümüzde bir çok farkl¬alanda bu toplamlar çal¬¸s¬lmaktad¬r. Berndt’in bu alanda yapm¬¸s oldugu¼ katk¬lardan dolay¬ ve Berndt’in Hardy toplamlar¬n¬n sonsuz seri temsillerini vermesinin ard¬ndan, bu toplamlar Hardy-Berndt toplamlar¬olarak ad-land¬r¬lm¬¸st¬r.

Hardy toplamlar¬veya Hardy-Berndt aritmetik toplamlar¬k > 0 olmak üzere, a¸sag¬¼-daki ¸sekilde tan¬mlan¬r:

$$S(h;k)=\sum_{a \bmod k}(-1)^{a+1+[\frac{ah}{k}]};$$

$$s_1(h;k)=\sum_{a \bmod k}(-1)^{\left[\frac{ah}{k}\right]}\left(\left(\frac{a}{k}\right)\right);$$

$$s_2(h;k)=\sum_{a \bmod k}(-1)^{a}\left(\left(\frac{a}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{ah}{k}\right)\right); \tag{2.9}$$

$$s_3(h;k)=\sum_{a \bmod k}(-1)^{a}\left(\left(\frac{ah}{k}\right)\right);$$

$$s_4(h;k)=\sum_{a \bmod k}(-1)^{\left[\frac{ah}{k}\right]};$$

ve

$$s_5(h;k)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+\left[\frac{hj}{k}\right]}\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right):$$

Özel olarak h ve k tek tamsayılar olduğunda, $s_5(h;k)$ toplamı için aşağıdaki eşitlik de gerçeklenmektedir (Berndt ve Goldberg 1984):

$$s_5(h;k)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1} j(-1)^{j+\left[\frac{hj}{k}\right]} \tag{2.10}$$

Teorem 2.3.2.1. h ve k aralarında asal pozitif tamsayılar olsun. Eğer h ve k tek tamsayılarsa bu durumda

$$s_5(h;k)+s_5(k;h)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2hk}: \tag{2.11}$$

olur (Hardy 1969, Berndt 1978, Goldberg 1981, Apostol ve Vu 1982, Berndt ve Goldberg 1984, Sitaramachandrarao 1987).

Ayrıca, aşağıdaki eşitlikler bu tezde kullanılacaktır (Pettet ve Sitaramachandraro 1989):

$$\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{j+\left[\frac{kj}{h}\right]}\frac{j}{h}=s_5(k;h)-\frac{1}{2}S(k;h)$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+\left[\frac{hj}{k}\right]}\frac{j}{k}=s_5(h;k)-\frac{1}{2}S(h;k) \tag{2.12}$$

Sitaramachandraro (1987) Hardy toplamlar¬ile Dedekind toplam¬aras¬ndaki bag¬¼n-t¬lar¬a¸sag¬¼daki teoremlerle vermi¸stir:

Teorem 2.3.2.2. h ve k aralar¬nda asal pozitif tamsay¬lar olsun. Eger¼ h + k çift ise bu durumda

$$s_5(h; k) = \quad 10s(h; k) + 4s(2h; k) + 4s(h; 2k) \tag{2.13}$$

ve eger¼ h + k tek ise

$$s_5(h; k) = 0 \tag{2.14}$$

olur.

Teorem 2.3.2.3. (h; k) = 1 olsun. Bu durumda

$$S(h; k) = 8s(h; 2k) + 8s(2h; k) \quad 20s(h; k); \text{ eger¼ } h + k \text{ tek ise},$$

$$s_1(h; k) = 2s(h; k) \quad 4s(h; 2k); \text{ eger¼ } h \text{ çift ise},$$

$$s_2(h; k) = \quad s(h; k) + 2s(2h; k); \text{ eger¼ } k \text{ çift ise}, \tag{2.15}$$

$$s_3(h; k) = 2s(h; k) \quad 4s(2h; k); \text{ eger¼ } k \text{ tek ise},$$

$$s_4(h; k) = \quad 4s(h; k) + 8s(h; 2k); \text{ eger¼ } h \text{ tek ise},$$

e¸sitlikleri geçerlidir. Ayr¬ca S(h; k) toplam¬h + k çift olmas¬ durumunda, s_1(h; k) toplam¬h tek olmas¬durumunda, s_2(h; k) toplam¬k tek olmas¬durumunda, s_3(h; k) toplam¬k çift olmas¬durumunda ve s_4(h; k) toplam¬h çift olmas¬durumunda s¬f¬ra e¸sittir.

Teorem 2.3.2.4. Eger¼ h ve k tek tamsay¬lar ve (h; k) = 1 ise, bu durumda

$$S(h; k) = S(k; h) = 0 \tag{2.16}$$

d¬r (Apostol ve Vu 1982).

Teorem 2.3.2.5. h ve k aralar¬nda asal pozitif tamsay¬lar olsun. Bu durumda a¸sag¬¼-daki e¸sitlikler geçerlidir:

Eger¼ k tek tamsay¬ise o zaman

$$2s_3(h;k) - s_4(k;h) = 1 - \frac{h}{k}; \tag{2.17}$$

d¬r. Eger¼ h + k tek tamsay¬ise o zaman

$$S(h;k) + S(k;h) = 1; \tag{2.18}$$

d¬r. Eger¼ h çift tamsay¬ise o zaman

$$s_1(h;k) - 2s_2(k;h) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{hk} + \frac{k}{h}\right);$$

d¬r (Apostol ve Vu 1982, Sitaramachandrarao 1987).

Uyar¬2.3.2.6. Teorem 2.3.2.5. ile verilen reciprocity bag¬¼nt¬lar¬ve (2.11) Hardy'nin (1969) çal¬¸smas¬nda mevcuttur.

Hardy-Berndt toplamlar¬nda (2.3) e¸sitligi¼ kullan¬larak, Hardy-Berndt toplamlar¬ile trigonometrik fonksiyonlar aras¬ndaki a¸sag¬¼daki ili¸skiler verilmi¸stir:

Teorem 2.3.2.7. k > 0 olmak üzere h ve k aralar¬nda asal tamsay¬lar olsun. Eger¼ h + k tek ise bu durumda,

$$S(h;k) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi h(2n-1)}{2k}\right)}{2n-1} \tag{2.19}$$

e¸sitligi¼ geçerlidir. Eger¼ h çift ve k tek ise bu durumda

$$s_1(h;k) = \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ 2n-1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)}}^{\infty} \frac{\cot\frac{\pi h(2n-1)}{2k}}{2n-1}$$

e¸sitligi¼ geçerlidir. Eger¼ h tek ve k çift ise bu durumda,

$$s_2(h;k) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)}}^{\infty} \frac{\tan\frac{\pi hn}{k}}{n}$$

e¸sitligi¼ geçerlidir. Eger¼ k tek ise bu durumda,

$$-\frac{1}{\pi}\sum^{\infty} \frac{\tan\frac{\pi hn}{k}}{n}$$

e¸sitligi¼ geçerlidir. Eger¼ h tek ise bu durumda,

$$s_4(h;k) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot\frac{\pi h(2n-1)}{2k}}{2n-1}$$

e¸sitligi¼ geçerlidir ve son olarak eger¼ h ve k tek ise bu durumda,

$$s_5(h;k) = \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ 2n-1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)}}^{\infty} \frac{\tan\frac{\pi h(2n-1)}{2k}}{2n-1} \tag{2.20}$$

e¸sitligi¼ geçerlidir.

Yukar¬da verilen teorem ilk olarak Berndt ve Goldberg taraf¬ndan verilmi¸stir (Berndt ve Goldberg 1984). Bu teorem ayr¬ca Sitaramachandrarao (1987) taraf¬ndan da is-patlanm¬¸st¬r.

Teorem 2.3.2.8. k > 0 olmak üzere h ve k aralar¬nda asal tamsay¬lar olsun. Eger¼ h + k tek ise bu durumda,

$$S(h;k) = -\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} \tan\frac{h(2m-1)}{2k}\cot\frac{(2m-1)}{2k} \tag{2.21}$$

e¸sitligi¼ elde edilir. Eger¼ h çift ve k tek ise bu durumda,

$$s_1(h;k) = \frac{1}{2k}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq\frac{k+1}{2}}}^{k} \cot\frac{h(2m-1)}{2k}\cot\frac{(2m-1)}{2k}$$

e¸sitligi¼ elde edilir. Eger¼ h tek ve k çift ise bu durumda,

$$s_2(h;k) = \frac{1}{4k}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq\frac{k}{2}}}^{k} \tan\frac{hm}{k}\cot\frac{m}{k}$$

e¸sitligi¼ elde edilir. Eger¼ k tek ise bu durumda,

$$s_3(h;k) = \frac{1}{2k}\sum_{m=1}^{k-1} \tan\frac{hm}{k}\cot\frac{m}{k}$$

e¸sitligi¼ elde eilir. Eger¼ h tek ise bu durumda,

$$s_4(h;k) = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} \cot\frac{h(2m-1)}{2k}\cot\frac{(2m-1)}{2k}$$

e¸sitligi¼ elde edilir. Son olarak eger¼ h tek ve k tek ise bu durumda,

$$s_5(h;k) = \frac{1}{2k}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq\frac{k+1}{2}}}^{k} \tan\frac{h(2m-1)}{2k}\tan\frac{(2m-1)}{2k} \tag{2.22}$$

e¸sitligi¼ elde edilir.

Yukar¬da verilen son teoremin farkl¬bir ispat¬Berndt ve Goldberg (1984) taraf¬ndan verilmi¸stir.

Hardy-Berndt toplamlar¬ve log $_n(z)$ (n = 2; 3; 4) aras¬ndaki ili¸skiler a¸sag¬¼daki teorem ile verilmi¸stir.

Teorem 2.3.2.9. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$; c > 0 olsun. Eger¼ c çift ve (c; d) = 1 ise bu durumda

$$\log_2(Az) = \log_2(z) + \frac{1}{2}\log(cz+d) \quad \frac{i}{4} + i \quad \frac{a+d}{4c} \quad is_2(d;c)$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2.10. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^0(2)$; c > 0 olsun. Eger¼ d tek ve (c; d) = 1 ise bu durumda

$$\log_4(Az) = \log_4(z) + \frac{1}{2}\log(cz+d) \quad \frac{i}{4} \quad \frac{i}{4} is_4(d;c)$$

elde edilir.

Uyar¬2.3.2.11. Teorem 2.3.2.9. ve Teorem 2.3.2.10. ile fonksiyonlar¬ile Hardy-Berndt toplamlar¬aras¬ndaki bag¬¼nt¬lar verilmi¸stir. Bu teoremlerin farkl¬ispatlar¬, B. C. Berndt ve Y. Sim¸sek taraf¬ndan verilmi¸stir.

2.3.3. Y(h; k) toplamlar¬ve özellikleri

Simsek (2009) çal¬¸smas¬nda $s_5(h;k)$ ile baglant¬¼l¬ yeni bir toplam tan¬mlad¬. Bu toplam a¸sag¬¼da verlmi¸stir:

h ve k aralar¬nda asal tamsay¬lar olmak üzere,

$$Y(h;k) = 4k \sum_{j \bmod k} (-1)^{j+\left[\frac{hj}{k}\right]} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right) \tag{2.23}$$

dir. Simdi¸ bu Y (h; k) toplamlar¬n¬n baz¬ özelliklerinden k¬saca bahsedilecektir. Ilk olarak reciprocity bag¬¼nt¬s¬verilecektir.

Teorem.2.3.3.1. (h; k) = 1 olmak üzere h ve k aralar¬nda asal pozitif tek tamsay¬lar ise bu durumda

$$hY(h;k) + kY(k;h) = 2hk \quad 2 \qquad (2.24)$$

dir (Simsek 2009).

Bu teoremin ispat¬ Y. Sim¸sek taraf¬ndan iki farkl¬ yoldan ispatlanm¬¸st¬r. Birinci ispat, yar¬gruplar üzerinde matris dönü¸sümleri yap¬larak verilmi¸stir. İkinci ispat ise f(z) = cot z tan hz tan kz fonksiyonuna, kö¸seleri i ; $\frac{1}{2}$ i olan dikdörtgensel yol boyunca Cauchy-Rezidü teoremi uygulanarak yap¬lm¬¸st¬r (Simsek 2009,2013). Bu teoremin farkl¬yoldan yeni bir ispat¬bir sonraki bölümde verilecektir.

Berndt ve Goldberg (1984), Hardy-Berndt toplamlar¬n¬n sonlu trigonometrik toplam olarak gösterimlerini verdiler. Bu gösterimleri kullanarak Sim¸sek (2009) çal¬¸smas¬nda Y (h; k) toplam¬için de benzer bir trigonometrik gösterimi a¸sag¬¼daki ¸sekilde verdi:

$$Y(h;k) = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \frac{k+1}{2}}}^{k} \tan \frac{h(2j \quad 1)}{2k} \cot \frac{(2j \quad 1)}{2k} :$$

s(h; k) ve s_5(h; k) toplamlar¬n¬n aritmetik özellikleri kullan¬larak, Y (h; k) toplam¬n¬n a¸sag¬¼daki aritmetik özellikleri saglad¬¼g¬gösterilmi¸¼stir (Simsek 2009):

$$Y(\quad h;k) = \quad Y(h;k);$$

dir. Eger¼ hK $\quad$ 1(mod k) ise bu durumda

$$Y(K;k) = \quad Y(h;k);$$

d¬r. Eger¼ Hk 1(mod K) ise bu durumda

$$Y(k;K) = Y(H;K):$$

3. BAZI YENI ÖZEL SONLU TOPLAMLAR

Bu bölümde öncelikle üçlü ve ikili terim bag¬¼nt¬lar¬verilecektir. Daha sonra [x] ve ((x)) fonksiyonlar¬n¬içeren baz¬yeni sonlu toplamlar tan¬mlanacakt¬r. Bu toplamlar içerisinden bir tanesinin reciprocity bag¬¼nt¬s¬ verilecektir. Diger¼ sonlu toplamlar¬n reciprocity bag¬¼nt¬lar¬aç¬k problem olarak b¬rak¬lm¬¸st¬r. Daha sonra ise, üçlü terim bag¬¼nt¬lar¬ndan faydalanarak Carlitz polinomlar¬n¬n k¬smi türevleri bulunacak ve bunlar¬n uygulamalar¬verilecektir.

