T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARDIŞIK KUVVET TOPLAMLARI VE BERNOULLİ POLİNOMLARI

Gamze SAVAŞ

Doç. Dr. Gökhan SOYDAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2016

TEZ ONAYI

Gamze SAVAŞ tarafından hazırlanan "Ardışık Kuvvet Toplamları ve Bernoulli Polinomları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Gökhan SOYDAN

Üye: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Uludağ Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Refik KESKİN
Sakarya Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Doç. Dr. Gökhan SOYDAN
Uludağ Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Ensititü Müdürü

U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01 / 07 / 2016

İmza

Gamze SAVAŞ

Bu tez çalışması Uludağ Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından $2015-23$ nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ARDIŞIK KUVVET TOPLAMLARI VE BERNOULLİ POLİNOMLARI

Gamze SAVAŞ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gökhan SOYDAN

Bu çalışmanın amacı $(x+1)^k + (x+2)^k + \ldots + (2x)^k = y^n$ Diophant denkleminin pozitif tamsayı çözümleri için n'ye üst sınırlar bulmak ve bu üst sınırlara bağlı olarak denklemin çözümlerinin olduğu durumları belirlemektir.

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomları hakkında temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ardışık kuvvet toplamları tipindeki Diophant denklemler ve bu denklemlerle ilgili literatür bilgisi verilmiştir. Üçüncü bölümde ise $(x+1)^k + (x+2)^k + \ldots + (2x)^k = y^n$ Diophant denkleminde k ve x'e bağlı yapılan sınıflandırmayla n için sabit üst sınırlar ile 2-sel ve 3-sel değerlendirme fonksiyonlarına bağlı üst sınırlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diophant denklem, ardışık kuvvet toplamı, Bernoulli polinomu
2016, vii + 36 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

CONSECUTIVE POWER SUMS AND BERNOULLI POLYNOMIALS

Gamze SAVAŞ

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gökhan SOYDAN (Uludag University)

The aim of this work is to find upper bounds for n corresponding to positive integer solutions of the Diophant equation $(x+1)^k+(x+2)^k+\ldots+(2x)^k = y^n$ and to determine the cases in which this equation has solutions.

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, the fundamental notions are given concerning Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials. In the second chapter, the Diophantine equations for sums of consecutive like powers and their literature are given. In the third chapter, some fixed upper bounds and some upper bounds which depend on 2-adic and 3-adic valuation functions for n are obtained according to the classification which depends on k and x on the Diophantine equation $(x+1)^k+(x+2)^k+\ldots+(2x)^k = y^n$.

Key Words: Diophantine equation, consecutive power sum, Bernoulli polynomial
2016, vii + 36 pages.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında değerli katkılarıyla bana yol gösteren, sonsuz sabırla beni her zaman çalışmaya teşvik eden ve güven veren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Gökhan SOYDAN' a,

tezimde yazım kuralları denetimi konusunda bana yardımcı olan hocam Arş. Gör. İlker Burak GİRESUNLU'ya,

tüm hayatım boyunca benden hiç bir desteğini esirgemeyen, yeter ki sen oku, sen çalış diyerek bir dediğimi iki etmeyen, gururlansınlar diye daha çok çalıştığım, sabırlarına hayran kaldığım, daima arkamda duran, yaptıklarımla her zaman gurur duyan, varlıklarıyla hayatıma anlam katan, şükür sebeplerim, iyikilerim, canım anneme, ağabeyime, kardeşime, yengem ve biricik yeğenlerime

sonsuz teşekkürler…

Gamze SAVAŞ
01 / 07 / 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ doğal sayılar kümesi
B_j	j'inci Bernoulli sayısı
$B_q(x)$	q'uncu Bernoulli polinomu
$v_p(m)$	m tamsayısını bölen p asalının üssü
$\binom{x}{j}$	x'in j'li kombinasyonu
$\mathbb{Z}^+$	pozitif tamsayılar kümesi
$a \mid b$	a böler b
$a \nmid b$	a bölmez b

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1 GiRİŞ VE ÖN BİLGİLER

1.1 Tarihsel Giriş

Jacob Bernoulli $(1654-1705)$

$$1^k+2^k+\ldots+n^k \tag{1.1}$$

ardışık tamsayı kuvvet toplamları ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi, 1713'te yayınlanan Ars Conjectandi (Bernoulli,1975) isimli kitabında açıklamıştır. Bernoulli (1.1)'deki ifadenin $k=1$'den 10'a kadar hesaplanışı ile ilgili

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \ldots . \tag{1.2}$$

formüllerini günümüzde Bernoulli sayıları olarak bilinen sayılarla daha genel olarak aşağıdaki gibi formülize etmiştir:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j\frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}\left(=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_jn^{k+1-j}\right). \tag{1.3}$$

Burada $\binom{k}{j}$ binom katsayısı $\binom{k}{j}=\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-j+1)}{j!}$ ve B_j, j'inci Bernoulli sayısıdır (yukarıdaki ifadede $B_1=\frac{1}{2}$ olarak alınmıştır).

Bernoulli 1'den 1000'e kadar ardışık sayıların onuncu kuvvetlerinin toplamının sayısal değerinin "91409924241424243424241924242500" olduğunu (1.3)'te ifade ettiği formüller yardımıyla 15 dakika gibi kısa bir sürede hesapladığını iddia etmiştir.

Bernoulli B_0 ve B_1 için semboller kullanmamıştır ve bazı B_{2n} Bernoulli sayıları için $A, B, C, D, \ldots$ sembollerini aşağıdaki gibi kullanmıştır (B_1 haricindeki B_{2n+1} Bernoulli sayılarının sıfır olduğunu ileride açıklayacağız).

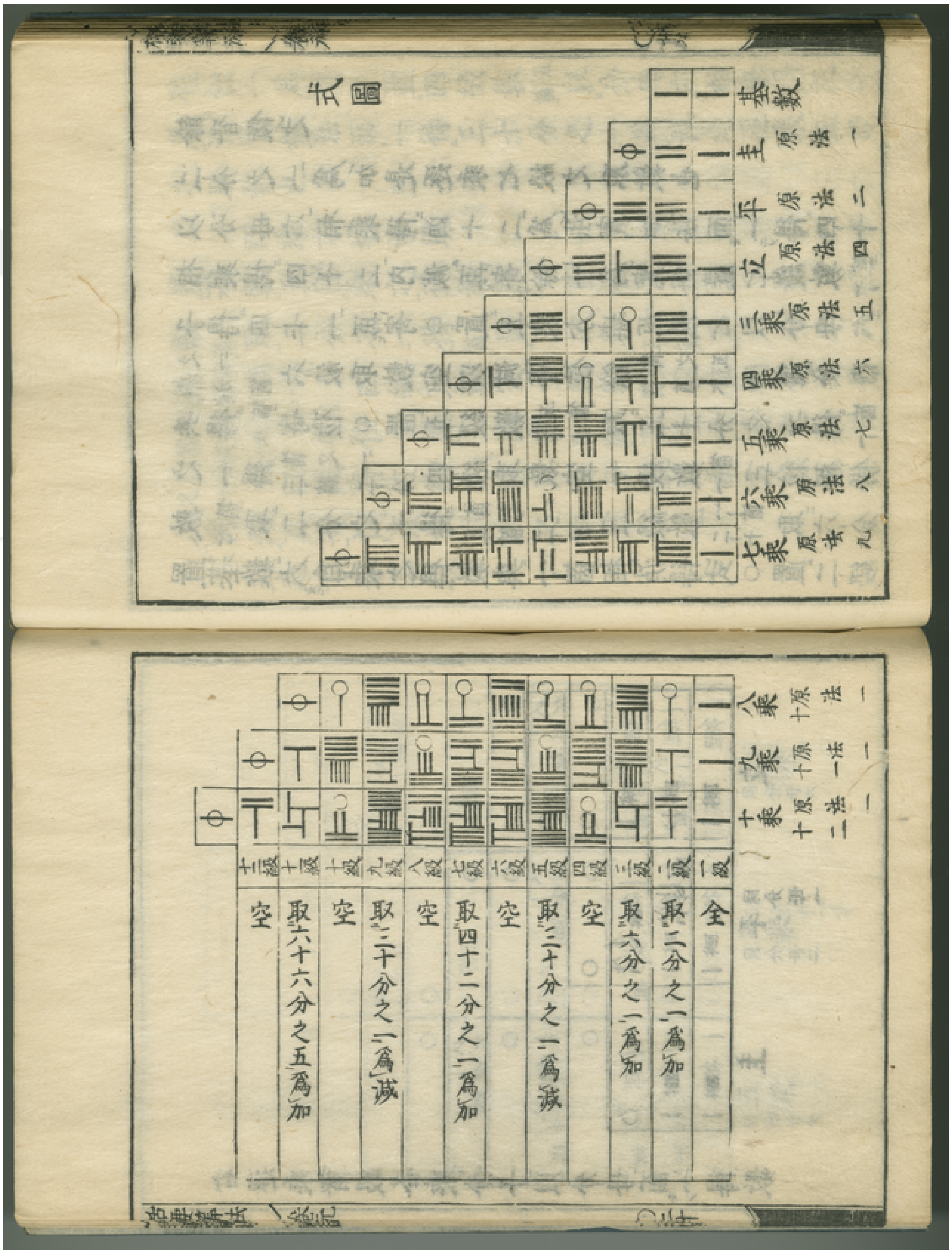
$$\frac{1}{c+1}n^{c+1}+\frac{1}{2}n^c+\frac{c}{2}An^{c-1}+\frac{cc-1c-2}{2.3.4}Bn^{c-3}+\frac{cc-1c-2c-3c-4}{2.3.4.5.6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{cc-1c-2c-3c-4c-5c-6}{2.3.4.5.6.7.8}Dn^{c-7}+\ldots$$

(Burada $c=k$ dır.)

Takakazu Seki (1642-1708), ölümünden sonra yayınlanan "Katsuyo Sanpo (hesaplama sanatının esasları)" isimli kitabında (1712) (Bernoulli'den 1 yıl önce), kuvvet toplamları formüllerini ve Bernoulli sayılarının tanımlarını vermiştir. Onun formülleri ve tanımları Bernoullininkilerle tamamen aynıdır.

Seki, Bernoulli sayılarını B_0, B_1, $B_2, \ldots$ şeklinde, tek indislileri de B_{2n+1} şeklinde adlandırmıştır.

Seki'nin Bernoulli sayılarını, Bernoulli'den bağımsız bulduğu pek bilinmemektedir. Ama Seki'nin (Seki, 1974) bu konuyla ilgili çalışmaları ve ingilizce çevirileri yayınlanmıştır. Kuvvet toplamlarının binom katsayılarıyla verdiği formülleri ve "Seki-Bernoulli sayıları" günümüzdeki notasyona uygun olarak verilişi Şekil 1.1. ve Şekil 1.2. de gösterilir (Arakawa, Ibukiyama, Kaneko, 2014).