3.1. Hardy-Berndt Toplamlar¬Için Üçlü Terim Bag¬¼nt¬lar¬

Simsek (1993) çal¬¸smas¬nda, üçlü terim bag¬¼nt¬s¬na k¬smi türev uygulayarak Hardy-Berndt toplamlar¬n¬içeren yeni teoremler vermi¸stir. Bu k¬s¬mda, bir sonraki k¬s¬mda gerekli olacak olan üçlü terim bag¬¼nt¬s¬ verilecektir. Bölüm boyunca a, b, ve c'nin iki¸ser iki¸ser aralar¬nda asal tamsay¬lar oldugu¼ ve a^{0}, b^{0} ve c^{0} saylar¬n¬n

$$aa^{0} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ b);\ bb^{0} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ c);\ \text{and}\ cc^{0} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ a)$$

denkliklerini saglad¬¼g¬kabul¼ edilecektir. Ayr¬ca bu k¬s¬mda Y (h; k) toplam¬n¬n reci-procity bag¬¼nt¬s¬için farkl¬yoldan yeni bir ispat verilecektir.

Teorem 3.1.1. (Üçlü ve ikili terim bag¬¼nt¬lar¬) Eger¼ a, b ve c iki¸ser iki¸ser aralar¬nda asal tamsay¬lar ise, bu durumda

$$(u-1)\sum_{x=1}^{a-1} u^{x-1} v^{[\frac{bx}{a}]} w^{[\frac{cx}{a}]} + (v-1)\sum_{y=1}^{b-1} v^{y-1} w^{[\frac{cy}{b}]} u^{[\frac{ay}{b}]} + (w-1)\sum_{z=1}^{c-1} w^{z-1} u^{[\frac{az}{c}]} v^{[\frac{bz}{c}]} = u^{a-1} v^{b-1} w^{c-1} - 1 \tag{3.1}$$

ve

$$(u-1)\sum_{x=1}^{a-1} u^{x-1} v^{[\frac{bx}{a}]} + (v-1)\sum_{y=1}^{b-1} v^{y-1} u^{[\frac{ay}{b}]} = u^{a-1} v^{b-1} - 1 \tag{3.2}$$

e¸sitlikleri gerçeklenir. (3.2) e¸sitligi¼ ilk olarak Berndt ve Dieter (1982) taraf¬ndan verilmi¸stir. S¬radaki sonuç ilk olarak Carlitz (1975) taraf¬ndan verilmi¸stir.

Sonuç 3.1.2. Eger¼ a ve b aralar¬nda asal tamsay¬lar ise, bu durumda

$$(u-1)\sum_{x=1}^{b-1}u^{b-x-1}v^{[\frac{ax}{b}]}+(v-1)\sum_{y=1}^{a-1}v^{a-y-1}u^{[\frac{by}{a}]}=u^{b-1}v^{a-1}-1$$

d¬r (Carlitz 1975).

Pettet ve Sitaramachandrarao (1989) taraf¬ndan verilen a¸sag¬¼daki bag¬¼nt¬lar daha sonraki bölümlerde faydal¬olacakt¬r:

$$s_1(ca_0;b)=\sum_{y=1}^{b-1}(-1)^{y+[\frac{cy}{b}]}\frac{ay}{b} \tag{3.3}$$

$$s_4(bc_0;a)=\sum_{x=1}^{a-1}(-1)^{[\frac{bx}{a}]+[\frac{cx}{a}]} \tag{3.4}$$

$$s_3(ab_0;c)=\sum_{z=1}^{c-1}(-1)^{z+[\frac{bz}{c}]}\frac{az}{c} \tag{3.5}$$

$$s_2(ca_0;b)=\sum_{y=1}^{b-1}(-1)^{y}\frac{cy}{b}\frac{ay}{b} \tag{3.6}$$

$$s_1(bc_0;a)=\sum_{x=1}^{a-1}(-1)^{[\frac{bx}{a}]}\frac{cx}{a} \tag{3.7}$$

$$s_3(ab_0;c)=\sum_{z=1}^{c-1}(-1)^{[\frac{bz}{c}]}\frac{az}{c} \tag{3.8}$$

ve

$$s_5(cb_0;a)=\sum_{x=1}^{a-1}(-1)^{x+[\frac{cx}{a}]}\frac{bx}{a} \tag{3.9}$$

dir.

A¸sag¬¼daki teoremin ispat¬ Y. Sim¸sek taraf¬ndan iki farkl¬ ¸sekilde verilmi¸stir. Bu-rada ise teoremin ispat¬, polinomlar¬n ikili terim bag¬¼nt¬s¬yard¬m¬yla farkl¬yoldan verilecektir.

Teorem 3.1.3. (a; b) = 1 olmak üzere a ve b aralar¬nda asal pozitif tek tamsay¬lar ise bu durumda

$$aY(a;b) + bY(b;a) = 2ab - 2$$

dir (Simsek 2009).

.

3. Ispat. Bu teorem ikili terim bag¬¼nt¬s¬kullan¬larak da kolayca ispatlanabilir. (3.2) e¸sitliginin¼ u'ya göre k¬smi türevi al¬n¬r ve u = v = 1 yaz¬l¬rsa bu durumda

$$\sum_{x=1}^{a-1}(-1)^{x+\left[\frac{bx}{a}\right]} - 2\sum_{x=1}^{a-1}x(-1)^{x+\left[\frac{bx}{a}\right]} - 2\sum_{y=1}^{b-1}\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle(-1)^{y+\left[\frac{ay}{b}\right]} = (a-1)(-1)^{a+b-1} \tag{3.10}$$

elde edilir. Benzer ¸sekilde (3.2) e¸sitliginin¼ v'ye göre k¬smi türevi al¬n¬r ve u = v = 1 yaz¬l¬rsa bu durumda

$$-2\sum_{x=1}^{a-1}\frac{bx}{a}(-1)^{x+\left[\frac{bx}{a}\right]} + \sum_{y=1}^{b-1}(-1)^{y+\left[\frac{ay}{b}\right]} - 2\sum_{y=1}^{b-1}y(-1)^{y+\left[\frac{ay}{b}\right]} = (b-1)(-1)^{a+b-1} \tag{3.11}$$

bulunur. (3.10) e¸sitligi¼ b ile (3.11) e¸sitligi¼ a ile çarp¬l¬p bu yeni bulunan denklemler taraf tarafa toplan¬rsa

$$2b\sum_{x=1}^{a-1}x(-1)^{x+\left[\frac{bx}{a}\right]} + 2a\sum_{y=1}^{b-1}y(-1)^{y+\left[\frac{ay}{b}\right]} + 2b\sum_{y=1}^{b-1}\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle(-1)^{y+\left[\frac{ay}{b}\right]} + 2a\sum_{x=1}^{a-1}\frac{bx}{a}(-1)^{x+\left[\frac{bx}{a}\right]} = 2ab - a - b$$

bulunur. Elde edilen son ifade düzenlenirse

$$2ab\left(-\frac{1}{a}\sum_{x=1}^{a-1} x(-1)^{x+[\frac{bx}{a}]}\right)+2ab\left(-\frac{1}{b}\sum_{y=1}^{b-1} y(-1)^{y+[\frac{ay}{b}]}\right)+2ab\sum_{y=1}^{b-1}\frac{y}{b}(-1)^{y+[\frac{ay}{b}]}$$
$$-2a\sum_{x=1}^{a-1} a(-1)^{x+[\frac{bx}{a}]}+a\sum_{x=1}^{a-1}(-1)^{x+[\frac{bx}{a}]}=2ab-a-b$$

bulunur. Temel Kavramlar bölümünün ilk k¬s¬mlar¬nda verilen bilgilerin ¬¸s¬g¬¼nda tekrar düzenleme yap¬l¬rsa

$$2ab.s_5(b;a)+2ab.s_5(a;b)+2ab\left(s_5(a;b)-\frac{1}{2}S(a;b)-2b\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)\right)$$
$$+2ab\left(s_5(b;a)-\frac{1}{2}S(b;a)-2a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}\right)\right)=2ab-a-b$$

elde edilir. Son olarak (2.23) e¸sitligi¼ kullan¬l¬rsa

$$b.Y(b;a)+a.Y(a;b)=2ab-2$$

bulunur.

3.2. [x] ve ((x)) Fonksiyonlar¬n¬ İçeren Yeni Sonlu Toplamlar

Bu k¬s¬mda, hem [x] ve ((x)) fonksiyonlar¬yla hem de Dedekind, Hardy-Berndt, Y (h; k) toplamlar¬yla baglant¬¼l¬ yeni sonlu toplamlar tan¬mlanacakt¬r. Ayr¬ca bu yeni toplamlar için reciprocity bag¬¼n¬tlar¬ ara¸st¬r¬lacakt¬r.

Tan¬m 3.2.1. $a_1; a_2; \ldots; a_n$ iki¸ser iki¸ser aralar¬nda asal pozitif tamsay¬lar olsun. $Y_{n-1}(a_1; \ldots; a_{n-1}; a_n)$, $B_{n-1}(a_1; \ldots; a_{n-1}; a_n)$ ve $C(a_1; a_2; \ldots; a_{n-1}; a_n; k)$, toplamlar¬

sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$Y_{n-1}(a_1;\ldots;a_{n-1};a_n)=\sum_{j=1}^{a_n-1}(2j-1)(-1)^{j+\left[\frac{a_1 j}{a_n}\right]+\cdots+\left[\frac{a_{n-1} j}{a_n}\right]};$$

$$B_{n-1}(a_1;\ldots;a_{n-1};a_n)=\sum_{j=1}^{a_n-1}(-1)^{j+\left[\frac{a_1 j}{a_n}\right]+\cdots+\left[\frac{a_{n-1} j}{a_n}\right]}; \qquad (3.12)$$

ve

$$C(a_1;a_2;\ldots;a_{n-1};a_n;k)=\sum_{j=1}^{a_n-1} j^k(-1)^{j+\left[\frac{a_1 j}{a_n}\right]+\cdots+\left[\frac{a_{n-1} j}{a_n}\right]}.$$

Burada $n \geq 2$ pozitif bir tamsayıdır (Cetin ve ark. 2014).

(3.12) eşitliğinde $n = 2$ ve $k = 2$ olarak alınırsa,

$$Y_1(a_1;a_2)=\sum_{j=1}^{a_2-1}(2j-1)(-1)^{j+\left[\frac{a_1 j}{a_2}\right]}; \qquad (3.13)$$

$$B_1(a_1;a_2)=\sum_{j=1}^{a_2-1}(-1)^{j+\left[\frac{a_1 j}{a_2}\right]}; \qquad (3.14)$$

ve

$$C(a_1;a_2;2)=\sum_{j=1}^{a_2-1} j^2(-1)^{j+\left[\frac{a_1 j}{a_2}\right]}$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14) eşitliklerinde

$$[x] = x - ((x)) - \frac{1}{2}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} Y_1(a_1;a_2) = {} & -(a_1+a_2)\, s_5(a_1;a_2) + C_1(a_1;a_2) - 2C_2(a_1;a_2) \\ & + \frac{2a_1}{a_2} C(a_1;a_2;2) - \frac{1}{2} S(a_1;a_2) \end{aligned}$$

ve

$$B_1(a_1; a_2) = a_1 s_5(a_1; a_2) \quad C_1(a_1; a_2) + \frac{1}{2} S(a_1; a_2)$$

bulunur. Burada

$$C_1(a_1 \qquad a_2 \; 1 \qquad \underline{a_1 j} \qquad \underline{a\,j}$$

ve

$$C_2(a_1 ; a_2) = \sum_{j=1} j(\;\;1)^{j+h} \; \underline{a_2}^{\,i} \; \underline{a^{12}}$$

dir. Böylece verilen yeni sonlu toplam tan¬mlar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬ve Y $(a_1; a_2)$ toplam¬ ile ili¸skilidir. Dedekind toplamlar¬, Hardy-Berndt toplamlar¬ ve Y $(a_1; a_2)$ toplam¬gibi sonlu toplamlar için reciprocity bag¬¼nt¬s¬oldukça büyük önem ta¸s¬mak-tad¬r. Bu nedenle s¬radaki teorem ile $Y_{n\;1}(a_1; : : : ; a_{n\;1}; a_n)$ toplam¬için reciprocity bag¬¼nt¬s¬verilecektir.

Teorem 3.2.2. n 2 olacak ¸sekilde bir dogal¼ say¬, $a_1; a_2; : : : ; a_n$ iki¸ser iki¸ser ar-alar¬nda asal pozitif tamsay¬lar olsun. Bu durumda

$$Y_{n\;1}(a_2; a_3 : : : ; a_n; a_1) + Y_{n\;1}(a_1; a_3 : : : ; a_n; a_2) + \quad + Y_{n\;1}(a_1; a_2 : : : ; a_{n\;1}; a_n)$$

$$= \prod_{m=1}^{n} (\;\;1)^{a_m\;1}(a_m \;\; 1)$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir (Cetin ve ark. 2014).

Tan¬m 3.2.3. $a_1; a_2; : : : ; a_n$ iki¸ser iki¸ser aralar¬nda asal pozitif tamsay¬lar olsun. Y $S_{k;n}(a_1; : : : ; a_{n\;1}; a_n)$ toplam¬a¸sag¬¼daki gibi tan¬mlan¬r:

$$Y S_{k;n}(a_1; : : : ; a_{n\;1}; a_n) = \sum_{j=1} a_n k a_n a_n \quad \underline{\;\;} \quad \underline{\frac{j}{1}} \quad \underline{\frac{a j}{2}} \quad \frac{a_n}{\underline{a_{n\;1}\,j}} \tag{3.15}$$

(3.15) denkleminde k = 1 ve n = 2 al¬n¬rsa, bu durumda $(a_1; a_2) = 1$ olmak üzere Dedekind toplamlar¬elde edilir. Yani

$$S_{1;2}(a_1; a_2) = s(a_1, a_2) = \sum_{j=1}^{a_2} \left(\left(\frac{j}{a_2}\right)\right)\left(\left(\frac{a_1 j}{a_2}\right)\right)$$

bulunur. Ayr¬ca (3.15) denkleminde n = 2 al¬n¬rsa,

$$S_{k;2}(a_1, a_2) = \sum_{j=1}^{a_2} \frac{j^k}{a_2^k}\left(\left(\frac{a_1 j}{a_2}\right)\right)$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014).

3.3. Carlitz Polinomlar¬ile Bunlar¬n K¬smi Türevleri ve Uygulamalar¬

Bu k¬s¬mda Carlitz polinomlar¬ hakk¬nda k¬saca bilgi verilecektir. Daha sonra bu polinomlar için k¬smi diferansiyel denklemler elde edilecek ve k¬smi türevlerle ilgili bir çok uygulama verilecektir. Carlitz polinomlar¬n¬n k¬smi türevleri Hardy-Berndt toplamlar¬, Sim¸sek toplamlar¬ Y (h; k) ve farkl¬ yeni toplamlarla da baglant¬¼l¬d¬r. A¸sag¬¼da verilen Tan¬m 3.3.1. ve Teorem 3.3.2., Beck (2006) taraf¬ndan verilmi¸stir:

Tan¬m 3.3.1. $a_1; a_2; \ldots; a_n$ pozitif tamsay¬lar olmak üzere $c(u_1; u_2; \ldots; u_n; a_1; a_2; \ldots; a_n)$ olarak adland¬r¬lan Carlitz polinomlar¬a¸sag¬¼daki ¸sekilde tan¬mlanm¬¸st¬r:

$$c(u_1; u_2; \ldots; u_n; a_1; a_2; \ldots; a_n) := \sum_{k=1}^{a_1-1} u_1^{k-1} u_2^{\left[\frac{ka_2}{a_1}\right]} u_3^{\left[\frac{ka_3}{a_1}\right]} \cdots u_n^{\left[\frac{ka_n}{a_1}\right]}.$$

Teorem 3.3.2. Eger¼ $a_1; a_2; \ldots; a_n$ iki¸ser iki¸ser aralar¬nda asal pozitif tamsay¬lar ise, bu durumda

$$(u_1 - 1)c(u_1; u_2; \ldots; u_n; a_1; a_2; \ldots; a_n)+(u_2 - 1)c(u_2; u_3; \ldots; u_n; u_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; a_1)+\cdots+$$

$$(u_n - 1)c(u_n; u_1; \ldots; u_{n-1}; a_n; a_1; \ldots; a_{n-1}) = u_1^{a_1-1}u_2^{a_2-1}\cdots u_n^{a_n-1} - 1.$$

Tan¬m 3.3.3. u; v; w degi¸¼skenler, a; b; c iki¸ser iki¸ser aralar¬nda asal pozitif tamsay¬lar, ve $k_1; k_2; k_3$ negatif olmayan tamsay¬lar¬da s¬ras¬yla u; v; w degi¸¼skenlerinin türevlerinin mertebesi olsun. Bu durumda $\mathcal{F}(u; v; w; a; b; c; k_1; k_2; k_3)$ polinomu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(u; v; w; a; b; c; k_1; k_2; k_3) = {} & k_1 \sum_{x=1}^{a-1} (x-1)_{k_1-1} \left[\frac{bx}{a}\right]_{k_2} \left[\frac{cx}{a}\right]_{k_3} u^{x} v^{[\frac{bx}{a}]} w^{[\frac{cx}{a}]} \\
& +(u-1) \sum_{x=1}^{a-1} (x-1)_{k_1} \left[\frac{bx}{a}\right]_{k_2} \left[\frac{cx}{a}\right]_{k_3} u^{x-1} v^{[\frac{bx}{a}]} w^{[\frac{cx}{a}]} \\
& +k_2 \sum_{y=1}^{b-1} (y-1)_{k_2-1} \left[\frac{ay}{b}\right]_{k_1} \left[\frac{cy}{b}\right]_{k_3} v^{y} w^{[\frac{cy}{b}]} u^{[\frac{ay}{b}]} \\
& +(v-1) \sum_{y=1}^{b-1} (y-1)_{k_2} \left[\frac{ay}{b}\right]_{k_1} \left[\frac{cy}{b}\right]_{k_3} v^{y-1} w^{[\frac{cy}{b}]} u^{[\frac{ay}{b}]} \\
& +k_3 \sum_{z=1}^{c-1} (z-1)_{k_3-1} \left[\frac{az}{c}\right]_{k_1} \left[\frac{bz}{c}\right]_{k_2} w^{z} u^{[\frac{az}{c}]} v^{[\frac{bz}{c}]} \\
& +(w-1) \sum_{z=1}^{c-1} (z-1)_{k_3} \left[\frac{az}{c}\right]_{k_1} \left[\frac{bz}{c}\right]_{k_2} w^{z-1} u^{[\frac{az}{c}]} v^{[\frac{bz}{c}]};
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

d¬r. Burada $k_1; k_2$ ve k_3 ayn¬anda s¬f¬r olmamaktad¬r ve ayr¬ca $n \geq 0$ için

$$
(\alpha)_n = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} (\alpha + k - 1); & \text{eger¼ } n \geq 1 \\ 1; & \text{eger¼ } n = 0; \end{cases}
$$

ve

$$
[\alpha]_k = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} ([\alpha] + k - 1); & \text{eger¼ } n \geq 1 \\ 1; & \text{eger¼ } n = 0; \end{cases}
$$

dir (Cetin ve ark. 2014).

Teorem 3.3.4. u; v; w degi¸¼skenler, a; b; c iki¸ser iki¸ser aralar¬nda asal pozitif tamsay¬lar ve $k_1; k_2; k_3$ negatif olmayan tamsay¬lar¬ da s¬ras¬yla u; v; w degi¸¼skenlerinin türevlerinin mertebesi olsun. Bu durumda $F(u;v;w;a;b;c;k_1;k_2;k_3)$ polinomu

$$F(u;v;w;a;b;c;k_1;k_2;k_3) = (a-1)_{k_1}(b-1)_{k_2}(c-1)_{k_3}\,u^{a-1}v^{b-1}w^{c-1} \tag{3.17}$$

eşitliğini sağlar. Burada $k_1; k_2$ ve k_3 aynı anda sıfır olmamaktadır ve ayrıca $n \geq 0$ için

$$(\lambda)_n = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n}(\lambda + k - 1); & \text{eğer } n \geq 1 \\ 1; & \text{eğer } n = 0; \end{cases}$$

dir (Cetin ve ark. 2014).

.

İspat. (3.17) eşitliğinin doğru olduğunu göstermek için, daha önce verilen (3.1) denklemi ele alınırsa:

$$P(u;v;w) := (u-1)\sum_{x=1}^{a-1} u^{x-1}v^{\lfloor \frac{bx}{a} \rfloor}w^{\lfloor \frac{cx}{a} \rfloor} + (v-1)\sum_{y=1}^{b-1} v^{y-1}w^{\lfloor \frac{cy}{b} \rfloor}u^{\lfloor \frac{ay}{b} \rfloor}$$

$$+ (w-1)\sum_{z=1}^{c-1} w^{z-1}u^{\lfloor \frac{az}{c} \rfloor}v^{\lfloor \frac{bz}{c} \rfloor} = u^{a-1}v^{b-1}w^{c-1} - 1$$

biçiminde yazılabilir. $P(u;v;w)$ eşitliğinin u'ya göre kısmi türevi alınırsa, bu du-rumda

$$\frac{\partial P(u;v;w)}{\partial u} = \sum_{x=1}^{a-1} u^{x-1}v^{\lfloor \frac{bx}{a} \rfloor}w^{\lfloor \frac{cx}{a} \rfloor} + (u-1)\sum_{x=1}^{a-1}(x-1)u^{x-2}v^{\lfloor \frac{bx}{a} \rfloor}w^{\lfloor \frac{cx}{a} \rfloor}$$

$$+(v-1)\sum_{y=1}^{b-1}\left\lfloor \frac{ay}{b} \right\rfloor v^{y-1}w^{\lfloor \frac{cy}{b} \rfloor}u^{\lfloor \frac{ay}{b} \rfloor - 1} + (w-1)\sum_{z=1}^{c-1}\left\lfloor \frac{az}{c} \right\rfloor w^{z-1}u^{\lfloor \frac{az}{c} \rfloor - 1}v^{\lfloor \frac{bz}{c} \rfloor}$$

$$= (a-1)u^{a-2}v^{b-1}w^{c-1}$$

bulunur. Şimdi, $\frac{\partial P(u;v;w)}{\partial u}$ eşitliğinin u'ya göre kısmi türevi alınırsa, bu durumda

$$\frac{\partial^2 P(u;v;w)}{\partial u^2} = 2\sum_{x=1}^{a-1}(x-1)u^{x-2}v^{\lfloor \frac{bx}{a} \rfloor}w^{\lfloor \frac{cx}{a} \rfloor} + (u-1)\sum_{x=1}^{a-1}(x-1)(x-2)u^{x-3}v^{\lfloor \frac{bx}{a} \rfloor}w^{\lfloor \frac{cx}{a} \rfloor}$$

$$+(v-1)\sum_{y=1}^{b-1}\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle\left(\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle-1\right)v^{y-1}w^{\left[\frac{cy}{b}\right]}u^{\left[\frac{ay}{b}\right]-2}$$

$$+(w-1)\sum_{z=1}^{c-1}\left\langle\frac{az}{c}\right\rangle\left(\left\langle\frac{az}{c}\right\rangle-1\right)w^{z-1}u^{\left[\frac{az}{c}\right]-2}v^{\left[\frac{bz}{c}\right]}$$

$$=(a-1)(a-2)u^{a-3}v^{b-1}w^{c-1}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek, $\frac{\partial^{k_1-1}P(u;v;w)}{\partial u^{k_1-1}}$ eşitliğinin u'ya göre kısmi türevi alınırsa

$$E(u;v;w)=\frac{\partial^{k_1}P(u;v;w)}{\partial u^{k_1}}=k_1\sum_{x=1}^{a-1}(x-1)_{k_1}u^{x-k_1}v^{\left[\frac{bx}{a}\right]}w^{\left[\frac{cx}{a}\right]}$$

$$(u-1)\sum_{x=1}^{a-1}(x-1)_{k_1+1}u^{x-(k_1+1)}v^{\left[\frac{bx}{a}\right]}w^{\left[\frac{cx}{a}\right]}+(v-1)\sum_{y=1}^{b-1}\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle_{k_1}v^{y-1}w^{\left[\frac{cy}{b}\right]}u^{\left[\frac{ay}{b}\right]-k_1}$$

$$(w-1)\sum_{z=1}^{c-1}\left\langle\frac{az}{c}\right\rangle_{k_1}w^{z-1}u^{\left[\frac{az}{c}\right]-k_1}v^{\left[\frac{bz}{c}\right]}$$

$$=(a-1)_{k_1}u^{a-(k_1+1)}v^{b-1}w^{c-1}$$

elde edilir. Şimdi, aynı prosedür E(u; v; w)'ya uygulanacaktır. Eğer E(u; v; w)'nun v'ye göre k_2 kez kısmi türevi alınırsa, bu durumda

$$F(u;v;w)=\frac{\partial^{k_2}E}{\partial v^{k_2}}=k_1\sum_{x=1}^{a-1}(x-1)_{k_1}\left\langle\frac{bx}{a}\right\rangle_{k_2}u^{x-k_1}v^{\left[\frac{bx}{a}\right]-k_2}w^{\left[\frac{cx}{a}\right]}$$

$$+(u-1)\sum_{x=1}^{a-1}(x-1)_{k_1+1}\left\langle\frac{bx}{a}\right\rangle_{k_2}u^{x-(k_1+1)}v^{\left[\frac{bx}{a}\right]-k_2}w^{\left[\frac{cx}{a}\right]}$$

$$+k_2\sum_{y=1}^{b-1}\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle_{k_1}(y-1)_{k_2}v^{y-k_2}w^{\left[\frac{cy}{b}\right]}u^{\left[\frac{ay}{b}\right]-k_1}$$

$$+(v-1)\sum_{y=1}^{b-1}\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle_{k_1}(y-1)_{k_2+1}v^{y-(k_2+1)}w^{\left[\frac{cy}{b}\right]}u^{\left[\frac{ay}{b}\right]-k_1}$$

$$(w-1)\sum_{z=1}^{c-1}\left\langle\frac{az}{c}\right\rangle_{k_1}\left\langle\frac{bz}{c}\right\rangle_{k_2}w^{z-1}u^{\left[\frac{az}{c}\right]-k_1}v^{\left[\frac{bz}{c}\right]-k_2}$$

$$=(a-1)_{k_1}(b-1)_{k_2}u^{a-(k_1+1)}v^{b-(k_2+1)}w^{c-1}$$

bulunur. Son olarak, eger¼ F (u; v; w) e¸sitliginin¼ w'ya göre k_3 kez türevi al¬n¬rsa, iste-nen sonuç elde edilir.