Şekil 1.1. Seki, Katsuyou Sanpou'da kuvvet toplamları formülünün gösteriminde Çince

karakterler kullanmadı ancak Sangi ya da sayma çubukların gösterimi kullanmıştır. Bu tablo (1.3) denkleminin parantez içindeki formülünün her bir bileşenini içerir: Alttaki çeviride “kuvvet ”olarak belirlenen sayı, bu formülün k’sıdır, binom katsayıları tablonun sağ tarafında “Pascal üçgeni” içinde tabloda gösterilmektedir (D çeviride sol taraftadır.). Bernoulli sayıları B_j, sol tarafta verilmiştir(İngilizce çeviride sağ taraftadır.) (1.3) denkleminde eksik olan $\binom{k+1}{k+1}$ katsayısı, Pascal üçgeninin her sütunun başında üstü çizili olan “1 ”çarpımına karşılık gelir ve “payda” hesaplama sonundaki bütün ifadeyle bölünmek zorunda olan $k+1$ sayısıdır.

											$\cancel{1}$		
										$\cancel{1}$	12	level 12	void
									$\cancel{1}$	11	66	level 11	take 5/66 and add
								$\cancel{1}$	10	55	220	level 10	void
							$\cancel{1}$	9	45	165	495	level 9	take 1/30 and subtract
						$\cancel{1}$	8	36	120	330	792	level 8	void
					$\cancel{1}$	7	28	84	210	462	992[e]	level 7	take 1/42 and add
				$\cancel{1}$	6	21	56	126	252	462	792	level 6	void
			$\cancel{1}$	5	15	35	70	126	210	330	495	level 5	take 1/30 and subtract
		$\cancel{1}$	4	10	20	35	56	84	120	165	220	level 4	void
	$\cancel{1}$[a]	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	level 3	take 1/6 and add
1[b]	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	level 2	take 1/2 and add
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	level 1	all
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		power
	1[c]	2[d]	4	5	6	7	8	9	10	11	12		denominator

Şekil 1.2. Katsuyou Sanpou (İngilizce çevirisi, orjinaline göre yansımasıdır.)

a: Üstü çizili sayılar atılacak olanlardır.

b: Bu sayı aynı zamanda üstü çizili olmalıdır.

c: Bu sayı 2 olmalıdır.

d: Bu sayı 3 olmalıdır.

e: Bu sayı 924 olmalıdır.

Ne Seki ne de Bernoulli (1.3)'ün nasıl bulunduğunu ayrıntılı olarak açıklamamıştır. Onların çalışmalarından önce kuvvet toplamları formülleri ile ilgili bazı çalışmalar Johann Faulhaber $(1580-1635)$ tarafından Academia Algebrae isimli dergide yayınlanmıştır.

$\sum_{i=1}^{n} i^k$ polinomunu ele alalım. Faulhaber çalışmalarında k tek iken , örneğin $k=1$ ve $k=3$ için $\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n(n+1)}{2}$ ve $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ eşitliklerinin sağlandığını, k çift iken de $\sum_{i=1}^{n} i^k$ polinomunun $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{i=1}^{n} i^2$ ile bölündüğünü göstermiştir. Ancak Bernoulli sayıları ile kuvvet toplamları arasındaki ilişkiyi tespit edememiştir. Faulhaber tarafından bulunan bu sonuçlar Jacobi (Jacobi,1834) tarafından tekrar keşfedilmiştir. Bernoulli sayıları hakkında yapılan çalışmaları içeren geniş bir kaynakçaya Karl Dilcher'in web sayfasından bakılabilir (Dilcher).

1.2 Binom Katsayıları

Bu bölümde, bölüm 1.3'te Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayılarını tanımlayabilmek için gerekli olacak binom katsayıları ile kuvvet toplamları arasındaki ilişkiyi açıklayacağız.

j sabit ve $0 \le j \le x$ olmak üzere

$$\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\dots(x-j+1)}{1.2\dots j} \tag{1.4}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın.

$$\binom{x}{j} = \binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1} \tag{1.5}$$

eşitliği kullanılarak

$$\sum_{n=M}^{N-1} \binom{n}{j} = \binom{N}{j+1} - \binom{M}{j+1}$$

elde edilir. Şimdi x^q'ları binom katsayılarının bir birleşimi olarak ifade etmek istiyoruz. Binom katsayıları x değişkeni tamsayı olan, tamsayı değerli polinomlardır. $f(x)$ n. dereceden "tamsayı değerli" bir polinom olsun ve

$$f(x) = A_0 + A_1\binom{x}{1} + \dots + A_n\binom{x}{n} \tag{1.6}$$

yazalım.

(1.6)'dan

$$\begin{aligned}
f(0) &= A_0 \\
f(1) &= A_0 + A_1 \\
f(2) &= A_0 + A_1\binom{2}{1} + A_2 \\
&\vdots \\
f(n) &= A_0 + A_1\binom{n}{1} + A_2\binom{n}{2} + \ldots A_{n-1}\binom{n}{n-1} + A_n
\end{aligned} \tag{1.7}$$

eşitlikleri elde edilir.
Varsayıma göre $f(j)$'ler tamsayı olduğundan bu lineer denklem sistemi A_j'lerin tek bir şekilde ifade edilebileceğini ve tamsayı olduklarını gösterir.
(1.6)'yı

$$f(x) = \sum_{j\geq 0} A_j\binom{x}{j}, \quad \binom{x}{0} = 1 \tag{1.8}$$

ile değiştirirsek

$$A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = 0$$

sonucu çıkar.

Şimdi bu düşünceyi özel polinomlara, kuvvet toplamlarına uygulayalım.

$$A_{qj} = 0 \quad (j > q\; için) \tag{1.9}$$

olduğundan

$$x^q = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\binom{x}{j}, \quad q = 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

ifadesinin sağ tarafı sonlu bir toplamdır.

Eğer

$$A_{00} = 1, \quad A_{0j} = 0 \quad (j > 0\; için) \tag{1.11}$$

seçersek (1.10)'da $q = 0$ durumunu dahil etmiş oluruz. Eğer (1.10)'da $q \geq 1$ için $x = 0$ alınırsa

(1.7)'den

$$A_{q0} = 0, \quad (q > 0) \tag{1.12}$$

elde edilir.

(1.10)'un her iki tarafında x'in kuvvetleri eşit olmak zorundadır. Özellikle $j = q$ durumunda

$$A_{qq} = q! \tag{1.13}$$

elde edilir. (1.9), (1.11)-(1.13) durumları dışındaki A_{qj}'ler de pozitif tamsayılardır. Bu A_{qj}'leri formülize etmeden önce ilk olarak "çok terimli katsayı" tanımını verelim:

Tanım 1.2.1 *b_1, b_2, ..., b_k negatif olmayan tamsayıları için $\sum_{i=1}^{k} b_i = n$ olsun. Çok terimli katsayı*

$$\binom{n}{b_1, b_2, \ldots, b_k} = \frac{n!}{b_1! b_2! \ldots b_k!}$$

şeklinde tanımlanır (Gerstein 2012).

$k = 2$ durumu binom katsayısıdır:

$$\binom{n}{b_1, b_2} = \frac{n!}{b_1! b_2!} = \frac{n!}{b_1!(n - b_1)!} = \binom{n}{b_1}$$

Şimdi "çok terimli teoremini" ifade edelim:

Teorem 1.2.2 *Herhangi k ve n pozitif tamsayıları için $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ k-lıları negatif olmayan tamsayılar olmak üzere*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{b_1+b_2+\ldots+b_k=n} \binom{n}{b_1, b_2, \ldots, b_k} \prod_{j=1}^{k} x_j^{b_j}$$

eşitliği sağlanır (Biggs 1989).

Örnek 1.2.3 *$(3a + 5b - 2c + d)^7$ polinomunun açılımında a^2b^4d'li terimin katsayısını bulunuz.*

Çözüm

$(3a + 5b - 2c + d)^7$ açılımında genel terim

$$\binom{7}{b_1, b_2, b_3, b_4} (3a)^{b_1} (5b)^{b_2} (-2c)^{b_3} (d)^{b_4}$$

formunda olmalıdır. a^2b^4d'li terimi elde etmek için $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1$'e ihtiyacımız var. Buradan

$$\begin{aligned}\binom{7}{2,4,1}(3a)^2(5b)^4(d)^1 &= \frac{7}{4!2!1!}(9a^2)(625b^4)(d) \\ &= 105(5625)a^2b^4d \\ &= 590625a^2b^4d\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi A_{qj}'leri formülize edebiliriz.
(1.10) ile Teorem (1.2.2)'den

$$A_{qj} = \sum_{l_k>0} \frac{q!}{l_1!l_2!\ldots l_j!}, \quad q = 1, 2, \ldots, \quad l_1 + l_2 + \ldots l_j = q \tag{1.14}$$

şeklinde formülize edilir.

Örnek 1.2.4 x^3 (1.10)*'daki bağıntıya göre*

$$\begin{aligned}x^3 &= A_{30}\binom{x}{0} + A_{31}\binom{x}{1} + A_{32}\binom{x}{2} + A_{33}\binom{x}{3} \\ &= A_{30}1 + A_{31}x + A_{32}\frac{x(x-1)}{2} + A_{33}\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\end{aligned}$$

şeklinde bir açılıma sahiptir. Bu eşitliği sağlayacak A_{qj} değerleri (1.11)-(1.14) *bağıntıları kullanılarak bulunur.*

1.3 Bernoulli Polinomları ve Bernoulli Sayıları

Bu bölümde, bir önceki bölümde A_{qj}'ler hakkında edindiğimiz bilgilerle n^q'ların toplamı problemini ilişkilendirerek Bernoulli polinomlarını ve Bernoulli sayılarını tanımlayacağız. İlk olarak (1.10)'u

$$x^q = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\left(\binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1}\right), \quad x \in \mathbb{Z} \tag{1.15}$$

şeklinde tekrar yazalım. (1.15)'te x'e M'den $N-1$'e kadar değer verilip alt alta toplanırsa

$$\sum_{n=M}^{N-1} n^q = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\left(\binom{N}{j+1} - \binom{M}{j+1}\right) \tag{1.16}$$

bulunur. Şimdi Bernoulli polinomlarını

$$B_r(y) = r\sum_{j\geq 0} A_{r-1,j}\binom{y}{j+1} + C_r, \quad r = 1,2,\ldots \tag{1.17}$$

şeklinde tanımlayalım (C_r toplamsal sabit).
Bu durumda (1.16) denklemini

$$\sum_{n=M}^{N-1} n^q = \frac{1}{q+1}(B_{q+1}(N) - B_{q+1}(M)) \tag{1.18}$$

şeklinde (C_r'den bağımsız olarak) yazabiliriz. (1.17)'den

$$B_r(0) = C_r,\ r = 1,2,\ldots \tag{1.19}$$

$$B_r(1) = C_r,\ r = 2,3,\ldots \tag{1.20}$$

$$B_1(1) = 1 + C_r, \tag{1.21}$$

bağıntıları bulunur (Son iki eşitlik (1.11) ve (1.12) kullanılarak elde edilir.).
(1.17)'nin tanımından (1.15)

$$x^q = \frac{1}{q+1}(B_{q+1}(x+1) - B_{q+1}(x)) \tag{1.22}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.
(1.22)'nin türevinden

$$qx^{q-1} = \frac{1}{q+1}(B'_{q+1}(x+1) - B'_{q+1}(x)), \quad q = 1,2,\ldots$$

bulunur. Bu ifade (1.22) ile karşılaştırıldığında

$$B_q(x+1) - B_q(x) = \frac{1}{q+1}(B'_{q+1}(x+1) - B'_{q+1}(x))$$

veya

$$\frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x+1) - B_q(x+1) = \frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x) - B_q(x)$$

elde edilir.
Bu denklem gösterir ki

$$\frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x) - B_q(x), \quad q = 1,2,\ldots$$

polinomunun periyodu 1'dir. Ancak periyodik bir polinom sadece sabit olabilir:

$$\frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x) - B_q(x) = K_q, \quad q = 1, 2, \ldots$$

$B_q(x)$'te olabilecek bir C_q sabiti seçilir. Bu durumda $K_q = 0$'dır. Buradan

$$\frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x) = B_q(x) \tag{1.23}$$

elde edilir.
(1.11) ile (1.17)

$$B_1(x) = x + C_1$$

bağıntısını verir.
Bu ifadenin integrali alınıp (1.19) ve (1.23)'ten

$$\frac{B_2(x)}{2!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{C_1 x}{1!} + \frac{C_2}{2!}$$

ve benzer şekilde ardışık adımlarla

$$\frac{1}{q!}B_q(x) = \frac{x^q}{q!} + \frac{C_1}{1!}\frac{x^{q-1}}{(q-1)!} + \ldots + \frac{C_{q-1}}{(q-1)!}\frac{x}{1!} + \frac{C_q}{q!} \tag{1.24}$$

elde edilir. C_q sabitleri sırayla

$$\frac{1}{q!} + \frac{C_1}{1!(q-1)!} + \ldots + \frac{C_{q-1}}{(q-1)!1!} = 0, \quad q \geqslant 2 \tag{1.25}$$

şeklinde ifade edilir. Bu C_q için bir tekrarlama bağıntısıdır. Bu katsayılar "Bernoulli sayıları " olarak adlandırılır ve $C_q = B_q$ şeklinde gösterilir.
(1.25) $q!$ ile çarpıldığında

$$1 + \binom{q}{1}B_1 + \binom{q}{2}B_2 + \ldots + \binom{q}{q-1}B_{q-1} = 0, \quad q \geq 2$$

sonucu elde edilir ve bu eşitlikten Bernoulli sayıları kolayca bulunabilir.
O halde Bernoulli sayıları tekrarlama bağıntısı ile şöyle tanımlanabilir:

Tanım 1.3.1 (J. Bernoulli, 1713) *B_0, B_1, B_2, … Bernoulli sayılarının dizisi $B_0 = 1$ ol-*

mak üzere

$$(q+1)B_q = -\sum_{k=0}^{q-1} \binom{q+1}{k} B_k \tag{1.26}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır.

$q = 0$'dan 11'e kadar olan B_q sayıları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_q	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0

Çizelge 1.1. Bernoulli Sayıları

Bernoulli sayıları için üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 1.3.2

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{q=0}^{\infty} b_q \frac{t^q}{q!}$$

verilsin. Bu durumda her q için $b_q = B_q$'dur.

İspat. Yukarıdaki eşitlikte her iki taraf $e^t - 1$ ile çarpılırsa

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{q=0}^{\infty} b_q \frac{t^q}{q!}$$

elde edilir. Burada t^{q+1} için katsayılar eşitliğinden q_0 için $b_0 = 1$ olur ve

$$\sum_{k=0}^{q} \binom{q+1}{k} b_k = 0$$

elde edilir. Bu da (1.26)'daki gibi Bernoulli sayılarını tanımlar. $B_0 = b_0 = 1$ olduğundan her q için $B_q = b_q$ dur (Ireland ve Rosen, 1990) . ■

Bernoulli ardışık tamsayıların kuvvet toplamları ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi şu teoremde ifade etmiştir:

Teorem 1.3.3 *k pozitif tamsayı olmak üzere*

$$S_k(x) = 1^k + 2^k + \ldots + (x-1)^k$$

polinomu verilsin. Bu durumda

$$(k+1)S_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j x^{k+1-j}$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$e^{jt} = \sum_{k=0}^{\infty} j^k \frac{t^k}{k!}$$

eşitliğinde $j = 0, 1, \ldots, x-1$ yerine konulup alt alta toplanırsa

$$1+e^t+e^{2t}+\ldots+e^{(x-1)t} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(x)\frac{t^k}{k!} \tag{1.27}$$

bulunur. Sol taraf

$$\frac{e^{xt}-1}{e^t-1} = \frac{e^{xt}-1}{t}\frac{t}{e^t-1} = \sum_{j=1}^{\infty} x^j \frac{t^{j-1}}{j!} \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{t^i}{i!} \tag{1.28}$$

şeklindedir.

(1.27) ve (1.28)'in sağ tarafındaki t^k'nın katsayıları eşitlenir ve $(k+1)!$ ile çarpılırsa istenen sonuç elde edilir (Ireland ve Rosen 1990). ■

Şimdi Teorem 1.3.3'nın sonucu olarak Bernoulli polinomlarını formülize edebiliriz.

Tanım 1.3.4 *Bernoulli polinomları*

$$B_q(x) = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} B_k x^{q-k} \tag{1.29}$$

şeklinde tanımlanır. Bu bağıntı (1.24)*'ün her iki tarafı* $q!$ *ile çarpılarak elde edilir.*

(1.29)'a göre ilk dört Bernoulli polinomu

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

tir.

Teorem 1.3.3 ve Tanım 1.3.4'den aşağıdaki önemli sonuç verilebilir:

Sonuç 1.3.5 $k \geq 1$ *için*

$$S_k(x) = \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(x) - B_{k+1})$$

bağıntısı gerçeklenir.

Şimdi Bernoulli polinomları ile ilgili ileride kullacağımız bazı özellikleri ifade edelim.

Önerme 1.3.6

$$(a)\ B_k(0) = B_k(1) = B_k, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{1.30}$$

$$(b)\ B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = B_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.31}$$

$$(c)\ B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x) \tag{1.32}$$

$$(d)\ B_k(x) + B_k(x + \frac{1}{2}) = 2^{1-k} B_k(2x) \tag{1.33}$$

$$(e)\ (-1)^{k+1} B_{2k+1}(x) > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \ 0 < x < \frac{1}{2} \tag{1.34}$$

(Rademacher 1973), (Abramowitz ve Stegun 1965)

1.4 Bernoulli Polinomlarıyla Appell Polinomları Arasındaki İlişki

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $P_n(x)$ n. dereceden rasyonel katsayılı bir polinom ve $P_0(x)$ sıfırdan farklı bir sabit olsun. 1880'de P.E. Appell tarafından $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ polinom dizileri ilk defa çalışılmış ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.4.1 (P.E. Appell, 1880) *Bir* $\{P_n(x)_{n\geq 0}\}$ *polinom dizisi eğer* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için*

$$P_n'(x) = nP_{n-1}(x) \tag{1.35}$$

bağıntısını sağlıyorsa "Appell dizisi",$P_n(x)$ *de "Appell polinomu" olarak adlandırılır.*

Özellikle Appell $\{P_n(x)\}_n$ dizilerinin kümesinin $\{\alpha_n\}$ sayı dizileri kümesine karşılık geldiğini fark etmiş ve bu polinom dizilerinin temsilini

$$P_n(x) = \alpha_n + \binom{n}{1}\alpha_{n-1}x + \binom{n}{2}\alpha_{n-2}x^2 + \ldots + \alpha_0 x^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \alpha_0 \neq 0 \tag{1.36}$$

bağıntısı ile verilmiştir. Ayrıca bu polinom dizilerini ifade etmek için (1.35) bağıntısını sağlayan alternatif bir genel metot vermiştir.

Teorem 1.4.2 (P.E. Appell, 1880) *α_i $(i = 0, 1, \ldots)$'ler reel katsayılar olmak üzere*

$$a(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}\alpha_n$$

kuvvet serisi verilsin.

$$a(h)e^{hx} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\frac{h^n}{n!} \tag{1.37}$$

şeklinde ifade edilen $a(h)$ fonksiyonu $A_n(x)$ polinomunun(dizisinin) üreteç fonksiyonudur.

(1.35)'i veya denk olarak (1.35) ve (1.37)'yi sağlayan yani Appell polinomlarının(dizilerinin) bilinen en iyi örnekleri $B_n(x)$ Bernoulli Polinomları, $E_n(x)$ Euler polinomları ve $H_n(x)$ Hermite polinomlarıdır. Bu polinomların üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad (\mid t \mid \leq 2\pi) \tag{1.38}$$

$$\frac{2te^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad (\mid t \mid \leq \pi) \tag{1.39}$$

$$\frac{e^{xt}}{e^{\frac{t^2}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{1.40}$$

ile verilir. (1.38)'deki eşitlik $x = 0$ için göz önüne alınırsa Teorem 1.3.2'te ifade edilen Bernoulli sayılarının

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonuna karşılık gelir. Aynı eşitlik $x = 1$ için göz önüne alınırsa da

$$\frac{t}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!}$$

bağıntısına karşılık gelir.

Şimdi Tanım 1.4.1'in bir uygulaması olarak ileride kullanacağımız, iyi bilinen aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 1.4.3 *$n \geq 1$ olmak üzere n'inci Bernoulli polinomunun türevi*

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \tag{1.41}$$

bağıntısı ile bulunur.

2 ARDIŞIK KUVVET TOPLAMLARI TİPİNDEKİ DİOPHANT DENKLEMLER

2.1 Giriş

Ardışık kuvvet toplamları tipindeki Diophant denklemler hakkında bilinen ilk çalışma É. Lucas'a (1842-1891) aittir. Lucas (1875)'ın klasik bir problemi

$$1^2+2^2+\ldots+x^2 = y^2 \tag{2.1}$$

denkleminin $(x, y) = (1, 1)$ ve $(24, 70)$'ten başka çözümünün olup olmadığı idi. Moret-Blanc (1876) ve Lucas (1877) tarafından varsayılan çözümlerinin bazı hatalar içerdiğini 1918'de G.N.Watson farketti ve (2.1) denkleminin $(x, y) = (1, 1)$ ve $(24, 70)$'ten başka çözümü olmadığını ispatlayarak problemin çözümünü tamamlamış oldu.

$k, x \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$S_k(x) = 1^k+2^k+\cdots+x^k \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlansın. 1956'da J.J. Schäffer Lucas'ın çalıştığı denklemin daha geneli olan $n \geq 2$ ve $k, n, x, y \in \mathbb{Z}^+$ iken

$$S_k(x) = y^n \tag{2.3}$$

denklemini gözönüne aldı. Schäffer (1956) bu denklem üzerine kapsamlı bir çalışma yaptı. Çalışmasında bu denklemin sonlu ve sonsuz çoklukta tam sayı çözüme sahip olduğu durumları belirledi. Ayrıca denklemin sonlu çözümleri hakkında da bir konjektür verdi. Şimdi Schäffer'ın çalışması ve konjektürü ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgiler verelim.

2.2 Schäffer'ın Denkleminin Çözümleri

(2.3) ilk olarak Schäffer tarafından göz önüne alındığı için bu denklemi **"Schäffer'in denklemi"** olarak adlandırıyoruz. Ardışık kuvvet toplamları tipindeki denklemlerin Bernoulli polinomları ile sıkı ilişkisini birinci bölümde Sonuç 1.3.5 ile ifade etmiştik. Şimdi $S_k(x)$ (2.2)'deki gibi tanımlanırsa yine Teorem 1.3.3 ve Tanım 1.3.4 kullanılarak

$$1^k+2^k+\ldots+x^k = \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(x+1)-B_{k+1}) \tag{2.4}$$

bağıntısı elde edilir. Schäffer çalışmasında bu bağıntıyı kullanmıştır. Tezin bu bölümünde ve üçüncü bölümünde bu bağıntı kullanılacağı için önemlidir.