Tan¬m 3.3.5. $u_1; \dots; u_n$ degi¸¼skenler, $a_1; \dots; a_n$ iki¸ser iki¸ser aralar¬nda asal pozitif tamsay¬lar ve $k_1; \dots; k_n$ negatif olmayan tamsay¬lar¬da s¬ras¬yla $u_1; \dots; u_n$ degi¸¼sken-lerinin türevlerinin mertebesi olsun. Bu durumda $\mathrm{F}(u_1; \dots; u_n; a_1; \dots; a_n; k_1; \dots; k_n)$ polinomu

$$\mathrm{F}(u_1; \dots; u_n; a_1; \dots; a_n; k_1; \dots; k_n)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (u_l - 1) \sum_{x_l=1}^{a_l-1} (x_l - 1)_{k_l} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{n} \left(\frac{a_m x_l}{a_l} \right)_{k_m} u_m^{\left\langle \frac{a_m x_l}{a_l} \right\rangle} u_l^{x_l - 1} \tag{3.18}$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} k_l \sum_{x_l=1}^{a_l-1} (x_l - 1)_{k_l - 1} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{n} \left(\frac{a_m x_l}{a_l} \right)_{k_m} u_m^{\left\langle \frac{a_m x_l}{a_l} \right\rangle} u_l^{x_l} :$$

biçimindedir. Burada $k_1; \dots; k_n$ ayn¬anda s¬f¬r olmamaktad¬r. Ayr¬ca ayr¬ca n 0 için

$$(\ )_n = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} (\ + k - 1); & \text{eger¼ } n \ \ 1 \\ 1; & \text{eger¼ } n = 0; \end{cases}$$

ve

$$[\ ]_k = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} ([\ ] + k - 1); & \text{eger¼ } n \ \ 1 \\ 1; & \text{eger¼ } n = 0; \end{cases}$$

dir (Cetin ve ark. 2014).

Teorem 3.3.6. n 2 için, $u_1; \dots; u_n$ degi¸¼skenler, $a_1; \dots; a_n$ iki¸ser iki¸ser aralar¬nda asal pozitif tamsay¬lar ve $k_1; \dots; k_n$ negatif olmayan tamsay¬lar¬da s¬ras¬yla $u_1; \dots; u_n$ degi¸¼skenlerinin türevlerinin mertebesi olsun. Bu durumda $\mathrm{F}(u_1; \dots; u_n; a_1; \dots; a_n; k_1; \dots; k_n)$

polinomu

$$\mathcal{F}(u_1;\dots;u_n;a_1;\dots;a_n;k_1;\dots;k_n) = \prod_{m=1}^{n} u_m^{a_m-1}(a_m-1)_{k_m} \tag{3.19}$$

eşitliğini gerçekler. Burada $k_1;\dots;k_n$ aynı anda sıfır olmamaktadır. Ayrıca,

$$(\lambda)_n = \prod_{k=1}^{n}(\lambda + k - 1);\ n \geq 2$$

dir (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.7. (3.16) ve (3.17) eşitliklerinde $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(1;1;1;a;b;c;k_1;k_2;k_3) &:= k_1\sum_{x=1}^{a-1}(x-1)_{k_1-1}\left(\frac{bx}{a}\right)_{k_2}\left\langle\frac{cx}{a}\right\rangle_{k_3} \\ &+ k_2\sum_{y=1}^{b-1}(y-1)_{k_2-1}\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle_{k_1}\left\langle\frac{cy}{b}\right\rangle_{k_3} + k_3\sum_{z=1}^{c-1}(z-1)_{k_3-1}\left\langle\frac{az}{c}\right\rangle_{k_1}\left(\frac{bz}{c}\right)_{k_2} \\ &= (a-1)_{k_1}(b-1)_{k_2}(c-1)_{k_3}\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.8. (3.16) ve (3.17) eşitliklerinden,

$$\mathcal{F}(1;1;1;a;b;c;1;0;0) := \sum_{x=1}^{a-1} 1 = a - 1$$

$$\mathcal{F}(1;1;1;a;b;c;0;1;0) := \sum_{y=1}^{b-1} 1 = b - 1$$

ve

$$\mathcal{F}(1;1;1;a;b;c;0;0;1) := \sum_{z=1}^{c-1} 1 = c - 1$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.9. Eger¼ (3.16) ve (3.17) e¸sitliklerinde $u = v = w = 1$ ve $k_1 = k_2 = 1$; $k_3 = 0$ olarak al¬n¬rsa, bu durumda $[x]$ fonksiyonunun reciprocity kural¬olan ve Gauss'un kuadratik reciprocity kural¬n¬ispatlamakta önemli bir role sahip olan,

$$\sum_{x=1}^{a-1}\left[\frac{bx}{a}\right]+\sum_{y=1}^{b-1}\left[\frac{ay}{b}\right]=(a-1)(b-1) \qquad (3.21)$$

e¸sitligi¼ elde edilir (Berndt ve Dieter 1982, Simsek 1993, Beck 2006, Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.10. (3.16) ve (3.17) e¸sitliklerinde $u = w = 1$; $v = -1$ ve $k_1 = k_3 = 0$; $k_2 = 1$ yaz¬l¬rsa

$$\mathcal{F}(-1;1;-1;a;b;c;0;1;0) := 2\sum_{x=1}^{a-1}\frac{bx}{a}(-1)^{x+\left[\frac{cx}{a}\right]-1}+\sum_{y=1}^{b-1}(-1)^{\left[\frac{cy}{b}\right]+\left[\frac{ay}{b}\right]}-2\sum_{z=1}^{c-1}\frac{bz}{c}(-1)^{z+\left[\frac{az}{c}\right]-1}=(b-1)(-1)^{a+c-2}$$

elde edilir. Bu da bize Simsek'in (1993) çal¬¸smas¬ndaki Teorem 2.1'i vermektedir. Böylece,

$$\mathcal{F}(-1;1;-1;a;b;c;0;1;0) := s_4(ac'; b)-2s_5(cb'; a)-2s_3(ab'; c)=\frac{b-ac}{ac}$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.11. (3.16) ve (3.17) e¸sitliklerinde $u = v = 1$; $w = -1$ ve $k_1 = k_2 = 1$; $k_3 = 0$ yaz¬l¬rsa

$$\mathcal{F}(1;1;-1;a;b;c;1;1;0) := \sum_{x=1}^{a-1}\frac{bx}{a}(-1)^{\left[\frac{cx}{a}\right]}+\sum_{y=1}^{b-1}\left[\frac{ay}{b}\right](-1)^{\left[\frac{cy}{b}\right]}-2\sum_{z=1}^{c-1}\left[\frac{az}{c}\right]\frac{bz}{c}(-1)^{z-1}=(a-1)(b-1)(-1)^{c-1}$$

elde edilir. Bu da bize Simsek'in (1993) çal¬¸smas¬ndaki Teorem 2.2'yi vermektedir.

Böylece,

$$\mathrm{F}(1;1;\ 1;a;b;c;1;1;0) := 2s_2(ab^0;c)\ \ s_1(cb^0;a)\ \ s_3(ca^0;b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2c}\ \ \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

bulunur (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.12. (3.16) ve (3.17) e¸sitliklerinde $u = 1; v = w = 1$ ve $k_2 = 1; k_1 = k_3 = 0$ yaz¬l¬rsa

$$\mathrm{F}(\ 1;1;1;a;b;c;0;1;0) := \ 2\sum_{x=1}^{a\ 1}\frac{bx}{a}\ (\ 1)^{x\ 1} + \sum_{y=1}^{b\ 1}(\ 1)^{\left[\frac{ay}{b}\right]} = (b\ \ 1)(\ 1)^{a\ 1}$$

Bu da bize Simsek'in (1993) çal¬¸smas¬ndaki Teorem 2.3'ü vermektedir. Böylece,

$$\mathrm{F}(\ 1;1;1;a;b;c;0;1;0) := 2s_3(b;a)\qquad \bar{s}_4(a;b) = 1\ \frac{b}{a}$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.13. (3.16) ve (3.17) e¸sitliklerinde $u = v = 1; w = 1$ ve $k_1 = k_2 = 0; k_3 = 1$ yaz¬l¬rsa

$$\mathrm{F}(\ 1;\ 1;1;a;b;c;0;0;1) := \ 2\sum_{x=1}^{a\ 1}\left(\left(\frac{cx}{a}\right)\right)(\ 1)^{x+\left[\frac{bx}{a}\right]}\ \ 2\sum_{y=1}^{b\ 1}\left(\left(\frac{cy}{b}\right)\right)(\ 1)^{y+\left[\frac{ay}{b}\right]}$$

$$+\sum_{z=1}^{c\ 1}(\ 1)^{\left[\frac{az}{c}\right]+\left[\frac{bz}{c}\right]} = (c\ \ 1)(\ 1)^{a+b\ \ 2}$$

Bu da bize Simsek'in (1993) çal¬¸smas¬ndaki Teorem 2.4'ü vermektedir. Böylece,

$$\mathrm{F}(\ 1;\ 1;1;a;b;c;0;0;1) := s_4(ab^0;c) + 2s_5(bc^0;a)\qquad s_1(ac^0;b) = 1 + ab^{c}$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.14. (3.16) ve (3.17) e¸sitliklerinde $w = v = 1; u\ \ 1$ ve $k_1 = 0; k_2 = k_3 = 1$

yaz¬l¬rsa

$$F(-1;1;1;a;b;c;0;1;1) := 2\sum_{x=1}^{a-1}\left(\frac{bx}{a}-\left[\frac{cx}{a}\right]\right)(-1)^{x-1}+\sum_{y=1}^{b-1}\left[\frac{cy}{b}\right](-1)^{\left[\frac{ay}{b}\right]}\sum_{z=1}^{c-1}\frac{bz}{c}(-1)^{\left[\frac{az}{c}\right]} = (b-1)(c-1)(-1)^{a-1}$$

Bu da bize Simsek'in (1993) çal¬¸smas¬ndaki Teorem 2.5'i vermektedir. Böylece,

$$F(-1;1;1;a;b;c;0;1;1) := 2s_2(cb^0;a)-s_1(ca^0;b)-s_3(ca^0;b) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2a}-\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014). Yukar¬da verilen metod kullan¬larak Pettet ve Sitara-machandraro (1989) taraf¬ndan verilen baz¬sonuçlar da elde edilebilir.

Sonuç 3.3.15. Eger¼ (3.16) e¸sitliginde¼ $u = 1; v = w = -1$ ve $k_1 = 1; k_2 = k_3 = 0$ olarak al¬n¬rsa

$$F(1;-1;-1;a;b;c;1;0;0)$$

$$= \sum_{x=1}^{a-1}(-1)^{\left[\frac{bx}{a}\right]+\left[\frac{cx}{a}\right]}-2\sum_{y=1}^{b-1}(-1)^{y+\left[\frac{ay}{b}\right]}\left(\left(\frac{y}{b}\right)\right)-2\sum_{z=1}^{c-1}(-1)^{z+\left[\frac{az}{c}\right]}\left(\left(\frac{z}{c}\right)\right)$$

bulunur. Ayr¬ca (3.17) e¸sitliginden¼

$$F(1;-1;-1;a;b;c;1;0;0) = (a-1)(-1)^{b+c}$$

oldugu¼ bilinmektedir. Bu iki denklem birlikte kullan¬l¬rsa

$$\sum_{x=1}^{a-1}(-1)^{\left[\frac{bx}{a}\right]+\left[\frac{cx}{a}\right]}-2\sum_{y=1}^{b-1}(-1)^{y+\left[\frac{ay}{b}\right]}\left(\left(\frac{y}{b}\right)\right)-2\sum_{z=1}^{c-1}(-1)^{z+\left[\frac{az}{c}\right]}\left(\left(\frac{z}{c}\right)\right) = (a-1)(-1)^{b+c}$$

elde edilir. Bu da Pettet ve Sitaramachandraro'nun (1989) çal¬¸smas¬ndaki Teorem

3.3'ü verir. Yani

$$F(1;-1;-1;a;b;c;1;0;0)=s_3(ab',c)+s_1(ca',b)-\frac{1}{2}s_4(bc',a)$$

veya denk olarak

$$F(1;-1;-1;a;b;c;1;0;0)=\frac{1}{2}-\frac{a}{2bc}$$

bulunur. Burada a; a' çift sayılar ve $cc' \equiv 1 \pmod{2a}$ dir (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.16. Eğer (3.16) eşitliğinde $u=w=1$; $v=-1$ ve $k_1=k_3=1$; $k_2=0$ olarak alınırsa

$$F(1;-1;1;a;b;c;1;0;1)$$
$$=\sum_{x=1}^{a-1}(-1)^{\left[\frac{bx}{a}\right]}\left(\left(\frac{cx}{a}\right)\right)+2\sum_{y=1}^{b-1}(-1)^{y}\left(\left(\frac{ay}{b}\right)\right)\left(\left(\frac{cy}{b}\right)\right)+\sum_{z=1}^{c-1}(-1)^{\left[\frac{bz}{c}\right]}\left(\left(\frac{az}{c}\right)\right)$$

bulunur. Ayrıca (3.17) eşitliğinden

$$F(1;-1;1;a;b;c;1;0;1)=(a-1)(c-1)(-1)^{b-1}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{x=1}^{a-1}(-1)^{\left[\frac{bx}{a}\right]}\left(\left(\frac{cx}{a}\right)\right)+2\sum_{y=1}^{b-1}(-1)^{y}\left(\left(\frac{ay}{b}\right)\right)\left(\left(\frac{cy}{b}\right)\right)+\sum_{z=1}^{c-1}(-1)^{\left[\frac{bz}{c}\right]}\left(\left(\frac{az}{c}\right)\right)$$
$$=(a-1)(c-1)(-1)^{b-1}$$

bulunur. Bu da Pettet ve Sitaramachandraro'nun (1989) çalışmasındaki Teorem 3.4'ü verir. Yani

$$F(1;-1;1;a;b;c;1;0;1)=s_1(bc',a)-2s_2(ca',b)+s_3(ab',c)$$

veya denk olarak

$$F(1;\ 1;\ 1;\ a;\ b;\ c;\ 1;\ 0;\ 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc} + \frac{c}{ab}\right)$$

bulunur. Burada b bir çift say¬d¬r (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.17. Eger¼ (3.16) e¸sitliginde¼ $u = v = w = 1$ ve $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ olarak al¬n¬rsa

$$F(1;1;1;a;b;c;1;1;1) = \sum_{x=1}^{a-1}\left\langle\frac{bx}{a}\right\rangle\left\langle\frac{cx}{a}\right\rangle + \sum_{y=1}^{b-1}\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle\left\langle\frac{cy}{b}\right\rangle + \sum_{z=1}^{c-1}\left\langle\frac{az}{c}\right\rangle\left\langle\frac{bz}{c}\right\rangle$$

bulunur. Ayr¬ca (3.17) e¸sitliginden¼

$$F(1;\ 1;\ 1;\ a;\ b;\ c;\ 1;\ 1;\ 1) = (a-1)(b-1)(c-1)$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{x=1}^{a-1}\left\langle\frac{bx}{a}\right\rangle\left\langle\frac{cx}{a}\right\rangle + \sum_{y=1}^{b-1}\left\langle\frac{ay}{b}\right\rangle\left\langle\frac{cy}{b}\right\rangle + \sum_{z=1}^{c-1}\left\langle\frac{az}{c}\right\rangle\left\langle\frac{bz}{c}\right\rangle = (a-1)(b-1)(c-1)$$

bulunur (Pettet ve Sitaramachandraro 1989, Cetin ve ark. 2014).