Şimdi bu denklem ile ilgili sonuçlara geçmeden önce denklem için önemli bir argüman olan ve (2.4)'ün de bir sonucu olan $S_k(x)$ polinomunun cebirsel yapısı ile ilgili şu yardımcı teoremi verelim:

Yardımcı Teorem 2.2.1 (Schäffer, 1956) *$S_1(x) = \frac{x(x+1)}{2}$; $k \neq 1$ iken de aşağıdaki bağıntılar elde edilir:*

$$S_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x+1)^2 R_k(x)}{C_k} & , \quad k > 1 \text{ ve } k \text{ tek ise} \\ \\ \dfrac{x(x+1)(2x+1)R_k(x)}{C_k} & , \quad k \geq 2 \text{ ve } k \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{2.5}$$

($C_k > 0, C_k \in \mathbb{Z}$ ve R_k, tamsayı katsayılı polinom)

Schäffer yukarıda ifade ettiğimiz yardımcı teoremi ve burada detaylarını vermediğimiz $S_k(x)$ polinomlarının diğer cebirsel özelliklerini ve Diophant denklemler ile ilgili bazı bilinen sonuçları kullanarak (2.3) denklemi hakkında önemli sonuçlar vermiştir. Şimdi bu sonuçlardan bahsedelim.

Teorem 2.2.2 (Schäffer, 1956) *$k \geq 1$ sabit ve $n \geq 2$ olmak üzere* (2.3) *denklemi pozitif tamsayılarda*

$$(k, n) \in \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 2)\} \tag{2.6}$$

değerleri dışında sonlu çoklukta çözüme sahiptir. Ayrıca (2.3) *denklemi* (2.6) *değerleri için de sonsuz çoklukta çözüme sahiptir.*

Schäffer (1956), (2.6)'daki (k, n) değerleri için tüm çözümleri veren formülleri ifade etti. Üstelik diğer durumlarda (yani sonlu tane çözüme sahip olduğu durumlar) çözümlerin sayısının sadece k'ya bağlı bir sabit ile sınırlandırılabileceğini gösterdi. Schäffer ispatında (2.4)'teki eşitliği kullandı. $(x, y) = (1, 1)$, (2.3) 'ün "aşikar çözümü" olup $(k, n) = (2, 2)$ için $(x, y) = (24, 70)$ ise "aşikar olmayan çözümü"dür. Schäffer, (2.3) denkleminin aşağıdaki durumlardan herbirinde sadece aşikar çözümlerinin var olduğunu ispatlayabildi.

$k \in \{1, 3, 5\}$	$n = 4$
$k = 3$	$n = 8$
$k \in \{4, 6, 8, 9, 10\}$	$n = 2$
$k \leq 11$	$n \in \{3, 5\}$
$k \leq 11$, $k \neq 10$	$n \in \{29, 41, 53, 113, 173, 281, 509, 641\}$

Çizelge 2.1.

Üstelik Schäffer aşağıdaki ifadeyi konjektür olarak verdi.

Konjektür 2.2.3 (Schäffer,1956) $k \geq 1$ *sabit ve* $n \geq 2$ *için* (k, n) *değerleri* (2.6)*'daki kümenin elemanlarından farklı olmak üzere* (2.3) *denklemi sadece aşikar olmayan bir çözüme sahiptir ve bu da* $(k, n, x, y) = (2, 2, 24, 70)$ *tir.*

2.3 Schäffer'ın Denklemi Hakkındaki Çalışmalar

Son 50 yılda Schäffer'ın denkleminin çeşitli genellemelerinin sonlu çözüme sahip olduğunu ispatlama yönünde çalışmalar yapıldı. (Detaylı bilgi için Brindza(1984), Brindza(1990), Brindza ve Pintér(1996), Brindza ve Pintér(2000), Dilcher (1986), Győry ve Pintér(2003), Győry ve ark. (1980), Kano(1990), Rakaczki (2012), Urbanowitcz(1988), Voorhoeve ve ark. (1987) olmak üzere referanslarda belirtilen kaynaklar incelenebilir.) Bu çalışmalardan hiçbirinde konjektür hakkında bir ilerleme kaydedilmediği için bu çalışmalarla ilgili detaylara değinmeyeceğiz.

Konjektür hakkında ilk ilerleme 2003'te aşağıdaki sonuç ile kaydedildi.

Teorem 2.3.1 (Jacobson, Pintér ve Walsh, 2003) $n = 2$ *ve* $k \leq 58$ *olmak üzere* k*' nın çift değerleri için* (2.3) *denkleminin* $k = 2$ *durumunda aşikar çözümü haricindeki tek çözümü* $(x, y) = (24, 70)$ *tir.*

Bu çalışmada yazarlar k çift ve $n = 2$ iken (2.3)'ün tüm tamsayı çözümlerini bulmak için hesaplamaya dayalı bir yaklaşım kullandılar. (2.3) denkleminin tüm çözümlerini bulmak, n sabit olmadığından daha zor bir problemdir.

2004'te Bennett ve ark. (2004) tarafından, Schäffer'ın konjektürü $k \leq 11$ ve keyfi n için tamamen doğrulandı ve aşağıdaki sonuç verildi.

Teorem 2.3.2 (Bennett, Győry ve Pintér, 2004) $1 \leq k \leq 11$ *için ve* (k, n) *değerleri* (2.6)*'daki kümenin elemanlarından farklı olmak üzere,* $k = 2$ *olmadıkça* (2.3) *denkleminin sadece aşikar çözümü vardır.* $k = 2$ *durumunda ise bu denklemin çözümü sadece* $(n, x, y) = (2, 24, 70)$ *tir.*

11 yıl sonra Schäffer'ın konjektürü hakkında yeni bir ilerleme kaydedildi. 2015'te L.Hajdu tarafından Schäffer'ın konjektürü için olumlu bir cevap niteliğinde bazı sonuçlar verilmiştir.

Teorem 2.3.3 (Hajdu, 2015) $x \equiv 3, 4 \pmod 8$ *olsun. Bu durumda* (2.3) *denkleminin* $k = 1$ *ya da* k *çift için çözümü yoktur. Üstelik*

$$H_1 = \{2\},\ H_2 = \{5, 7\},\ H_3 = \{2, 7, 9, 14\},\ H_4 = \{18, 22\}$$

ve

$$m_1 = 5,\ m_2 = 13,\ m_3 = 17,\ m_4 = 41$$

olmak üzere $h_i \in H_i (i = 1, 2, 3, 4)$ *iken* $x \equiv h_i \pmod{m_i}$ *kongrüanslarından biri sağlanırsa* (2.3) *denkleminin sadece "bilinen çözümleri" vardır.*

m bir pozitif tamsayı olmak üzere "$v_p(m)$ p-sel değerlendirme fonksiyonu m'nin asal çarpanları ayrılışında oluşan p'nin üssü şeklinde tanımlanır. Örneğin $12 = 2^2 3$ olduğundan $v_2(12) = 2$, $v_3(12) = 1$ dir.

Şimdiki sonuç ise (2.3) denkleminde n için üst sınırları veren bağıntıları ifade eder. Bu bağıntılar x'e veya x ve k'ya bağlı v_2 ve v_3 değerlendirme fonksiyonları ile verilir.

Teorem 2.3.4 (Hajdu, 2015)

i) $x \equiv 0, 3 \pmod 4$ *olsun. O zaman* (2.3)*'ün herhangi bir* (k, n, x, y) *çözümü için*

$$n \leq \begin{cases} v_2(x(x+1)) - 1 & , \quad k = 1 \text{ ya da } k \text{ çift ise} \\ 2v_2(x(x+1)) - 2 & , \quad k \geq 3 \text{ ve } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

ii) $x \equiv 0, 8 \pmod 9$ *olsun. O zaman* (2.3)*'ün herhangi bir çözümü için*

$$n \leq \begin{cases} v_3(x(x+1)) & , \quad k = 1 \text{ ise} \\ v_3(x(x+1)(2x+1)) - 1 & , \quad k \text{ çift ise} \\ v_3(kx^2(x+1)^2) - 1 & , \quad k \geq 3 \text{ ve } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir.

Hajdu son olarak Teorem 2.3.4 (i)'ye karşılık gelen x değerleri için (2.3) denkleminin tüm çözümünü aşağıdaki sonuç ile vermiştir. Çünkü amaç $x = 24$ için "bilinen çözüm" $(k, n, x, y) = (2, 2, 24, 70)$'e ulaşmaktır.

Teorem 2.3.5 (Hajdu, 2015) $x \equiv 0, 3 \pmod 4$ *ve* $x < 25$ *olsun. O zaman* (2.3) *denklemi sadece daha önceden bilinen çözümlere sahiptir.*

Hajdu Teorem 2.3.3 - 2.3.5'lerin ispatları için gerekli olan $v_2(S_k(x))$ ve $v_3(S_k(x))$ formüllerini aşağıdaki yardımcı teoremlerle vermiştir.

Yardımcı Teorem 2.3.6 (Hajdu, 2015) x *pozitif tamsayı olmak üzere*

$$v_2(S_k(x)) = \begin{cases} v_2(x(x+1)) - 1 & , \quad k = 1 \ \textit{ya da } k \textit{ çift ise} \\ 2v_2(x(x+1)) - 2 & , \quad k \geq 3 \textit{ ve } k \textit{ tek ise} \end{cases}$$

ile verilir.

Yardımcı Teorem 2.3.7 (Hajdu, 2015) x *pozitif tamsayı olmak üzere*

$$v_3(S_k(x)) = \begin{cases} v_3(x(x+1)) & , \quad k = 1 \textit{ ise} \\ v_3(x(x+1)(2x+1)) - 1 & , \quad k \textit{ çift ise} \\ 0 & , \quad x \equiv 1 \pmod 3, k \geq 3 \textit{ ve } k \textit{ tek ise} \\ v_3(kx^2(x+1)^2) - 1 & , \quad x \equiv 0, 2 \pmod 3, k \geq 3 \textit{ ve } k \textit{ tek ise} \end{cases}$$

ile verilir.

Son zamanlarda Hajdu'nun çalışmasındaki sonuçlar Bérczes ve ark. (2016) tarafından yapılan bir çalışmayla genişletilmiştir. Bu yeni çalışmada şu sonuçlar verilir.

Teorem 2.3.8 (Bérczes, Hajdu, Miyazaki ve Pink, 2016) $x < 25$ *ve* $n \geq 3$ *olmak üzere* k, n, x, y *pozitif tamsayıları için* (2.3) *denkleminin tüm sonuçları*

$$(k, n, x, y) = (k, n, 1, 1), (3, 4, 8, 6)$$

olarak verilir.

Bu teoremden de şu sonuç elde edilmiştir:

Sonuç 2.3.9 (Bérczes, Hajdu, Miyazaki ve Pink, 2016) $x < 25$ *ve* $n \geq 3$ *için Schäffer'ın konjektürü doğrudur.*

3 $(\mathbf{x+1})^{\mathbf{k}} + (\mathbf{x+2})^{\mathbf{k}} + \ldots + (\mathbf{2x})^{\mathbf{k}} = \mathbf{y}^{\mathbf{n}}$ DIOPHANT DENKLEMİ ÜZERİNE

Bu bölüm, başlık denklemi hakkında orijinal sonuçlar içermektedir. Burada

$$T_k(x) = (x+1)^k+(x+2)^k+\ldots+(2x)^k \tag{3.1}$$

olmak üzere

$$T_k(x) = y^n \tag{3.2}$$

Diophant denkleminin tamsayı çözümleri ile ilgileneceğiz. Bu denklemi tamamen çözmek çok zor bir problemdir. Bu sebeple (3.2) denkleminin tamsayı çözümlerine yaklaşmak için atılacak ilk adım n'ye üst sınırlar bulmak, ikinci adım ise x'e üst sınır bulmaktır. Eğer n ve x için uygun üst sınırlar bulunursa son adımda denklemin kısmi çözümleri elde edilebilir.

Bu çalışmada n'ye bağlı üst sınırlar elde edilmiş olup iki adım olan x'e bağlı üst sınırların elde edilmesi bir sonraki hedefimizdir. Bu üst sınırlar yeni tanımlanacak $v_2(T_k(x))$ ve $v_3(T_k(x))$ fonksiyonları ile verilecektir.

3.1 Literatürden Bazı Sonuçlar

Şimdi başlık denkleminden daha genel bir denklemi göz önüne alalım. $k, l \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$T_{k,l}(x) = (x+1)^k+(x+2)^k+\ldots+(lx)^k \tag{3.3}$$

polinomu verilsin. Buna göre

$$T_{k,l}(x) = y^n \tag{3.4}$$

denklemini ele alalım. (3.4) denklemi hakkında ilk çalışma 2013'te, Bai ve Zhang (2013) tarafından yapıldı. Bu çalışmada (3.4) denkleminin $k = l = 2$ durumunu incelendi ve aşağıdaki sonuç verildi.

Teorem 3.1.1 (Bai-Zhang, 2013) *$n > 1$ için (3.4) denkleminin çözümleri $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y, n) = (1, \mp 2, 2)$, $(2 \mp 5, 2)$, $(24, \mp 182, 2)$ ya da $2 \nmid n$ için $(x, y) = (-1, -1)$ dir.*

Son zamanlarda G. Soydan (Soydan 2015) tarafından, (3.4) denklemi l çift iken incelendi ve $n \geq 2$ ve $k \neq 1, 3$ olmak üzere $x, y, k, n \in \mathbb{Z}^+$ için (3.4) denkleminin sonlu tane çözüme sahip olduğu, $k = 1, 3$ iken de sonsuz çoklukta çözüme sahip olduğu ispatlandı.

Teorem 3.1.2 (Soydan, 2015) *$k, l \geq 2$ sabit tamsayılar olsun. $x, y \geq 1$ ve $n \geq 2$ iken* (3.4) *denkleminin tamsayılardaki tüm çözümleri C_1, k'ya bağlı bir sabit olmak üzere $n < C_1$ şeklinde üstten sınırlandırılabilir.*

Teorem 3.1.3 (Soydan, 2015) *$k, l \geq 2$ ve $k \neq 3$ olmak üzere sabit tamsayılar olsun. $x, y \geq 1$, $n \geq 2$ ve l çift iken* (3.4) *denkleminin tamsayılardaki tüm çözümleri C_2, k ve l'ye bağlı bir sabit olmak üzere $maks\{x, y, n\} < C_2$ şeklinde sınırlandırabilir.*

Yukarıda ifade edilen iki sonuç gereği (3.2) denklemi sonlu çoklukta çözüme sahip olduğuna göre n için üst sınırlar bulmaya hazırız. Şimdi denklemimiz hakkında ana sonuçlara ulaşmamızda ihtiyacımız olacak bazı yardımcı teoremler verelim.

3.2 Yardımcı Sonuçlar

(3.2) denkleminin Bernoulli polinomları ile ilişkisi aşağıdaki yardımcı teoremle ifade edilir:

Yardımcı Teorem 3.2.1

$$(x+1)^k + (x+2)^k + \ldots + (2x)^k = \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(2x+1) - B_{k+1}(x+1)) \tag{3.5}$$

İspat. (1.18)'nin bir uygulaması olup detaylı bilgi için Rademacher (1973) sayfa $3-4$'e bakılabilir. ■

Yukarıda verilen yardımcı teoremin bir sonucu olarak $T_k(x)$ polinomunun cebirsel yapısı hakkında aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilir:

Yardımcı Teorem 3.2.2 *$k = 1$ ise $T_1(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ dir. D_k pozitif tamsayı ve $M_k(x)$ tamsayı katsayılı polinom olmak üzere*

(i) $k \geq 2$ ve k çift ise $\quad T_k(x) = \frac{1}{D_k} x(2x+1) M_k(x)$

(ii) $k > 1$ ve k tek ise $\quad T_k(x) = \frac{1}{D_k} x^2(3x+1) M_k(x)$

tir.

İspat. (i) İlk olarak $k \geq 2$ çift için $x = 0$ ve $x = -\dfrac{1}{2}$ nin $T_k(x)$ polinomunun kökleri olduğunu ispatlayalım. (3.5)'ten

$$T_k(x) = \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(2x+1) - B_{k+1}(x+1)) \tag{3.6}$$

olur. (1.31) kullanılarak (3.6)'ya göre $x = 0$ ve $x = -\frac{1}{2}$ nin $T_k(x)$' in kökleri olduğunu görmek kolaydır.

İkinci olarak $x = 0$ ve $x = -\dfrac{1}{2}$ nin $T_k(x)$ polinomunun basit kökleri olduğunu gösterelim. Bernoulli polinomunun bir Appell polinomu olması sebebiyle (1.41)'den

$$\frac{d}{dx}(T_k(x)) = (k+1)(2B_k(2x+1) - B_k(x+1)) \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(T_k(x)) = k(k+1)(4B_{k-1}(2x+1) - B_{k-1}(x+1)) \tag{3.8}$$

olur. k çift ise (1.31)'den $T_k(0) = T_k''(0) = 0 \neq T_k'(0)$ dır. Böylece $x = 0$, $T_k(x)$ in basit köküdür. Benzer şekilde k çift iken (1.30) ve (1.33) kullanılarak $T_k(-\frac{1}{2}) = 0 \neq T_k'(-\frac{1}{2})$ olup $x = -\frac{1}{2}$, $T_k(x)$'in basit köküdür.

(ii) Şimdi $k > 1$ tek için $x = -\dfrac{1}{3}$ ün $T_k(x)$ polinomunun kökü olduğunu ispatlayalım. (1.32) kullanılarak (3.6)'ya göre $x = -\dfrac{1}{3}$ ün kök olduğu açıktır.

(1.32), (1.34), (3.5) ve (3.6) kullanılarak $T_k(-\frac{1}{3}) = 0 \neq T_k'(-\frac{1}{3})$ elde edilir. Böylece k tek iken $x = -\dfrac{1}{3}$, $T_k(x)$ polinomunun tek katlı köküdür. (i)'deki duruma benzer şekilde $x = 0$'ın $T_k(x)$ polinomunun çift katlı kök olduğu gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi 60 yıldan beri çözülememiş kuvvet toplamları tipindeki bir Diophant denklem olan

$$S_k(x) = (x+1)^k \tag{3.9}$$

"Erdős-Moser denklemi" (Moser-1953) ni ele alalım. Erdős ve Moser (3.9) denkleminin sadece $(x, k) = (2, 1)$ aşikar çözümüne sahip olduğunu konjektür olarak ifade etmişlerdir. Bu konjektür "Erdős-Moser" konjektürü olarak bilinir. Konjektür üzerine çok çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Burada konjektür hakkındaki çalışmalardan biri ile ilgili bazı sonuçlara değineceğiz. (Konjektür hakkındaki çalışmalar için Macmillian ve Sondow (2012), Moree (1996), Moree (2013), Moree ve ark. (1994), Moser (1953) kaynaklara bakılabilir.) Son zamanlarda J. Sondow ve E. Tsukerman (2014) "Erdős-Moser denklemi" ile ilgili çalışmalarında kuvvet toplamlarını bölünebilme açısından incelemiş ve ana sonuçlarımızı ispatlamamızda faydalı olacak bazı sonuçlar vermişlerdir.

Yardımcı Teorem 3.2.3 *[Sondow ve Tsukerman (2014), Lemma 1] p bir asal sayı $d, q \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $m_1 \in p^d\mathbb{N}$ ve $m_2 \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda*

$$S_k(qm_1+m_2) \equiv qS_k(m_1)+S_k(m_2) \pmod{p^d} \tag{3.10}$$

denkliği sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.2.4 *[Sondow ve Tsukerman (2014), Teorem 3] p tek asal ve $k, m \in \mathbb{Z}^+$ olsun.*
(i) $d \geq 1$ *tamsayı* $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ *ve* $0 \leq q \not\equiv r \equiv m \pmod{p}$ *olmak üzere*

$$m = qp^d + r\frac{p^d - 1}{p - 1} = qp^d + rp^{d-1} + rp^{d-2} + \ldots + rp^0$$

şeklinde ifade edilebilir.
(ii) $m \equiv 0 \pmod{p}$ *ise*

$$S_k(m) \equiv \begin{cases} -p^{d-1} \pmod{p^d} & , \quad p-1 \mid k \\ 0 \pmod{p^d} & , \quad p-1 \nmid k \end{cases}$$

(iii) $m \equiv -1 \pmod{p}$ *ise*

$$S_k(m) \equiv \begin{cases} -p^{d-1}(q+1) \pmod{p^d} & , \quad p-1 \mid k \\ 0 \pmod{p^d} & , \quad p-1 \nmid k \end{cases}$$

(iv) $m \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$ *ise*

$$S_k(m) \equiv \begin{cases} -p^{d-1}(q+\frac{1}{2}) \pmod{p^d} & , \quad p-1 \mid k \\ 0 \pmod{p^d} & , \quad p-1 \nmid k \end{cases}$$

olur.

3.3 $\mathbf{v_2(T_k(x))}$ ve $\mathbf{v_3(T_k(x))}$ İçin Formüller

Hajdu, Schäffer'ın konjektürünü doğrulamak için (2.3) denkleminde n için üst sınırları, tezin ikinci bölümünde Yardımcı Teorem 2.3.6 ve 2.3.7'da tanımlanan $v_2(S_k(x))$ ve $v_3(S_k(x))$ bağıntıları ile vermiştir. Biz de çalışmamızda (3.2) denkleminde n'ye üst sınırlar bulmak için $v_2(T_k(x))$ ve $v_3(T_k(x))$ bağıntılarını tanımlayacağız. Bu bağıntılar yardımıyla denklemimizin tamsayı çözümleri hakkında önemli sonuçlar elde edeceğiz. Şimdi $v_2(T_k(x))$ ve $v_3(T_k(x))$ bağıntılarını ifade edelim.