Ayr¬ca yukar¬da verilen metod kullan¬larak Beck (2006) çal¬¸smas¬nda verilen baz¬ sonuçlar da elde edilebilir.

Sonuç 3.3.18. Eger¼ (3.18) ve (3.19) e¸sitliklerinde $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 1$ ve $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$ olarak al¬n¬rsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_1=1}^{a_1-1}\left\langle\frac{a_2x_1}{a_1}\right\rangle\left\langle\frac{a_3x_1}{a_1}\right\rangle\cdots\left\langle\frac{a_nx_1}{a_1}\right\rangle + \sum_{x_2=1}^{a_2-1}\left\langle\frac{a_1x_2}{a_2}\right\rangle\left\langle\frac{a_3x_2}{a_2}\right\rangle\cdots\left\langle\frac{a_nx_2}{a_2}\right\rangle \\
&+ \dots + \sum_{x_n=1}^{a_n-1}\left\langle\frac{a_1x_n}{a_n}\right\rangle\left\langle\frac{a_2x_n}{a_n}\right\rangle\cdots\left\langle\frac{a_{n-1}x_n}{a_n}\right\rangle \\
&= (a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_n-1)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014). Bu sonucun ispat¬Beck (2006) taraf¬ndan verilmi¸stir.

(3.22) e¸sitliginde¼ n = 3 olarak al¬n¬rsa,

$$\sum_{x_1=1}^{a_1 \ 1} \frac{a_2x_1}{a_1}\,\frac{a_3x_1}{a_1} + \sum_{x_2=1}^{a_2 \ 1} \frac{a_1x_2}{a_2}\,\frac{a_3x_2}{a_2} + \sum_{x_3=1}^{a_3 \ 1} \frac{a_1x_3}{a_3}\,\frac{a_2x_3}{a_3}$$

$$= (a_1 \quad 1)(a_2 \quad 1)(a_3 \quad 1)$$

oldugu¼ kolayca görülebilir. Bu e¸sitlikte,

$$[x] = x \quad ((x)) \quad \frac{1}{2}$$

ifadesi yerine yaz¬l¬rsa, Dedekind-Rademacher toplamlar¬n¬n reciprocity bag¬¼nt¬s¬ a¸sag¬¼daki gibi elde edilir (Rademacher 1954, Beck 2006):

$$\sum_{x_1=1}^{a_1} \frac{}{a_1}\,\frac{}{a_1} + \sum_{x_2=1}^{a_2} \frac{}{a_2}\,\frac{}{a_2} + \sum_{x_3=1}^{a_3} \frac{}{a_3}\,\frac{}{a_3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{a_1}{a_2a_3} + \frac{a_2}{a_1a_3} + \frac{a_2}{a_1a_2}\right):$$

(3.18) ve (3.19) e¸sitliklerinde $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 1$ olarak al¬n¬rsa, a¸sag¬¼daki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.19. $a_1; a_2; \ldots; a_n$ aralar¬nda iki¸ser iki¸ser asal pozitif tamsay¬lar ve $k_1; k_2; \ldots; k_n$ pozitif tamsay¬lar olsun. Bu durumda

$$\sum_{l=1}^{n} k_l \sum_{x_l=1}^{a_l \ 1} (x_l 1)^{k_l \ 1} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq l}}^{n} \frac{a_m x_l}{a_l}_{k_m} = \prod_{m=1}^{n} (a_m \quad 1)^{k_m} \qquad (3.23)$$

bulunur (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.20. (3.23) e¸sitliginde¼ $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$ al¬n¬rsa , Berndt-Dieter taraf¬ndan ispatlanm¬¸ olan a¸sag¬¼daki e¸sitlik elde edilir (Berndt ve Dieter 1982):

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{x_l=1}^{a_l-1}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq l}}^{n}\left(\frac{a_m x_l}{a_l}\right)=\prod_{m=1}^{n}(a_m-1)$$

Burada $a_1; a_2; \dots ; a_n$ aralar¬nda iki¸ser iki¸ser asal pozitif tamsay¬lard¬ (Beck 2006, Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.21. (3.18) ve (3.19) e¸sitliklerinde $u_1 = u_2 = \dots = u_n = -1$ olarak al¬n¬rsa, bu durumda

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{x_l=1}^{a_l-1}\left(2(x_l-1)_{k_l}+k_l(x_l-1)_{k_l-1}\right)\prod_{\substack{m=1\\ m\neq l}}^{n}\left(\frac{a_m x_l}{a_l}\right)_{k_m}(-1)^{x_l+\left[\frac{a_m x_l}{a_l}\right]}$$

$$=\prod_{m=1}^{n}(-1)^{a_m-1}(a_m-1)_{k_m} \tag{3.24}$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014).

Sonuç 3.3.22. (3.24) e¸sitliginde¼ $n = 2$ ve $k_1 = k_2 = 1$ olarak al¬n¬rsa, bu durumda

$$\sum_{x_1=1}^{a_1-1}(2x_1-1)(-1)^{x_1+\left[\frac{a_2x_1}{a_1}\right]}\left(\frac{a_2x_1}{a_1}\right)+\sum_{x_2=1}^{a_2-1}(2x_2-1)(-1)^{x_2+\left[\frac{a_1x_2}{a_2}\right]}\left(\frac{a_1x_2}{a_2}\right)$$

$$=(-1)^{a_1+a_2}(a_1-1)(a_2-1)$$

elde edilir (Cetin ve ark. 2014).

4. HARDY-BERNDT TİPİ SONLU TOPLAM

Bu bölümde, daha önce Cetin ve ark. (2014) taraf¬ndan tan¬mlanm¬¸s olan $C_1(h;k)$ ve $B_1(h;k)$ sonlu toplamlar¬n¬n özellikleri verilecektir. Daha sonra ise $C_1(h;k)$ ve $B_1(h;k)$ sonlu toplamlar¬ile diger¼ bilinen sonlu toplamlar aras¬ndaki ili¸skiler bulu-nacakt¬r.

4.1. $C_1(h;k)$ Sonlu Toplamlar¬ve Özellikleri

Bu k¬s¬mda yeni bir sonu toplam olan $C_1(h;k)$ toplamlar¬ tan¬mlanm¬¸s, özellikleri verilmi¸s ve diger¼ bilinen sonlu toplamlarla olan ili¸skileri bulunmu¸stur.

Berndt ve Dieter (1982) h ve k tek, farkl¬asallar olduklar¬nda

$$\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(k-1)} \left[\frac{hj}{k}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(h-1)} \left[\frac{kj}{h}\right] = (h-1)(k-1) \qquad (4.1)$$

e¸sitliginin¼ geçerli oldugunu¼ gösterdiler. Bu e¸sitlik, Gauss'un kuadratik reciprocity kural¬n¬n ispat¬nda önemli bir rol oynamaktad¬r. (4.1) ile verilen bu e¸sitligin¼ $C_1(h;k)$ toplam¬cinsinden ifadesi de elde edilecektir.

Tan¬m 4.1.1. Cetin ve ark. (2014) çal¬¸smalar¬nda, $C_1(h;k)$ toplamlar¬n¬a¸sag¬¼daki ¸sekilde tan¬mlanm¬¸slard¬r:

$$C_1(h;k) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+\left[\frac{hj}{k}\right]} \left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right):$$

Burada $h \in Z$ ve $k \in N^+$ d¬r. Simdi¸ bu toplamlarla ilgili önemli özellikler verilecektir. Bu toplamlarla ilgili en ilginç özelliklerden birisi h ve k aralar¬nda asal tek tamsay¬lar olduklar¬nda bu toplamlar¬n sadece ikinci degi¸¼sken olan k'ye bagl¬olmas¬¼d¬r. Yani bu durumda toplam tek degi¸¼skene indirgenmektedir. A¸sag¬¼daki teoremde bu özellik verilmi¸stir.

Teorem 4.1.2. $h, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k > 0$ olsun. Eğer $(h, k) = 1$ ve h ile k tek tamsayılar ise bu durumda

$$C_1(h;k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$$

dir (Cetin 2016).

İspat. Bu teoremi ispatlamak için ikili terim bağıntısı kullanılacaktır. İkili terim bağıntısında u'ya göre kısmi türev alınıp $u = v = -1$ yazılırsa,

$$\sum_{x=1}^{h-1}(-1)^{x+\left[\frac{kx}{h}\right]} - 2\sum_{x=1}^{h-1}x(-1)^{x+\left[\frac{kx}{h}\right]} - 2\sum_{y=1}^{k-1}\frac{hy}{k}(-1)^{y+\left[\frac{hy}{k}\right]} = (h-1)(-1)^{h+k-1}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{x=1}^{h-1}(-1)^{x+\left[\frac{kx}{h}\right]} - 2\sum_{x=1}^{h-1}x(-1)^{x+\left[\frac{kx}{h}\right]} - 2h\sum_{y=1}^{k-1}\frac{y}{k}(-1)^{y+\left[\frac{hy}{k}\right]} + \sum_{y=1}^{k-1}(-1)^{y+\left[\frac{hy}{k}\right]} - \sum_{y=1}^{k-1}(-1)^{y+\left[\frac{hy}{k}\right]} = (1-h)$$

bulunur. (2.10), (2.12) ve (2.16) eşitlikleri kullanılırsa

$$2h\left(s_5(k;h) + s_5(h;k)\right) + 2C_1(h;k) = 1 - h.$$

elde edilir. Son olarak (2.11) eşitliği kullanılırsa

$$C_1(h;k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \tag{4.2}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, $C_1(h;k)$ toplamları için reciprocity bağıntısı verilecektir.

Teorem 4.1.3. h; k 2 Z olmak üzere k > 0 olsun. Eger¼ (h; k) = 1 ve h ile k tek tamsay¬lar ise, bu durumda

$$kC_1(h;k) + hC_1(k;h) = \frac{h+k}{2} \quad 1$$

e¸sitligi¼ geçerlidir (Cetin 2016).

.
Ispat. Eger¼ (4.2) bag¬¼nt¬s¬kullan¬lacak olursa

$$\begin{aligned} kC_1(h;k) + hC_1(k;h) &= k \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2k} \quad + h \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2h} \\ &= \frac{h+k}{2} \quad 1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece istenen sonuç elde edilmi¸s olur.

Daha önce de bahsedildigi¼ gibi C_1(h; k) sonlu özel toplamlar¬n¬n, bilinen diger¼ sonlu toplamlarla ili¸skileri mevcuttur. A¸sag¬¼daki teoremler ile bu ili¸skiler verilmi¸stir. C_1(h; k) toplamlar¬ s_5(h; k) Hardy-Berndt toplamlar¬, Y (h; k) Sim¸sek toplamlar¬ ve s(h; k) Dedekind toplamlar¬ile ili¸skilidir. Bu bilinen sonlu toplamlar¬n litetatürde bir çok uygulamas¬ oldugundan,¼ C_1(h; k) toplamlar¬yla ili¸skili olmalar¬, bu verilen yeni toplam¬n önemini göstermektedir.

Teorem 4.1.4. (a; hk) = 1 olmak üzere a bir tamsay¬ ve a ile hk tek olsun. Bu durumda,

$$s_5(h;k) + s_5(k;h) = C_1(a;hk) \tag{4.3}$$

dir (Cetin 2016).

· Ispat. (2.11) ve (4.2) e¸sitliginden¼ kolayca elde edilebilir.

Teorem 4.1.5. (a; hk) = 1 olmak üzere a bir tamsay¬ ve a ile hk tek olsun. Bu durumda,

$$hY(h;k) + kY(k;h) = 4hk{:}C_1(a;hk) \qquad (4.4)$$

dir (Cetin 2016).

· Ispat. (4.2) ve (2.24) e¸sitliklerinden kolayca elde edilebilir.

Teorem 4.1.6. a; h; k say¬lar¬(a; hk) = 1 olacak ¸sekilde pozitif tek tamsay¬lar olsun. Bu durumda

$$s(h;k) + s(k;h) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\quad \frac{h}{k} + \frac{k}{h} \qquad 2C_1(a;hk)$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir (Cetin 2016).

.
Ispat. Teorem 4.1.2.'den,

$$1 \quad 2C_1(h;k) = \frac{1}{k}$$

yaz¬labilir. Böylece a¸sag¬¼daki e¸sitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{h}{k} &= h \quad 2hC_1(h;k); \\ \frac{k}{h} &= k \quad 2kC_1(k;h); \qquad (4.5) \\ \frac{1}{hk} &= 1 \quad 2C_1(a;hk): \end{aligned}$$

Eger¼ (4.5) e¸sitligi¼ (2.8)'de yerine yaz¬l¬rsa ve baz¬temel hesaplamalar yap¬l¬rsa, is-tenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.7. (h; k) = 1 olacak ¸sekilde h; k pozitif tek tamsay¬lar olsun. Bu durumda

$$2s_3(h;k)\quad s_4(k;h) = 1 \quad h + 2hC_1(h;k)$$

elde edilir (Cetin 2016).