Yardımcı Teorem 3.3.1 $q, k, t \geq 1$ *ve* $q \equiv 1 \pmod{2}$ *için*

$$v_2(T_k(2^t q)) = \begin{cases} t-1 & , \quad k = 1 \text{ ya da k çift ise} \\ 2t-2 & , \quad k \geq 3 \text{ ve } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. Burada Macmillian ve Sondow (2012)'un çalışmasındaki Lemma 1'in ispatını takip edeceğiz. t üzerinden tümevarım yapalım.

$$T_k(x) = S_k(2x) - S_k(x) \tag{3.11}$$

eşitliği kolaylıkla elde edilebilir. Bu eşitlik çalışmamızda sık sık kullanılacaktır. (3.11)'den $S_k(2^2q)$ çift ve $S_k(2q)$ tek olduğundan $v_2(T_k(2q)) = 0$ dır ve böylece $t = 1$ için ispat tamamlanır. Ayrıca $x = 2^tq$ ve Yardımcı Teorem 3.2.2 ile $k = 1$ olduğunda tüm $t \geq 1$ için sağlanır. Şimdi $t \geq 1$ sabitleri için (3.11) eşitliğinin doğru olduğunu varsayalım. m bir pozitif tamsayı olmak üzere $S_k(2m)$ kuvvet toplamını

$$\begin{aligned} S_k(2m) = m^k + \sum_{j=1}^{m}((m-j)^k + (m+j)^k) &= m^k + 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}m^{k-2i}j^{2i} \\ &= m^k + 2\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}m^{k-2i}S_{2i}(m) \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.11)'de $x = m$ alınırsa

$$T_k(m) = S_k(2m) - S_k(m) \tag{3.13}$$

olur. Şimdi $m = 2^tq$ için (3.13)'ü göz önüne alalım. Eğer $k \geq 2$ çift ise $S_k(2m)$ ve $S_k(m)$'in toplamlarının son terimini alalım. Bu durumda

$$S_k(2^{t+1}q) = 2^{kt}q^k + 2^t\frac{S_k(2^tq)}{2^{t-1}} + 2^{2t+1}\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\binom{k}{2i}2^{t(k-2i-2)}q^{k-2i}S_{2i}(2^tq)$$

ve

$$S_k(2^tq) = 2^{k(t-1)}q^k + 2^{t-1}\frac{S_k(2^{t-1}q)}{2^{t-2}} + 2^{2t-1}\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\binom{k}{2i}2^{(t-1)(k-2i-2)}q^{k-2i}S_{2i}(2^{t-1}q)$$

olur ve böylece

$$T_k(2^tq) = 2^{k(t-1)}q^k(2^k-1) + 2^{t-1}\left[2\frac{S_k(2^tq)}{2^{t-1}} - \frac{S_k(2^{t-1}q)}{2^{t-2}}\right]$$
$$+2^{2t+1}\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\binom{k}{2i}2^{t(k-2i-2)}q^{k-2i}S_{2i}(2^tq)$$
$$-2^{2t-1}\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\binom{k}{2i}2^{(t-1)(k-2i-2)}q^{k-2i}S_{2i}(2^{t-1}q)$$

elde edilir. Tümevarım hipoteziyle, kesir aslında tek tamsayıdır. $k(t-1) > t-1$ olduğundan $v_2(T_k(2^tq) = t-1$ olur.

Şimdi $k \geq 3$ tek durumunu göz önüne alalım. Benzer şekilde

$$S_k(2^{t+1}q) = 2^{tk}q^k + 2^{2t}kq\frac{S_{k-1}(2^tq)}{2^{t-1}} + 2^{3t+1}\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k}{2i}2^{t(k-2i-3)}q^{k-2i}S_{2i}(2^tq)$$

ve

$$S_k(2^tq) = 2^{k(t-1)}q^k + 2^{2t-2}kq\frac{S_{k-1}(2^{t-1}q)}{2^{t-2}} + 2^{3t-2}\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k}{2i}2^{(t-1)(k-2i-3)}q^{k-2i}S_{2i}(2^{t-1}q)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} T_k(2^tq) &= 2^{k(t-1)}q^k(2^k-1) + 2^{2t-2}kq\left[\frac{2^2S_{k-1}(2^tq)}{2^{t-1}} - \frac{S_{k-1}(2^{t-1}q)}{2^{t-2}}\right] \\ &+2^{3t+1}\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k}{2i}2^{t(k-2i-3)}q^{k-2i}S_{2i}(2^tq) \\ &-2^{3t-2}\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k}{2i}2^{(t-1)(k-2i-3)}q^{k-2i}S_{2i}(2^{t-1}q) \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar tümevarımla, kesirin tek tamsayı olduğu görülür. $k(k-1) > 2(t-2)$ olup k ve q tek olduğundan $v_2(T_k(2^tq) = 2t-2$ olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Yardımcı Teorem 3.3.2 (i) *x bir pozitif çift tamsayı olsun. Bu durumda*

$$v_2(T_k(x)) = \begin{cases} v_2(x)-1 & , \quad k = 1 \text{ ya da } k \text{ çift ise} \\ 2v_2(x)-2 & , \quad k \geq 3 \text{ ve } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur.

(ii) x bir pozitif tek tamsayı olsun. Eğer $k = 1$ ise (3.2)'nin herhangi (k, n, x, y) çözümü için $v_2(T_k(x)) = v_2(3x + 1) - 1$ dir.
Eğer $x \equiv 1, 5 \pmod 8$ ve $k \neq 1$ iken $x \not\equiv 1 \pmod{32}$ ise bu durumda

$$v_2(T_k(x)) = \begin{cases} v_2(7x+1) - 1 & , \ x \equiv 1 \pmod 8 \text{ ve } k = 2 \text{ ise} \\ v_2((5x+3)(3x+1)) - 2 & , \ x \equiv 1 \pmod 8 \text{ ve } k = 3 \text{ ise} \\ v_2(3x+1) & , \ x \equiv 5 \pmod 8, k \geq 3 \text{ ve } k \text{ tek ise} \\ 1 & , \ x \equiv 5 \pmod 8, k \geq 2 \text{ ve } k \text{ çift ise} \\ 2 & , \ x \equiv 9 \pmod{16}, k \geq 4 \text{ ve } k \text{ çift ise} \\ 3 & , \ x \equiv 9 \pmod{16}, k \geq 5 \text{ ve } k \text{ tek ise} \\ & \ \ \text{ya da} \\ & \ \ x \equiv 17 \pmod{32}, k \geq 4 \text{ ve } k \text{ çift ise} \\ 4 & , \ x \equiv 17 \pmod{32}, k \geq 5 \text{ ve } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

olup $x \equiv 3, 7 \pmod 8$ ise bu durumda (3.2)'nin herhangi (k, n, x, y) çözümü için $v_2(T_k(x)) = 0$ elde edilir.

İspat. (i) İlk olarak, eğer $k \geq 2$ çift ise $2x + 1$ daima tek olduğundan,

$$v_2\left(\frac{x(2x+1)}{2}\right) = v_2(x) - 1$$

dir. Burada q tek ve $t \geq 1$ olmak üzere $x = 2^t q$ yazarsak

$$v_2\left(\frac{2^t q(2^{t+1}q + 1)}{2}\right) = v_2(2^{t-1}q) = t - 1$$

olur.

İkinci olarak $k \geq 3$ tek durumu göz önüne alınırsa

$$v_2\left(\frac{x^2(3x+1)}{4}\right) = v_2(x^2) - 2$$

olup burada $x = 2^t q$ yazarsak

$$v_2((2^t q)^2) - 2 = v_2(2^{2t}) - 2 = 2t - 2$$

olur.

Son olarak $k = 1$ durumunda

$$v_2\left(\frac{x(3x+1)}{2}\right) = v_2(x) - 1$$

olur. Burada $x = 2^t q$ için

$$v_2(2^t q) - 1 = t - 1$$

olup ispat tamamlanır.

(ii) x bir pozitif tamsayı olmak üzere $k = 1, 2, 3$ için sırasıyla $S_1(x) = \frac{x(x+1)}{2}$, $S_2(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$, $S_3(x) = \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$ olduğundan (3.11)'den x tek ya da $x \equiv 1 \pmod 8$ için ifade direkt sağlanır.

$k \geq 3$ tek ve $x \equiv 5 \pmod 8$ durumu göz önüne alınırsa $3x + 1 \equiv 0 \pmod 8$ olduğundan $d \geq 3$ ve $2 \nmid r$ olmak üzere $3x + 1 = 2^d r$ biçimindedir. Böylece

$$v_2(3x+1) = d \tag{3.14}$$

olur. x tek olduğundan $T_k(x)$ tek sayıda terime sahiptir. (3.1)'de $x = \frac{2^d r-1}{3}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} T_k\left(\frac{2^d r - 1}{3}\right) = (\frac{1}{3})^k[(2^d r + 2)^k + (2^d r + 5)^k + \ldots + (32^{d-1} r)^k + \ldots \\ +(2^{d+1} r - 5)^k + (2^{d+1} r - 2)^k] \end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. Burada $(32^{d-1} r)^k$ açılımdaki orta terimdir. $k(d-1) > d$ olduğundan (3.15) denklemi 2^d moduna göre düşünüldüğünde, $T_k(\frac{2^d r-1}{3}) \equiv 0 \pmod{2^d}$ elde edilir. Bu durumda $2 \nmid t$ olmak üzere $v_2(T_k(\frac{2^d r-1}{3})) = v_2(2^d t) = d$ olur.

Şimdi $k \geq 2$ çift ve $x \equiv 5 \pmod 8$ durumunu göz önüne alalım. Burada iki durum söz konusudur. İlk olarak $k \geq 4$ çift olsun.

$$Q_k(x) = x^k + (x+1)^k + (x+2)^k + \ldots + 2^k (x-1)^k \tag{3.16}$$

polinomu ve

$$T_k(x) = Q_k(x) - x^k + (2x-1)^k + (2x)^k \tag{3.17}$$

eşitliğinden

$$T_k(x) \equiv Q_k(x) \pmod 8$$

olup

$$v_2(T_k(x)) = v_2(Q_k(x)) \tag{3.18}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.3.2'un (i) durumuna göre $v_2(Q_k(x)) = v_2(x-1) - 1$ dir ve böylece istenen durum sağlanır. İkinci olarak $k = 2$ için (3.11)'den $v_2(T_k(x)) = v_2(7x+1) - 1 = 1$ olur.

$k \geq 5$ tek ve $x \equiv 9 \pmod{16}$ durumunu göz önüne alalım. (3.17)'den

$$T_k(x) \equiv Q_k(x){+}8 \pmod{16} \tag{3.19}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.3.2 (i) ile $v_2(Q_k(x)) = 2v_2(x-1) - 2$ bulunur. Böylece $v_2(Q_k(x)) = 4$ ve

$$Q_k(x) = 2^4 t, \quad 2 \nmid t \tag{3.20}$$

olur. (3.19) ve (3.20)'den bu durumun ispatı tamamlanır.

$k \geq 4$ çift ve $x \equiv 9 \pmod{16}$ durumunu göz önüne alalım. (3.17)'den

$$T_k(x) \equiv Q_k(x) \pmod{16} \tag{3.21}$$

elde edilir. Yardımcı teorem 3.3.2 (i) kullanılarak $v_2(Q_k(x)) = v_2(x-1) - 1$ sonucuna ulaşılır. Böylece (3.21) ile $v_2(T_k(x)) = v_2(Q_k(x)) = 2$ olur.