· Ispat. (2.17) e¸sitliginden¼ ve Teorem 4.1.2.'den direkt olarak elde edillebilir.

Teorem 4.1.8. h ve k farkl¬tek asal say¬lar olsun. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(k\ 1)} \frac{hj}{k} + \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(h\ 1)} \frac{kj}{h} = 4hkC_1(h;k)C_1(k;h)$$

e¸sitligi¼ geçerlidir (Cetin 2016).

.
Ispat. Baz¬temel hesaplamalar neticesinde Teorem 4.1.2.'den

$$2kC_1(h;k) = k \quad 1$$

ve

$$2hC_1(k;h) = h \quad 1$$

elde edilir. Eger¼ bu e¸sitlikler (4.1) denkleminde yerine yaz¬l¬rsa bu durumda istenen sonuç elde edilir.

4.2. $B_1(h;k)$ Sonlu Toplamlar¬ve Özellikleri

Bu k¬s¬mda, daha önce (3.14) e¸sitligi¼ ile üçüncü bölümde tan¬mlanan ve yeni bir sonu toplam olan $B_1(a_1; a_2)$ toplamlar¬n¬n tan¬m¬ notasyon degi¸¼sikligi¼ ile yeniden hat¬rlat¬lm¬¸s, özellikleri verilmi¸s ve diger¼ bilinen sonlu toplamlarla olan ili¸skileri bulunmu¸stur. (3.14) e¸sitliginde¼ a_1 yerine h ve a_2 yerine k yaz¬l¬rsa bu durumda B_1

toplamlar¬

$$B_1(h; k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{hj}{k} \; (1)^{[\frac{hj}{k}]}$$

olarak yeniden yaz¬labilir. Burada h ve k aralar¬nda asal tamsay¬lar ve k pozitiftir. Diger¼ bilinen sonlu toplamlar¬n notasyonlar¬na uyum saglmas¬aç¬¼s¬ndan bu tezde,

B_1 toplamlar¬ için bu notasyonun kullan¬m¬ tercih edilecektir. $B_1(h; k)$ toplamlar¬ a¸sag¬¼daki aritmetik özelligi¼ gerçeklemektedir (Cetin 2016):

$$B_1(h; k) = B_1(h; k): \tag{4.6}$$

Bu son e¸sitligin¼ dogru¼ oldugunu¼ göstermek için tamdeger¼ fonksiyonunun tan¬m¬ve $((x)) = ((x))$ özelligi¼ kullan¬lacakt¬r. Ayr¬ca x bir tamsay¬degilken¼

$$(1)^{[x]} = 2\,((x))\;4\,\left(\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{4.7}$$

e¸sitligi¼ de kullan¬l¬rsa (4.6) denkleminin dogru¼ oldugu¼ görülür. (4.7) özelligi¼ Sitara-machandrarao (1987) çal¬¸smas¬nda görülmektedir.

Simdi¸ $B_1(h; k)$ toplamlar¬ile S(h; k) Hardy-Berndt toplamlar¬aras¬ndaki ili¸ski ver-ilecektir:

Teorem 4.2.1. k pozitif bir tamsay¬olmak üzere eger¼ h + k tek ve (h; k) = 1 ise bu durumda,

$$B_1(h; k) = \frac{1}{2}(1 h)S(h; k) \tag{4.8}$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir (Cetin 2016).

. .
Ispat. Ispat için daha önce (3.2) ile verilen ikili terim bag¬¼nt¬s¬kullan¬lacakt¬r. Eger¼

(3.2) e¸sitliginin¼ u'ya göre k¬smi türevi al¬n¬r ve u = v = 1 yaz¬l¬rsa

X h 1 kx X h 1 kx X k 1 hy hy

$$x=1(1)^{x+[h]} 2\ x=1\ x(1)^{x+[h]} 2\ y=1\ k (1)^{y+[k]} = (h 1)(1)^{h+k 1}$$

elde edilir. Baz¬temel hesaplamalar sonucunda

X h 1 kx X h 1 kx X k 1 hy hy

$$x=1(1)^{x+1+[h]} 2\ x=1\ x(1)^{x+[h]} 2\ y=1\ k (1)^{y+[k]} = h 1 \quad (4.9)$$

bulunur. Pettet ve Sitaramachandraro (1989) çal¬¸smas¬ndan (2.12) e¸sitliklerinin sag¼-land¬g¬bilinmektedir¼. Böylece eger¼ bu e¸sitlikler (4.9) denkleminde yerine yaz¬l¬rsa,

$$S(k; h) \quad 2h \ s_5(k; h) \qquad \frac{1}{2} S(k; h) 2B_1 \qquad (h; k) = h \ 1$$

e¸sitligi¼ elde edilir. h + k tek tamsay¬ oldugunda¼ $s_5(h; k) = s_5(k; h) = 0$ oldugu¼ bilindiginden,¼ buradan

$$2B_1(h; k) = (h \ 1)(1 \ \ S(k; h)) \qquad (4.10)$$

bulunur. h + k tek tamsay¬oldugunda¼ Apostol ve Vu (1982) çal¬¸smas¬ndan

$$S(h; k) + S(k; h) = 1$$

oldugu¼ bilindiginden,¼ bu son e¸sitlik

$$S(h; k) = 1 \quad S(k; h)$$

olarak yaz¬l¬rsa ve (4.10) denkleminde yerine yaz¬l¬rsa böylece,

$$B_1(h; k) = \frac{1}{2}(1 \quad h) S(h; k)$$

elde edilir.

S¬radaki teoremde, $B_1(h; k)$ toplamlar¬ve $s_5(h; k)$ Hardy-Berndt toplamlar¬aras¬ndaki ili¸ski verilecektir:

Teorem 4.2.2. k > 0 olmak üzere, eger¼ h ve k aralar¬nda asal tek tamsay¬lar ise bu durumda

$$B_1(h;k) = hs_5(h;k) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2} \tag{4.11}$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir (Cetin 2016).

.

Ispat. $B_1(h;k)$ toplamlar¬n¬n tan¬m¬kullan¬lacak olursa

$$B_1(h;k) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+[\frac{hj}{k}]} \left(\frac{hj}{k} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{k}\sum_{j=1}^{k-1} j(-1)^{j+[\frac{hj}{k}]} - \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+[\frac{hj}{k}]}\left[\frac{hj}{k}\right] - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+[\frac{hj}{k}]}$$

$$= hs_5(h;k) - C_1(h;k) + \frac{1}{2}S(h;k)$$

elde edilir. Teorem 4.1.2.'den (4.2) e¸sitliginin¼ dogru¼ oldugu¼ bilindiginden,¼ bu e¸sitlik son denklemde yerine yaz¬l¬rsa

$$B_1(h;k) = hs_5(h;k) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}$$

sonucu elde edilir.

A¸sag¬¼daki teorem ile $B_1(h;k)$ toplamlar¬ ve Y (h; k) Sim¸sek toplamlar¬ aras¬ndaki baglant¬verilecektir:¼

Teorem 4.2.3. k > 0 olmak üzere, eger¼ h ve k aralar¬nda asal tek tamsay¬lar ise bu durumda

$$B_{1}(h;k) = \frac{h}{4k} Y(h;k) + \frac{1}{2k} \quad \frac{1}{2}$$

e¸sitligi¼ saglan¬¼r (Cetin 2016).

· Ispat. Teorem 4.2.2. ve (2.23) e¸sitligi¼ kullan¬larak kolayca elde edilir.

A¸sag¬¼da $B_{1}(h;k)$ toplamlar¬için yeni iki bag¬¼nt¬verilecektir:

Teorem 4.2.4. $(h;k) = 1$ olmak üzere, $h + k$ pozitif bir tek tamsay¬ise bu durumda

$$(k \quad 1)B_{1}(h;k) + (h \quad 1)B_{1}(k;h) = \frac{1}{2}\big(k \quad 1)(h \quad 1)$$

e¸sitligi¼ saglan¬¼r (Cetin 2016).

.

Ispat. $k > 0$ olmak üzere $h + k$ tek bir tamsay¬oldugunda,¼ (4.8) e¸sitliginin¼ dogru¼ oldugu¼ gösterilmi¸sti. Buradan hareketle, benzer ¸sekilde $h > 0$ oldugunda¼ da $h + k$ tek tamsay¬iken

$$B_{1}(k;h) = \frac{1}{2}(1k)S(k;h) \tag{4.11}$$

yaz¬labilir. Böylece eger¼ (4.8) e¸sitligi¼ k ile, (4.11) e¸sitligi¼ h ile çarp¬l¬r ve elde edilen e¸sitlikler taraf tarafa toplan¬rsa

$$\begin{aligned} kB_{1}(h;k) + hB_{1}(k;h) &= \frac{k}{2} S(h;k) \quad \frac{hk}{2} S(h;k) + \frac{h}{2} S(k;h) \quad \frac{hk}{2} S(k;h) \\ &= \frac{1}{2}\left[kS(h;k) + hS(k;h) \quad hk\left(S(h;k) + S(k;h)\right)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Apostol ve Vu (1982) çal¬¸smas¬ndan (2.18) e¸sitliginin¼ dogru¼ oldugu¼ bilindigin¼-den, bulunan son e¸sitlikte yerine yaz¬l¬rsa,

$$kB_{1}(h;k) + hB_{1}(k;h) = \frac{1}{2}\left[kS(h;k) + hS(k;h) \quad hk\right] \tag{4.12}$$

e¸sitligi¼ bulunur. (4.8) e¸sitligi¼ kullan¬lacak olursa

$$\begin{aligned}
B_1(h;k)+B_1(k;h) &= \tfrac{1}{2}(1-h)S(h;k)+\tfrac{1}{2}(1-k)S(k;h) \\
&= \frac{1}{2}\left[S(h;k)-hS(h;k)+S(k;h)-kS(k;h)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1-(hS(h;k)+kS(k;h))\right]
\end{aligned}$$

yani

$$2B_1(h;k)+2B_1(k;h)=1-(hS(h;k)+kS(k;h))$$

ve böylece

$$hS(h;k)+kS(k;h)=1-2B_1(h;k)-2B_1(k;h) \tag{4.13}$$

bulunur. (2.18) e¸sitliginin¼ her iki yan¬h ile çarp¬l¬r, benzer ¸sekilde (2.18) e¸sitliginin¼ her iki yan¬k ile çarp¬l¬r ve bu elde edilen yeni e¸sitlikler taraf tarafa topan¬rsa

$$[kS(h;k)+hS(k;h)]+[hS(h;k)+kS(k;h)]=h+k$$

bulunur. Bu son e¸sitlikte, (4.13) e¸sitligi¼ yerine yaz¬l¬rsa

$$kS(h;k)+hS(k;h)=h+k+2B_1(h;k)+2B_1(k;h)-1$$

bulunur. Burada (4.12) e¸sitligi¼ kullan¬lacak olursa

$$kB_1(h;k)+hB_1(k;h)=\tfrac{1}{2}[h+k+2B_1(h;k)+2B_1(k;h)-1-hk]$$

elde edilir. Son bulunan denklem biraz daha düzenlenirse

$$\begin{aligned}
kB_1(h;k)+hB_1(k;h) &= \tfrac{h}{2}+\tfrac{k}{2}+B_1(h;k)+B_1(k;h)-\tfrac{1}{2}-\frac{hk}{2} \\
&= \frac{h}{2}+\frac{k}{2}-\frac{hk}{2}-\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(k-1)(h-1)
\end{aligned}$$

olarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.5. (h; k) = 1 olmak üzere, h ve k tek pozitif tamsay¬lar ise bu durumda

$$kB_{1}(h;k) + hB_{1}(k;h) = \frac{(h\ 1)(k\ 1)}{2}$$

e¸sitligi¼ saglan¬¼r (Cetin 2016).

.

Ispat. h ve k pozitif tek tamsay¬lar olduklar¬nda (4.11) e¸sitliginin¼ dogru¼ oldugu¼ bilinmektedir. Ayr¬ca benzer ¸sekilde

$$B_{1}(k;h) = ks_{5}(k;h) + \frac{1}{2h}\quad\frac{1}{2} \tag{4.14}$$

denklemi de yaz¬labilir. (4.11) e¸sitligi¼ k ile, (4.14) e¸sitligi¼ h ile çarp¬l¬r ve elde edilen e¸sitlikler taraf tarafa toplan¬rsa,

$$kB_{1}(h;k) + hB_{1}(k;h) = hk\,(s_{5}(h;k) + s_{5}(k;h)) + \frac{1}{2}\quad\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\quad\frac{h}{2} \tag{4.15}$$

e¸sitligi¼ elde edilir. Sitaramachandrarao (1987) çal¬¸smas¬ndan, h ile k aralar¬nda asal pozitif tek tamsay¬lar olduklar¬nda (2.11) e¸sitliginin¼ sagland¬¼g¬bilinmektedir¼. Eger¼ bu e¸sitlik (4.15) denkleminde kullan¬l¬rsa bu durumda

$$\begin{aligned} kB_{1}(h;k) + hB_{1}(k;h) &= hk\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2hk} + \frac{1}{2}\quad\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\quad\frac{h}{2} \\ &= \frac{(h\ 1)(k\ 1)}{2} \end{aligned}$$

olarak istenen sonuç elde edilir.

A¸sag¬¼daki teoremlerde $B_{1}(h;k)$ sonlu toplamlar¬ ile s(h; k) Dedekind toplamlar¬ aras¬ndaki ili¸skiler verilecektir:

Teorem 4.2.6. (h; k) = 1; k > 0 ve h + k tek tamsay¬oldugunda¼

$$B_1(h;k) = (1 \quad h)\,(4s(h;2k) + 4s(2h;k) \quad 10s(h;k))$$

e¸sitligi¼ saglan¬¼r (Cetin 2016).