$k \geq 4$ çift ve $x \equiv 17 \pmod{32}$ durumunu göz önüne alalım. Burada iki durum söz konusudur. İlk olarak $k = 4$ olduğunda

$$T_4(x) \equiv Q_4(x) + 16 \pmod{32} \tag{3.22}$$

olur. Yardımcı teorem 3.3.2 (i) yi kullanarak

$$Q_4(x) = 2^3 r, 2 \nmid r \tag{3.23}$$

olup $v_2(Q_4(x)) = 3$ sonucuna ulaşılır.
(3.22) and (3.23) kullanılarak $v_2(T_4(x)) = 3$ elde edilir. İkinci olarak $k \geq 6$ çift durumunda ise (3.17)'den

$$T_k(x) \equiv Q_k(x) \pmod{32}$$

elde edilir. Benzer şekilde $v_2(T_k(x)) = 3$ olur.

$k \geq 5$ tek ve $x \equiv 17 \pmod{32}$ durumunda (3.17) kullanılarak

$$T_k(x) \equiv Q_k(x){+}16 \pmod{32} \tag{3.24}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.3.2 (i)'den $v_2(Q_k(x)) = 6$ olup (3.24) ile $v_2(T_k(x)) = 4$ bulunur.

$x \equiv 3 \pmod{8}$ iken (3.17) kullanılarak sırasıyla

$$T_k(x) \equiv Q_k(x) + 2 \pmod{8}$$

ya da

$$T_k(x) \equiv Q_k(x) \pmod 8$$

elde edilir. Her iki durumdada Yardımcı Teorem 3.3.2'dan $v_2(Q_k(x)) = 0$ olur.

$x \equiv 7 \pmod 8$ iken (3.17) kullanılarak sırasıyla

$$T_k(x) \equiv Q_k(x) + 6 \pmod 8$$

ya da

$$T_k(x) \equiv Q_k(x) + 2 \pmod 8$$

elde edilir. Her iki durumda da Yardımcı Teorem 3.3.2'dan $v_2(Q_k(x)) = 0$ olur.

Böylece Yardımcı Teoremin ispatı tamamlanır. ■

Yardımcı Teorem 3.3.3 $x \equiv 5 \pmod 9$ *olduğunda k çift olmasın. Bu durumda*

$$v_3(T_k(x)) = \begin{cases} v_3(x) & , \ k = 1 \textit{ ise} \\ v_3(x) - 1 & , \ x \equiv 0 \pmod 3, k \geq 2 \textit{ ve } k \textit{ çift ise} \\ v_3(kx^2) & , \ x \equiv 0 \pmod 3, k > 3 \textit{ ve } k \textit{ tek ise} \\ v_3(x^2(5x+3)) & , \ x \equiv 0 \pmod 3) \textit{ ve } k = 3 \textit{ ise} \\ 0 & , \ x \equiv \pm 1 \pmod 3, k \geq 3 \textit{ ve } k \textit{ tek ise} \\ 0 & , \ x \equiv 2, 8 \pmod 9, k \geq 2 \textit{ ve } k \textit{ çift ise} \\ v_3(2x+1) - 1 & , \ x \equiv 1 \pmod 3, k \geq 2 \textit{ ve } k \textit{ çift ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. $k = 1$ iken $T_1(x) = \frac{x(3x+1)}{2}$ olup bu durum direkt olarak sağlanır.

$k \geq 2$ çift ve $x \equiv 0 \pmod 3$ iken (3.10)'daki bağıntı $p = 3$ için göz önüne alınırsa

$$S_k(2x) \equiv 2S_k(x) \pmod{3^d} \tag{3.25}$$

olur. (3.11), 3^d moduna göre düşünüldüğünde (3.25) ile birlikte

$$T_k(x) \equiv S_k(x) \pmod{3^d} \tag{3.26}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.2.4 (ii) ve (3.19)'u kullanarak $T_k(x) \equiv -3^{d-1}q \pmod{3^d}$ bulunur ve böylece $v_3(T_k(x)) = d - 1$ elde edilir. Bu da istenen durumdur.

$k > 3$ tek ve $x \equiv 0 \pmod 3$ olsun. $k = 3^\gamma k'$ ve $q \nmid 3$ için $x = q3^d$ olmak üzere Yardımcı Teorem 2.3.7'dan

$$v_3(S_k(2x)) = v_3(S_k(x)) = \gamma + 2d - 1 \tag{3.27}$$

olur. (3.11) ve (3.27)'yi kullanarak

$$T_k(x) \equiv 0 \pmod{3^{\gamma+2d}}$$

bulunur ve böylece

$$v_3(T_k(x)) = v_3(kx^2) = \gamma + 2d$$

sonucuna ulaşılır.

$k = 3$ ve $x \equiv 0 \pmod 3$ iken $T_3(x) = \frac{x^2(5x+3)(3x+1)}{4}$ tür. $3x + 1 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan, bu durumda istenen sağlanır.

$k \geq 3$ tek ve $x \equiv 1 \pmod 3$ olduğunda Yardımcı Teorem 2.3.7'dan $v_3(S_k(2x)) = v_3(kx^2(x+1)^2) - 1$ ve $v_3(S_k(x)) = 0$ bulunur. (3.11)'den istenen durum sağlanır.

$k \geq 3$ tek ve $x \equiv 2 \pmod 3$ olduğunda Yardımcı Teorem 2.3.7'dan benzer şekilde (3.12) ile $v_3(T_k(x)) = 0$ bulunur.

$k \geq 2$ çift ve $x \equiv 8 \pmod 9$ ya da $x \equiv 2 \pmod 9$ olduğunda Yardımcı Teorem 2.3.7 ve (3.11)'i kullanılarak sırasıyla $v_3(S_k(2x)) = v_3(2x(2x+1)(4x+1)) - 1$ ya da $v_3(S_k(2x)) = v_3(x(x+1)(2x+1)) - 1$ elde edilir.
Eğer $x \equiv 8 \pmod 9$ ise bu durumda $v_3(S_k(2x)) = 0$ olur ve böylece $v_3(T_k(x)) = v_3(S_k(2x))$ elde edilir.
$x \equiv 2 \pmod 9$ olduğunda $v_3(S_k(x)) = 0$ olur ve böylece
$v_3(T_k(x)) = v_3(S_k(x))$ elde edilir.

Şimdi $k \geq 2$ çift ve $x \equiv 1 \pmod 3$ olsun. Yardımcı Teorem 3.2.4 (iv)'e göre (3.12) ile birlikte

$$T_k(x) \equiv 3^{d-1}(-\frac{1}{2}) \pmod{3^d}$$

elde edilir ve böylece $v_3(T_k(x)) = d - 1$ olur. Yardımcı Teorem 3.2.4'ye göre
$r \equiv 1 \pmod 3$, $0 \leq q \not\equiv r \equiv x \pmod 3$ olup $x = q3^d + r\frac{3^d-1}{2}$ yazılır. Böylece $2x + 1 = 3^d(2q + 1)$ elde edilir. $v_3(2x + 1) - 1 = d - 1$ olduğundan istenen sağlanır. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.4 Ana Sonuçlar

Bölüm 3.3'te $v_2(T_k(x))$ ve $v_3(T_k(x))$ bağıntıları elde edildi. Şimdi bu bağıntılar yardımıyla (3.2) denkleminde n için üst sınır bağıntılarını verebiliriz.

Teorem 3.4.1 (i) $x \equiv 0 \pmod 4$ *olsun. Bu durumda* (3.2) *denkleminin* (k, n, x, y) *çözümleri için*

$$n \leq \begin{cases} v_2(x) - 1 & , \quad k = 1 \text{ ya da } k \text{ çift ise} \\ 2v_2(x) - 2 & , \quad k \geq 3 \text{ ve } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur.

(ii) $x \equiv 1 \pmod 4$ *ve* $k = 1$ *olsun. Bu durumda* (3.2) *denkleminin* (k, n, x, y) *çözümleri için* $n \leq v_2(3x+1) - 1$ *dir.*

Varsayalım ki $x \equiv 1, 5 \pmod 8$ *ve* $k \neq 1$ *ile* $x \not\equiv 1 \pmod{32}$ *olsun. Bu durumda* (3.2) *denkleminin* (k, n, x, y) *çözümleri için*

$$n \leq \begin{cases} v_2(7x+1) - 1 & , \ x \equiv 1 \pmod 8 \ \textit{ve } k = 2 \textit{ ise} \\ v_2((5x+3)(3x+1)) - 2 & , \ x \equiv 1 \pmod 8 \ \textit{ve } k = 3 \textit{ ise} \\ v_2(3x+1) & , \ x \equiv 5 \pmod 8, \ k \geq 3 \textit{ ve } k \textit{ tek ise} \\ 1 & , \ x \equiv 5 \pmod 8, \ k \geq 2 \textit{ ve } k \textit{ çift ise} \\ 2 & , \ x \equiv 9 \pmod{16}, \ k \geq 4 \textit{ ve } k \textit{ çift ise} \\ 3 & , \ x \equiv 9 \pmod{16}, \ k \geq 5 \textit{ ve } k \textit{ tek ise} \\ & \quad \textit{ya da} \\ & \quad x \equiv 17 \pmod{32}, \ k \geq 4 \textit{ ve } k \textit{ çift ise} \\ 4 & , \ x \equiv 17 \pmod{32}, \ k \geq 5 \textit{ ve } k \textit{ tek ise} \end{cases}$$

üst sınırları verilir.

(iii) $x \equiv 0 \pmod 3$ *ve* $k \geq 3$ *tek veya* $x \equiv 0, 1 \pmod 3$ *ve* $k \geq 2$ *çift olsun. Bu durumda* (3.2) *denkleminin* (k, n, x, y) *çözümleri için*

$$n \leq \begin{cases} v_3(x) & , \ x \equiv 0 \pmod 3 \ \textit{ve } k = 1 \textit{ ise} \\ v_3(x) - 1 & , \ x \equiv 0 \pmod 3, \ k \geq 2 \textit{ ve } k \textit{ çift ise} \\ v_3(kx^2) & , \ x \equiv 0 \pmod 3, \ k > 3 \textit{ ve } k \textit{ tek ise} \\ v_3(x^2(5x+3)) & , \ x \equiv 0 \pmod 3 \ \textit{ve } k = 3 \textit{ ise} \\ v_3(2x+1) - 1 & , \ x \equiv 1 \pmod 3, \ k \geq 2 \textit{ ve } k \textit{ çift ise} \end{cases}$$

üst sınırları verilir.

Uyarı 3.4.2 *Teorem 3.4.1* (ii)*'de* $x \equiv 1 \pmod{32}$ *ve* $k \neq 1$ *durumu ile Teorem 3.4.1* (iii)*'de* $x \equiv 5 \pmod 9$ *ve* $k \geq 2$ *çift durumu* v_2 *ve* v_3 *fonksiyonları ile formülleştirilemez. Dolayısıyla* (3.2) *denkleminde* n *üssü için* x*'in* v_2 *ve* v_3 *fonksiyonları cinsinden bir üst sınır bulunamaz.*

Teorem 3.4.3 $x \equiv 1, 4 \pmod 8$ *olsun. Bu durumda* $k = 1$ *için* (3.2) *denkleminin çözümü yoktur. Eğer* $x \equiv 4, 5 \pmod 8$ *ise* $k \geq 2$ *ve* k *çift için* (3.2) *denkleminin çözümü yoktur.*

3.5 Ana Sonuçların İspatları

Şimdi ana sonuçları ispatlamaya hazırız. Ana sonuçların ispatlarında en önemli argümanlar Yardımcı Teorem 3.3.2 ve Yardımcı Teorem 3.3.3 olacaktır.