· Ispat. (4.8) e¸sitligi¼ ve (2.15) denklemi birlikte kullan¬l¬rsa istenen sonuç bulunur.

Teorem 4.2.7. (h; k) = 1; k > 0 ve h + k tek tamsay¬oldugunda¼

$$B_1(h;k) = 2(1 \quad h)\,(s(h;k) \quad 2s(h+k;2k))$$

denklemi saglan¬¼r (Cetin 2016).

·
Ispat. (4.8) e¸sitligi¼ ve Sitaramachandrarao (1987) çal¬¸smas¬ndaki

$$S(h;k) = 4s(h;k) \quad 8s(h+k;2k)$$

denklemi birlikte kullan¬l¬rsa istenen sonuç bulunur.

Teorem 4.2.8. k > 0 ve h ile k aralar¬nda asal tek tamsay¬lar olsun. Bu durumda

$$B_1(h;k) = \quad 10hs(h;k) + 4hs(2h;k) + 4hs(h;2k) + \frac{1}{2k} \quad \frac{1}{2}$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir (Cetin 2016).

· Ispat. (4.11) ve (2.13) denklemi birlikte kullan¬l¬rsa istenen sonuç bulunur.

S¬radaki teoremler ile $B_1(h;k)$ sonlu toplamlar¬n¬n sonsuz seri aç¬l¬mlar¬verilecektir:

Teorem 4.2.9. (h; k) = 1; k > 0 ve h + k tek tamsay¬oldugunda¼

$$B(h;k) = \frac{2(1-h)}{1} \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{2n-1} \tan \frac{h(2n-1)}{2k}$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir (Cetin 2016).

· Ispat. (4.8) e¸sitligi¼ ve (2.19) denklemi birlikte kullan¬l¬rsa istenen sonuç bulunur.

Teorem 4.2.10. k > 0 ve h ile k aralar¬nda asal tek tamsay¬lar olsun. Bu durumda

$$B_1(h;k) = \frac{2h}{6} \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{2n-1} \tan \frac{h(2n-1)}{2k} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir (Cetin 2016).

· Ispat. (4.11) ve (2.20) denklemi birlikte kullan¬l¬rsa istenen sonuç bulunur.

A¸sag¬¼daki teoremler ile $B_1(h;k)$ sonlu toplamlar¬n¬n baz¬sonlu seri temsilleri verile-cektir:

Teorem 4.2.11. (h; k) = 1; k > 0 ve h + k tek tamsay¬oldugunda¼

$$B(h;k) = \frac{1-h}{2k} \sum_{j=1}^{k} \tan \frac{h(2j-1)}{2k} \cot \frac{(2j-1)}{2k}$$

denklemi saglan¬¼r (Cetin 2016).

· Ispat. (4.8) e¸sitligi¼ ve (2.21) denklemi birlikte kullan¬l¬rsa istenen sonuç bulunur.

Teorem 4.2.12. k > 0 ve h ile k aralar¬nda asal tek tamsay¬lar olsun. Bu durumda

$$B(h;k) = \frac{h}{2k} \sum_{\substack{j=1 \\ j=(k+1)/2}}^{k} \tan \frac{h(2j-1)}{2k} \cot \frac{(2j-1)}{2k} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}$$

e¸sitligi¼ geçerlidir (Cetin 2016).

· Ispat. (4.11) ve (2.22) denklemi birlikte kullan¬l¬rsa istenen sonuç bulunur.

5. BAZI ÖZEL SONLU TOPLAMLARIN FIBONACCI SAYILARI ILE ILI¸SKILERI

Bu bölümde, daha önce Cetin ve ark. (2014) çal¬¸smas¬nda tan¬mlanm¬¸s olan $C_1(h; k)$ ve $B_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬n¬n Fiboanacci say¬lar¬ ile ili¸skileri verilmi¸stir. h ve k say¬lar¬n¬n özel Fiboanacci say¬lar¬olmas¬durumlar¬nda, $C_1(h; k)$ ve $B_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬n, bilinen diger¼ sonlu toplamlarla baglant¬¼lar¬kurulmu¸stur.

5.1. Simetrik Çiftler ve Fibonacci Say¬lar¬

Fibonacci say¬lar¬a¸sag¬¼daki üreteç fonksiyonu yard¬m¬yla tan¬mlan¬r, (Koshy 2001, Mezo 2009):

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \tag{5.1}$$

Koshy (2001) kaynag¬¼ndan, yukar¬daki ifadenin elde edili¸si k¬saca a¸sag¬¼daki gibidir:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

olsun. Bu durumda,

$$g(x) = F_0 + xF_1 + x^2F_2 + \cdots + x^nF_n + \cdots$$

yaz¬labilir. g(x) fonksiyonu, s¬ras¬yla önce x sonra x^2 ile çarp¬l¬rsa,

$$xg(x) = xF_0 + x^2F_1 + x^3F_2 + \cdots + x^{n+1}F_n + \cdots$$

ve

$$x^2g(x) = x^2F_0 + x^3F_1 + x^4F_2 + \cdots + x^{n+2}F_n + \cdots$$

bulunur. $g(x) - xg(x) - x^2 g(x)$ ifadesi hesaplan¬rsa,

$$g(x) - xg(x) - x^2 g(x) = xF_1 + x^2(F_2 - F_1) + x^3(F_3 - F_2 - F_1)$$

$$+ \cdots + x^n(F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) + \cdots \qquad (5.2)$$

elde edilir. Fibonacci say¬lar¬için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

rekürans bag¬¼nt¬s¬geçerli oldugundan,¼ (5.2) e¸sitliginin¼ sag¼ taraf¬nda, ilk terim hariç digerlerinin¼ hepsi 0 olur. Böylece,

$$g(x) - xg(x) - x^2 g(x) = x$$

bulunur. Bu e¸sitlik biraz daha düzenlenirse (5.1) elde edilir.

(5.1) e¸sitliginden,¼ ilk birkaç Fibonacci say¬s¬kolayca hesaplanabilir:

$$0;\ 1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ \ldots$$

Fibonacci say¬lar¬ile ilgili baz¬özellikler a¸sag¬¼da verilmi¸stir:

Teorem 5.1.1. Fibonacci say¬lar¬için

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$$

e¸sitligi¼ geçerlidir (Koshy 2001).

Sonuç 5.1.2. Fibonacci say¬lar¬için

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

ve

$$\sum_{1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

e¸sitlikleri geçerlidir (Koshy 2001).

Teorem 5.1.3. (Cassini Formülü) $n \geq 1$ olmak üzere,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir (Koshy 2001).

Sonuç 5.1.4. Ard¬¸s¬k tüm Fibonacci say¬lar¬ aralar¬nda asald¬r. Yani, her n için $(F_{n+1}; F_n) = 1$ dir (Koshy 2001).

Teorem 5.1.5. Fibonacci say¬lar¬için

$$\sum_{1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

dir (Koshy 2001).

Teorem 5.1.6. Fibonacci say¬lar¬için

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$$

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$$

e¸sitlikleri geçerlidir (Koshy 2001).

Meyer (2002) çal¬¸smas¬nda, Dedekind toplamlar¬n¬n özel bir halini çal¬¸st¬. Bu çal¬¸smada Meyer s(h; k) = s(k; h) olacak ¸sekildeki $\{h; k\}$ tamsay¬ çiftlerini ara¸st¬rd¬. Eger¼ bu özellik saglan¬¼yorsa Meyer, $\{h; k\}$ tamsay¬çiftine simetrik çift ad¬n¬verdi. Ayrca bu özellik saglan¬¼yorsa, yani $\{h; k\}$ simetrik tamsay¬çifti olmas¬için gerek ve yeter ¸sart¬n $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $h = F_{2n+1}$ ve $k = F_{2n+3}$ olmas¬oldugunu¼ gösterdi. Burada F_m, m inci Fibonacci say¬s¬n¬göstermektedir. Bu k¬s¬m boyunca h ve k'nin aralar¬nda asal oldugu¼ kabul edilecektir. F_{2n+1} ve F_{2n+3} ¸seklindeki Fibonacci say¬lar¬ ile sonlu özel toplamlar aras¬ndaki ili¸ski verilecektir. Bu Fibonacci say¬lar¬a¸sag¬¼daki üreteç fonksiyonu ile verilir:

Koshy (2001) kaynag¬¼nda görülecegi¼ gibi Fibonacci say¬lar¬için

$$\frac{F_r + (-1)^r F_{k-r} x}{1 - L_k x + (-1)^k x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn+r} x^n \tag{5.3}$$

üreteç fonksiyonu verilmi¸stir. Burada L_k Lucas say¬lar¬n¬ göstermektedir ve Lucas say¬lar¬a¸sag¬¼daki ¸sekilde tan¬mlan¬r:

$$\frac{2 - x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n$$

ve

$$L_n = \begin{cases} 2; & n = 0 \\ 1; & n = 1 \\ L_{n-1} + L_{n-2}; & n > 1 \end{cases}$$

dir. Eger¼ (5.3) denkleminde $k = 2$ ve $r = 1$ yaz¬l¬rsa, bu durumda

$$\frac{F_1 + (-1)F_1 x}{1 - L_2 x + (-1)^2 x^2} = \frac{1 - x}{1 - 3x + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} x^n$$

elde edilir. Benzer ¸seklilde eger¼ (5.3) denkleminde $k = 2$ ve $r = 3$ yaz¬l¬rsa, bu durumda

$$\frac{F_3 + (-1)^3 F_1 x}{1 - L_2 x + (-1)^2 x^2} = \frac{2 - x}{1 - 3x + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+3} x^n$$

bulunur.

Özellik 5.1.7. $s(h; k)$ toplamlar¬n¬n paydas¬$2k(3; k)$ n¬n bir bölenidir (Meyer 2002).

Burada (3; k) ifadesi 3 ile k’nin en büyük ortak bölenini ifade etmektedir.

Özellik 5.1.8. s(h; k) toplamlar¬n¬n ald¬g¬tek¼ tamsay¬degeri¼ s¬f¬rd¬. Bu degeri¼ de ancak ve ancak $h^2 + 1$ 0 (mod k) olmas¬durumunda al¬r (Meyer 2002).

S¬radaki teorem fh; kg çiftinin simetrik çift olabilmesi için gerekli ko¸sulu vermektedir. Meyer (2002) çal¬¸smas¬nda a¸sag¬¼daki teoremin ispat¬n¬vermi¸stir:

Teorem 5.1.9. Eger¼ (h; k) = 1 ve fh; kg simetrik çiftse bu durumda s(h; k) = 0 dir (Meyer 2002).

fh; kg simetrik çifti için s(h; k) = 0 oldugu¼ bilindiginden,¼ her h ve k

$$h^2 \quad 3hk + k^2 = \quad 1 \tag{5.4}$$

Diophant denklemini saglamak¼ zorundad¬.

Teorem 5.1.10. (5.4) e¸sitliginin¼ pozitif tamsay¬ çözümleri n = f0; 1; 2; g için $h = F_{2n+1}$; $k = F_{2n+3}$ dir. Burada F_m, m inci Fibonacci say¬s¬d¬r (Meyer 2002).

Teorem 5.1.9. ve Teorem 5.1.10. a¸sag¬¼daki teoremi gerektirmektedir:

Teorem 5.1.11. fh; kg çiftinin simetrik çift olmas¬için gerek ve yeter ¸sart n 2 N için $h = F_{2n+1}$ ve $k = F_{2n+3}$ dir. Burada F_m, m inci Fibonacci say¬s¬d¬r (Meyer 2002).

Fibonacci ve Lucas say¬lar¬için bir çok ilginç özellik bulunmaktad¬r. Fibonacci ve Lucas say¬lar¬negatif saylara da geni¸sletilebilir.

$$F_{\ n} = (\ 1)^{n+1} F_n;\ n \quad 1$$

ve benzer ¸sekilde

$$L_{\ n} = (\ 1)^{n} L_n$$

oldugu¼ Koshy (2001) kaynag¬¼nda detaylar¬ile mevcuttur. Böylece n bir tek tamsay¬ oldugunda¼ $F_{\ n} = F_n$ olmakla beraber, n say¬s¬n¬n çift olmas¬durumunda da $L_{\ n} = L_n$ olmaktad¬r.

A¸sag¬¼da Fibonacci say¬lar¬ve Lucas say¬lar¬aras¬ndaki baz¬önemli bag¬¼nt¬lar ver-ilmi¸stir:

Sonuç 5.1.12.

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$F_{n\ 1} + F_{n+1} = L_n$$

$$F_{n+2} \quad F_{n\ 2} = L_n$$

$$L_{n\ 1} + L_{n+1} = 5F_n$$

e¸sitlikleri geçerlidir (Koshy 2001).

5.2. $C_1(h; k)$ Toplamlar¬ve Fibonacci Say¬lar¬

$C_1(h; k)$ sonlu toplamlar¬için h ve k özel Fibonacci say¬lar¬olarak seçildiginde,¼ il-ginç sonuçlar ortaya ç¬kmaktad¬r. Bunun ¬¸s¬g¬¼nda, Fibonacci say¬lar¬na bagl¬olarak,¼ $C_1(h; k)$ toplamlar¬ için özel degerler¼ verilecektir. Benzer ¸sekilde, h ve k özel Fi-bonacci say¬lar¬ olduklar¬nda, $s_5(h; k)$ Hardy-Berndt toplamlar¬ ve $Y(h; k)$ Sim¸sek toplamlar¬n¬n reciprocity bag¬¼nt¬lar¬n¬n nas¬l yaz¬labilecegi¼ gösterilecektir. $C_1(h; k)$ toplamlar¬n¬n, Hardy-Berndt toplamlar¬$s_3(h; k)$; $s_4(h; k)$; $s_5(h; k)$; Dedekind toplam-lar¬$s(h; k)$ ve Sim¸sek toplamlar¬$Y(h; k)$'nin reciprocity bag¬¼nt¬lar¬ile ili¸skisi vard¬.