Teorem 3.4.1'in İspatı. (i) $x \equiv 0 \pmod 4$ olduğunda Yardımcı Teorem 3.3.2'ye göre $v_2(T_k(x)) > 0$ dır, yani $T_k(x)$ çifttir. Böylece (3.2) sağlanırsa $v_2(y) > 0$ olur ve bu durumdaki teorem ifadesi sağlanarak

$$nv_2(y) = v_2(y^n) = v_2(T_k(x)) = \begin{cases} v_2(x) - 1 & , \quad k \text{ çift ise} \\ 2v_2(x) - 2 & , \quad k \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

(ii) $x \equiv 1, 5 \pmod 8$ ve $k \neq 1$ iken $x \not\equiv 1 \pmod{32}$ olduğunda Yardımcı Teorem 3.3.2 (ii), $v_2(T_k(x)) > 0$ oluşunu gerektirir. Böylece (3.2)'den $v_2(y) > 0$ bulunur ve

$$nv_2(y) = v_2(y^n) = v_2(T_k(x))$$

elde edilir. Buradan

$$v_2(T_k(x)) = \begin{cases} v_2(7x+1) - 1 & , \quad x \equiv 1 \pmod 8) \text{ ve } k = 2 \text{ ise} \\ v_2((5x+3)(3x+1)) - 2 & , \quad x \equiv 1 \pmod 8 \text{ ve } k = 3 \text{ ise} \\ v_2(3x+1) & , \quad x \equiv 5 \pmod 8,\ k \geq 3 \textit{ ve } k \text{ tek ise} \\ 1 & , \quad x \equiv 5 \pmod 8,\ k \geq 2 \textit{ ve } k \text{ çift ise} \\ 2 & , \quad x \equiv 9 \pmod{16},\ k \geq 4 \textit{ ve } k \text{ çift ise} \\ 3 & , \quad x \equiv 9 \pmod{16},\ k \geq 5 \textit{ ve } k \text{ tek ise} \\ & \quad\ \text{ya da} \\ & \quad\ x \equiv 17 \pmod{32},\ k \geq 4 \textit{ ve } k \text{ çift ise} \\ 4 & , \quad x \equiv 17 \pmod{32},\ k \geq 5 \textit{ ve } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur. Ve eğer $x \equiv 1 \pmod 4$ ve $k = 1$ ise Yardımcı Teorem 3.3.2 (ii) $v_2(T_k(x)) > 0$ oluşunu gerektirir. Böylece (3.2)'den $v_2(y) > 0$ bulunur ve $nv_2(y) = v_2(y^n) = v_2(T_k(x)) = v_2(3x+1) - 1$ elde edilir. Bu durumda da teorem ifadesi gerçeklenir. Böylece (ii)'nin ispatı tamamlanır.

(iii) Varsayalım ki k tek iken $x \equiv 0 \pmod 3$ veya $k \geq 2$ çift iken $x \equiv 0, 1 \pmod 3$ olsun. Yardımcı Teorem 3.3.3'dan $v_3(y) > 0$ olduğu görülür ve

$$nv_3(y) = v_3(y^n) = v_3(T_k(x))$$

$$v_3(T_k(x)) = \begin{cases} v_3(x) & , \quad k = 1 \text{ ise} \\ v_3(x) - 1 & , \quad x \equiv 0 \pmod 9, \ k \geq 2 \textit{ ve } k \text{ çift ise} \\ v_3(kx^2) & , \quad x \equiv 0 \pmod 3, \ k > 3 \textit{ ve } k \text{ tek ise} \\ v_3(x^2(5x+3)) & , \quad x \equiv 0 \pmod 3 \text{ ve } k = 3 \text{ ise} \\ v_3(2x+1) - 1 & , \quad x \equiv 4 \pmod 9, \ k \geq 2 \textit{ ve } k \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.4.1'in ispatı tamamlanır. ■

Teorem 3.4.3'ün İspatı. $x \equiv 4 \pmod 8$ olduğunda $v_2(T_k(x)) = v_2(x) - 1 = 1$ dir. Böylece $k = 1$ ya da k çift olduğunda Teorem 3.4.1 (i)'den dolayı $n \leq 1$ olur ve bu ise imkansızdır.

$x \equiv 5 \pmod 8$ olduğunda $v_2(T_k(x)) = 1$ dir. Böylece $k \geq 2$ çift olduğunda Teorem 3.4.1 (ii)'den dolayı $n \leq 1$ olur ve bu da imkansızdır.

$x \equiv 1 \pmod 8$ iken $v_2(T_k(x)) = v_2(3x+1) - 1 = 1$ olur. Böylece $k = 1$ ise Teorem 3.4.1 (ii)'den dolayı $n \leq 1$ olur ve yine bu da imkansızdır. Böylece ispat tamamlanır. ■

KAYNAKLAR

Abramowitz, M., Stegun, I.A. 1965. Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York.

Appell, P. E. 1880. Sur une classe de polynomes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 9 (2), 119-144.

Arakawa, T., Ibukiyama, T., Kaneko, M. 2014. Bernoulli Numbers and Zeta Functions, Springer-Verlag, Japan.

Bai, M., Zhang, Z. 2013. On the Diophantine equation $(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+d)^2 = y^n$, *Functiones Approx. Com. Math.* **49** No 1, 73-77.

Bernoulli, J. 1975. Ars Conjectandi, in Werke, cilt 3, Birkhäuser.

Biggs, N. L. 1989. Discrete Mathematics, *Oxford Science Publications*.

Brindza, B. 1984. On some generalizations of the diophantine equation $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^z$, *Acta Arith.* **44** 99-107.

Brindza, B. 1984. On S-integral solutions of the equation $y^m = f(x)$, *Acta Math. Hung.* **44**, 133-139.

Brindza, B. 1990. Power values of sum $1^k + 2^k + \ldots + x^k$, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai vol. 51 , *North-Holland Publ. Comp.*, 595-603.

Brindza, B., Pintér, A. 1996. On equal values of power sums, *Acta Arith.* **77**, 97-101.

Brindza, B., Pintér, A. 2000. On the number of solutions of the equation $1^k + 2^k + \ldots + (x-1)^k = y^z$, *Publ. Math. Debrecen* **56**, 271-277.

Bennett, M. A., Győry, K., Pintér, A. 2004. On the Diophantine equation $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^n$, *Compositio Math.* **140**, 1417-1431.

Bérczes, A., Hajdu, L., Miyazaki, T., Pink, I. 2016. On the equation $1^k+2^k+\ldots+x^k = y^n$ for fixed x, *Journal of Number Theory* **163**, 43-60.

Dilcher, K. A Bibliography of Bernoulli Numbers,
http://www.mscs.dal.ca/ dilcher/bernoulli.html.

Dilcher, K. 1986. On a Diophantine involving quadratic characters, *Compositio Math.* **57**, 383-403.

Gerstein, L. J. 2012. Introduction to Mathematical Structures and Proofs, *Springer Publishing*.

Győry, K., Pintér, A. 2003. On the equation $1^k + 2^k + \ldots + x^k$, *Publ. Math. Debrecen* **62**, 403-414.

Győry, K., Tijdeman, R., Voorhoeve, M. 1980. On the equation $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^z$, *Acta Arith.* **37**, 234-240.

Hajdu, L., 2015. On a conjecture of Schäffer concerning the equation $1^k+2^k+\ldots+x^k = y^n$, *Journal of Number Theory* **155**, 129-138.

Ireland, K., Rosen, M. 1990. A Classical Introduction to Modern Number Theory, Springer-

Verlag, New York.
Jacobi, C.G.J. 1834. De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae. *J. Reine Angew. Math.* **12**, 263–272.
Jacobson, M., Pintér, A., Walsh, P.G. 2003. A computational approach for solving $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^2$, *Math. Comp.* **72**, 244 2099-2110.
Kano, H. 1990. On the Equation $s(1^k + 2^k + \ldots + x^k) + r = by^z$, *Tokyo J. Math* **13**, 441-448.
Lucas, E. 1875. Problem 1180, *Nouvelles Ann.Math.* **14**, 336.
Lucas, E. 1877. Solution de Question 1180, *Nouvelles Ann. Math* **16**, 429-432.
Macmillian, K., Sondow, J. 2012. Divisibility of power sums and the generalized Erdős-Moser equation, *Elem. Math.* **67**, 182-186.
Moree, P. 1996. Diophantine equations of Erdős- Moser type, *Bull. Austral. Math.* Soc **53**, 281-292.
Moree, P. 2013. Moser's Mathemagical work on the equation $1^k + 2^k + \ldots + (m-1)^k = m^k$, *Rock Mountain J. Math.* **43** (2013), 1707-1737; also available
at http://arxiv.org/abs/1011.2940.
Moree, P., Te Riele, H., Urbanowicz, J. 1994. Divisibility properties of integers x, k satisfying $1^k + 2^k + \ldots + (x-1)^k = x^k$, *Math. Comp.* **63**, 799-815.
Moret-Blanc, 1876. M. Question 1180, *Nouvelles Ann. Math.* Ser. 2 **15**, 46-48.
Moser, L. 1953. On the Diophantine equation $1^n + 2^n + \ldots + (m-1)^n = m^n$, *Scripta Math.* **19**, 84-88.
Rademacher, H. 1973. Topics in Analytic Number Theory, Springer-Verlag, Berlin.
Rakaczki, C. 2012. On some generalizations of the Diophantine equation $s(1^k + 2^k + \ldots + x^k) + r = dy^n$, *Acta Arith.* **151**, 201-216.
Schäffer, J.J. 1956. The equation $1^p + 2^p + \ldots + n^p = m^q$, *Acta Math.* **95**, 155-189.
Seki, T. 1974. T.: Collected works of Takakazu Seki. In: Hirayama, A., Shimodaira, K., Hirose, H.(eds.),Osaka Kyouiku Tosho.
Soydan, G. 2015. On the Diophantine equation $(x+1)^k + (x+2)^k + \ldots + (lx)^k = y^n$, (2015), *yayına sunuldu.*
Sondow, J., Tsukerman, E. 2014. The p-adic order of power sums, the Erdős-Moser equation and Bernoulli numbers, arXiv:1401.0322v1 [math.NT].
Urbanowitcz, J. 1988. On the equation $f(1)1^k + f(2)2^k + \ldots + f(x)x^k + R(x) = by^z$, *Acta Arith.* **51**, 349-368.
Voorhoeve, M., Győry, K., Tijdeman, R. 1987. On the equation $1^k + 2^k + \ldots + x^k + R(x) = y^z$, *Acta Math.* **143** (1979), 1-8; Corrigendum, *Acta Math.* **159**, 151-152.
Watson, G.N. 1918. The problem of the square pyramid, *Messenger of Math.* **48**, 1-22.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Gamze SAVAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	BURSA, 16.06.1990
Yabancı Dil	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Yıldırım Beyazıt Lisesi, 2005-2009
Lisans	:	Uludağ Üniversitesi, 2010-2013
Yüksek Lisans	:	Uludağ Üniversitesi, 2014-2016

İletişim(e–posta)	:	gamzesavas91@gmail.com