Teorem 5.2.1. $k > 0$ ve fh; kg simetrik çift olmak üzere a; h; k 2 Z olsun. n 2 N ve F_m m inci Fibonacci say¬s¬olmak üzere, $(h; k) = 1$, $h = F_{6n\ 1}$ ve $k = F_{6n+1}$ ise bu durumda

$$s(h; k) = \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h}\right) 2C_1(a; hk) \tag{5.5}$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir (Cetin 2016).

.

Ispat. Teorem 4.1.6.'dan h ile k tek tamsay¬lar olduklar¬nda, $k > 0$; $(h; k) = 1$ ve a; h; k 2 Z için

$$s(h; k) + s(k; h) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h}\right) 2C_1(a; hk)$$

e¸sitiginin¼ geçerli oldugu¼ bilinmektedir. Ayr¬ca Meyer (2002) çal¬¸smas¬nda, fh; kg simetrik çift oldugunda,¼

$$s(h; k) = s(k; h)$$

oldugunu¼ göstermi¸stir. Eger¼ bu iki denklem taraf tarafa toplan¬rsa, istenen sonuç elde edilir.

Teorem 5.2.2. $k > 0$ ve fh; kg simetrik çift olmak üzere a; h; k 2 Z olsun. n 2 N ve F_m m inci Fibonacci say¬s¬olmak üzere, $(h; k) = 1$, $h = F_{6n\ 1}$ ve $k = F_{6n+1}$ ise bu durumda

$$C_1(a; hk) = \frac{h}{2k} + \frac{k}{2h}\ 1 \tag{5.6}$$

e¸sitligi¼ geçerlidir (Cetin 2016).

· Ispat. (5.5) e¸sitliginden¼ ve Teorem 5.1.1.'den elde edilebilir.

Teorem 5.2.3. $k > 0$ ve fh; kg simetrik çift olmak üzere a; h; k 2 Z olsun. n 2 N ve F_m m inci Fibonacci say¬s¬olmak üzere, $(h;k)=1$, $h=F_{6n\ 1}$ ve $k=F_{6n+1}$ ise bu durumda

$$s_5(h;k)+s_5(k;h)=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{k}+\frac{k}{h}\right)\ 2$$

ve

$$hY(h;k)+kY(k;h)=2h^2+2k^2\quad 4hk$$

e¸sitlikleri gerçeklenir (Cetin 2016).

5.3. $B_1(h;k)$ Toplamlar¬ve Fibonacci Say¬lar¬

$C_1(h;k)$ sonlu toplamlar¬na benzer olarak, $B_1(h;k)$ sonlu toplamlar¬ da Fibonacci say¬lar¬n¬n baz¬ özel degerleri¼ için ilginç bir sonuç ortaya koymaktad¬r. Fibonacci say¬lar¬n¬n belli özel degerleri¼ için $B_1(h;k)$ sonlu toplamlar¬için reciprocity teoremi a¸sag¬¼da verilmi¸stir:

Teorem 5.3.1. $h;k>0$ ve $\{h;k\}$ simetrik çift olmak üzere $h;k\in\mathbb{Z}$ olsun. $n\in\mathbb{N}$ ve F_m m inci Fibonacci say¬s¬olmak üzere, $(h;k)=1$, $h=F_{6n\ 1}$ ve $k=F_{6n+1}$ ise bu durumda

$$kB_1(h;k)+hB_1(k;h)=\frac{h^2\ h\,k+k^2}{hk}+1\ 2$$

e¸sitligi¼ gerçeklenir (Cetin 2016).

.

Ispat. Bu toremin ispat¬Teorem 4.2.5.'in ispat¬na benzer ¸sekilde verilebilir. Teorem 4.2.5.'in ispat¬ndan (4.15) e¸sitliginin¼ sagland¬¼g¬¼ bilinmektedir. Cetin (2016) çal¬¸s-mas¬ndan $(h;k)=1$ olmak üzere h ve k tek tamsay¬lar olduklar¬nda,

$$s_5(h;k)+s_5(k;h)=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{k}+\frac{k}{h}\right)\ 2$$

e¸sitliginin¼ sagland¬¼g¬¼ bilinmektedir. Eger¼ bu son denklem (4.15) e¸sitliginde¼ kul-lan¬l¬rsa istenen sonuç elde edilir.

KAYNAKÇA

Apostol, T. M. 1976. Modular functions and Dirichlet Series in Number Theory. Springer-Verlag, New York, USA, 207 pp.

Apostol, T. M. 1976. Introduction to analytic number theory. Springer-Verlag, New York, USA, 340 pp.

Apostol, T. M., Vu, T. H. 1982. Elementary Proofs of Berndt's Reciprocity Laws. Pasi…c J. Math., 98: 17-23.

Asai, T. 1986. Some arithmetic on Dedekind sums. J. Mat. Soc. Japan, 38(1): 163-172.

Beck, M. 2006. Geometric Proofs Of Polynomial Reciprocity Laws Of Carlitz, Berndt, and Dieter, M. Beck, in Diophantine analysis and related …elds. Sem. Math. Sci., 35: 11–18.

Berndt, B. C. 1978. Analytic Eisenstein Series, teta-functions, and Series relations in the spirit of Ramanujan. J. Reine Angew. Math., 303/304: 332-150.

Berndt, B. C. 1974. A new proof of the reciprocity theorem for Dedekind sums. Elem. Math., 29: 93-94.

Berndt, B. C. 1973. Generalized Dedekind eta-functions and generalized Dedekind sums. Trans. Amer. Math. Soc., 178: 495-508.

Berndt, B. C., Dieter, U. 1982. Sums involving the greatest integer function and Riemann Stieltwes integration. J. Reine Angew. Math., 337: 208-220.

Berndt, B. C., Evans, R. J. 1979. Problem E2758. American Math. Monthly, 86(128).

Berndt, B. C., Evans, R. J., Williams, K. S. 1998. Gauss and Jacobi Sums. John Wiley & Sons Inc., California, USA, 600 pp.

Berndt, B. C., Goldberg, L. A. 1984. Analytic Properties of Arithmetic Sums arising in the theory of the classical teta-functions. SIAM., J. Math. Anal., 15: 143-150.

Berndt, B. C., Yeap, B. P. 2002. Explicit evaluations and reciprocity theorems for …nite trigonometric sums. Advances in Applied Mathematics, 29(3): 358–385.

Can, M., Kurt, V. 2014. Character analogues of certain Hardy-Berndt sums. International Journal of Number Theory, 10(3): 737–762.

Carlitz, L. 1975. Some polynomials associated with Dedekind Sums. Acta Math. Sci. Hungar, 26: 311-319.

Carlitz, L. 1975. A Three-Term Relation For Some Sums Related To Dedekind Sums. Paci…c Journal of Mathematics, 57(2).

Cetin, E. 2016. A Note on Hardy type Sums and Dedekind Sums. FILOMAT, 30(4): 977-983.

Cetin, E. 2016. Analytic Properties of the Sum $B_{\mathbf{1}}(h; k)$. Math. and Comput. Appl., 21(31).

Cetin, E. 2016. Some Properties Of The Sum $C_{\mathbf{1}}(h; k)$. The 5th Symposium on Generating Function of Numbers and Polynomials and Their Applications, 19-25 September, 2016, Rhodos, Greece.

Cetin E, Simsek Y., Cangul I. N. 2014. Some special …nite sums related to the three-term polynomial relations and their applications. Adv. Di¤erence. Equ., 283: 1-18.

Dagl¬¼, M. C., Can, M. 2013. A new generalization of Hardy–Berndt sums. Proc. Indian Acad. Sci.,123(2): 177–192.

Dedekind, R. 1953. Erläuterungen zu den Fragmenten XXVIII, in Collected works of Bernhard Riemann. Dover Publ.: 466-478.

Dedekind, R. 1930. Erläuterungen zu der Riemannschen Fragmenten über die Grenzfalle der elliptischen Funktionen. Gesammelte Math. Werke, 1: 159-173.

Dedekind, R. 1930. Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann. Riemann's Gesammelte Math. Werke, 2: 466-472.

Dieter, U. 1984. Cotangent sums,a further generalization of Dedekind sums. Journ. Number Theory, 18: 289-305.

Dieter, U. 1959. Das Verhalten der Kleinschen Funktionen log $_{g;h}(w_{\boldsymbol{1}};\ w_{\boldsymbol{2}})$ Gegenüber Modultransformationen und Verallgemeinerte Dedekindsche Summen. J. Reine Angew. Math., 201: 37-70.

Goldberg, L. A. 1981. Transformation of teta-functions and analogues of Dedekind sums. Ph.D. Thesis, University of Illinois, Urbana.

Grosswald, E. 1971. Dedekind–Rademacher sums. Amer. Math. Monthly, 78: 639– 644.

Grosswald, E. 1984. Topics from the theory of numbers. Birkhauser Basel, Boston, USA, 335 pp.

Hardy, G. H. 1969. On certain series of discontinuous functions, connected with the modular functions. Quart. J. Math., 36: 93-123.

Huaning, L., Wenpeng, Z. 2007. Generalized Cochrane sums and Cochrane-Hardy sums. Journal of Number Theory, 122: 415–428.

Ireland, K., Rosen, M. I. 1990. A Classical Introduction to Modern Number Theory. Springer-Verlag, New York, USA, 394 pp.

Knopp, M. I. 1970. Modular Functions in Analytic Number Theory. Markham, Chicago, USA, 154 pp.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 652 pp.

Lewittes, J. 1972. Analytic continuation of Eisenstein series. Trans. Amer. Math. Soc., 177: 469-490.

Lind, D. A. 1968. The Quadratic Field $Q(\sqrt{5})$ and a Certain Diophantine Equation. The Fibonacci Quarterly, 6(3): 86-93.

Liu, H., Gao, J. 2012. Generalized Knopp identities for homogeneous Hardy sums and Cochrane-Hardy sums. Czechoslovak Mathematical Journal, 62(4): 1147–1159.

Meyer, J. L. 2002. Symmetric Arguments in the Dedekind Sum. Department of Mathematics, 215 Carnegie Library, Syracuse University, Syracuse, New York 13244, Submitted July-Final Revision September.

Mezo, I. 2009. Several Generating Functions for Second-Order Recurrence Sequences. Journal of Integer Sequences, 12: 92-106.

Rassias, M. T., Toth, L. 2015. Trigonometric Representations of Generalized Dedekind and Hardy Sums via the Discrete Fourier Transform. 5th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields, Budapest.

Pettet, M. R., Sitaramachandraro, R. 1989. Three-Term relations for Hardy sums. Journal of Number Theory, 25: 328-339.

Rademacher, H. 1954. Generalization of the reciprocity formula for Dedekind sums. Duke Math. J., 21: 391-397.

Rademacher, H. 1933. Egy Reciprocitaskepletröl a Modulfüggevenyek Elmelete-böl. Mat. Fiz. Lapok, 40: 24-34.

Rademacher, H. 1964. Some remarks on certain generalized Dedekind sums. Acta Arith., 9: 97-105.

Rademacher, H. 1967. Über die Transformation der Logarithmen der teta Funk-tionen. Math. Ann., 168: 142-148.

Rademacher, H., Grosswald, E. 1972. Dedekind sums. Carus Mathematical Monographs, The Mathematical Association of America, USA, 102 pp.

Rainville, E. D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, New York, USA, 365 pp.

Simsek, Y. 2013. Remarks On Y (h; k). International Conference on Applied Analy-sis and Mathematical Modelling, 2-5 Haziran 2013, Türkiye.

Simsek, Y. 2004. On generalized Hardy Sums $s_5(h; k)$. Ukrainian Math. J., 56(10): 1434-1440.

Simsek, Y. 1998. Theorems on Three-Term Relations for Hardy sums. Turkish J.of Math., 22: 153-162.

Simsek, Y. 1993. Dedekind ve Hardy Toplamlar¬n¬n Genelle¸strilmesi. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dal¬, Adana.

Simsek, Y. 1993. A note on Dedekind sums. Bull. Cal. Math. Soci., 85: 567-572.

Simsek, Y. 2006. Remarks On Reciprocity Laws of the Dedekind and Hardy Sums. Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 12(2): 237-247.

Simsek, Y. 2010. Special Functions Related To Dedekind-Type Dc-Sums And Their Applications. Russian J. Math. Phys., 4: 495-508.

Simsek, Y. 2003. Relations between teta-functions Hardy sums Eisenstein series and Lambert series in the transformation formula of log $_{g;h}(z)$. J. Number Theory, 99: 338-360.

Simsek, Y. 2009. On Analytic properties and character analogs of Hardy Sums. Taiwanese J. Math., 13: 253-268.

Simsek, Y. 2009. q-Hardy-Berndt type sums associated with q-Genocchi type zeta and q-l-functions. Nonlinear Analysis, 71: 377-395.

Sitaramachandrarao, R. 1987. Dedekind and Hardy sums. Acta Arith., XLVIII: 325-340.

ÖZGEÇMI¸S

Ad¬Soyad¬	:	Elif ÇETIN
Dogum¼ Yeri	:	Bursa
Dogum¼ Tarihi	:	02.05.1987
Yabanc¬Dili	:	Ingilizce

Egitim¼ Durumu (Kurum ve Y¬l)

Lise	:	Mudanya Sami Evkuran Anadolu Lisesi (2005)
Lisans	:	Uludag¼ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2009)
Y•uksek Lisans	:	Uludag¼ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dal¬(2009 2011)
Doktora	:	Uludag¼ Universitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dal¬(2011 2017)
Iletisim	:	elifc2@gmail.com

Çal¬¸st¬g¬Kurum/Kurumlar¼ ve Y¬l

Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü Ara¸st¬rma Görevlisi (2013)