



OPERATÖRÜ VE NARUMI-KATAYAMA İNDEKSİ

MERVE AŞÇIOĞLU



T. C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPLAM OPERATÖRÜ VE NARUMI-KATAYAMA İNDEKSİ

Merve AŞÇIOĞLU

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2016

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Merve AŞÇIOĞLU tarafından hazırlanan “Toplam Operatörü ve Narumi-Katayama İndeksi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Üye: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

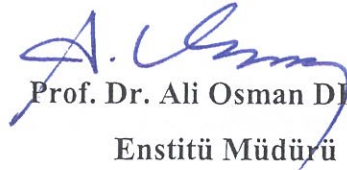
Üye: Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım


Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü

U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

02/06/2016

İmza

Merve AŞÇIOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPLAM OPERATÖRÜ VE NARUMI-KATAYAMA İNDEKSİ

Merve AŞÇIOĞLU

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu çalışmanın amacı graf teorik metodlarla kimyasal uygulamalarda kullanılan bir sabit sayıyı, matematiksel formüllerle ifade ederek özel graflar üzerinde hesaplamalar yapmak, bu sayılar ile olası graflar arasında ilişkiler oluşturmak ve toplam operatörü üzerinden graflar arasında Narumi-Katayama indeksi ile ilişkiler kurmaktır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. Grafın tanımı, tarihçesi, bazı özel graflar ve özellikleri ve daha önce literatürde olmayan yeni isimlendirilmiş bazı graf türleri verilmiştir. Bu bilgiler, tez boyunca kullanılacaktır. İkinci bölümde literatürde sık kullanılan özel graflar için Narumi-Katayama indeksi hesaplanmıştır ve genelleştirilerek teorem haline getirilmiştir. Üçüncü bölümde iki graf toplamının Narumi-Katayama indeksleri hesaplanarak Azari, [Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations, 2014]'de verilen teoreme dayalı olarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise Narumi-Katayama indeksi, verilen bir sayıya eşit olan olası grafların sayıları hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Graf, Topolojik İndeks, Narumi-Katayama İndeksi, Toplam Operatörü

2016, ix + 52 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

JOIN OPERATION AND NARUMI-KATAYAMA INDEX

Merve AŞÇIOĞLU

Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL (Uludag University)

The aim of this work is to make some calculations with some special graph classes by stating a mathematical invariant used in chemical applications by several formulae and using graph theoretical methods, to obtain relations between this invariant and possible graphs and to find relations for Narumi-Katayama index of the join operation on graphs.

This thesis consists of four chapters. The first chapter is introduction. Here the definition of a graph, its history, some special graphs and their properties together with some new graph types which do not exist in literature. These information will be used throughout the thesis. In the second chapter, the Narumi-Katayama index is calculated for some well-known special graph classes and a generalisation is given. In the third chapter, the Narumi-Katayama index of the join of two graphs is calculated and some results are obtained regarding a theorem given by Azari, [Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations, 2014]. In the fourth chapter, the number of graphs of which the Narumi-Katayama index is equal to a given fixed number.

Key Words: Graph, Topologic Index, Narumi-Katayama Index, Join (sum) Operator
2016, ix + 52 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum, mesleğinin hakkını sonuna kadar veren, kişiliği, eğitici kimliği ve sabrı ile örnek aldığım, daima yanımda olan ve yol gösteren, eğitim öğretim hayatıma en çok katkıda bulunan değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e,

Varlıklarını ve desteklerini daima hissettiğim, benim için her türlü fedakarlığı yapmaya hazır, acaba dediğim zamanlarda beni başarıya inandıran, başta ablam olmak üzere canım aileme,

sonsuz teşekkürler...

Merve AŞÇIOĞLU
02/06/2016

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. GRAFLARIN NARUMI-KATAYAMA İNDEKSLERİ	12
2.1. P_n Yol Grafi için Narumi-Katayama İndeksi	12
2.2. C_n Devir Grafi için Narumi-Katayama İndeksi	13
2.3. K_n Tam Grafi için Narumi-Katayama İndeksi	15
2.4. S_n Yıldız Grafi için Narumi-Katayama İndeksi	17
2.5. $K_{r,s}$ Tam İki Parçalı Graf için Narumi-Katayama İndeksi	18
2.6. $T_{r,s}$ Larva Grafi için Narumi-Katayama İndeksi	20
3. İKİ GRAFIN TOPLAMININ NARUMI-KATAYAMA İNDEKSİ	23
3.1. Giriş	23
3.2. Narumi-Katayama İndeksi ile İlgili Bazı Sonuçlar	25
4. NARUMI-KATAYAMA İNDEKSİ, VERİLEN BİR SAYIYA EŞİT OLAN GRAFLARIN SAYISI	34
4.1. Giriş	34
4.2. Narumi-Katayama İndeksi Asal Sayı Olan Graflar	35

4.3. Narumi-Katayama İndeksi İki Asal Sayının Çarpımı Olan Graflar	36
4.4. Narumi-Katayama İndeksi Bir Asal Sayının Karesi ile Bir Diğer Asal Sayının Çarpımı Olan Graflar	38
4.5. Narumi-Katayama İndeksi Bir Asal Sayının Kübü ile Bir Diğer Asal Sayının Çarpımı Olan Graflar	39
4.6. Narumi-Katayama İndeksi İki Asal Sayının Karelerinin Çarpımı Olan Graflar	45
4.7. Narumi-Katayama İndeksi Üç Asal Sayının Çarpımı Olan Graflar	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	52

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
G	Graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$d(u)$	u köşesinin derecesi
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir grafi
P_n	n köşeli yol grafi
S_n	n köşeli yıldız grafi
T_n	n köşeli ağaç grafi
$K_{r,s}$	Tam iki parçalı graf
$T_{r,s}$	$r+s$ köşeli larva grafi
Cr_1, r_2, \dots, r_n	r_1, r_2, \dots, r_n köşeli düzenli olmayan devir grafi
Sr_1, r_2, \dots, r_n	r_1, r_2, \dots, r_n köşeli genelleştirilmiş yıldız grafi
$G_1 + G_2$	G_1 ve G_2 graflarının toplamı (join)
$NK(G)$	G grafının Narumi-Katayama indeksi
N_n	Narumi-Katayama indeksi n olan olası graf sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Pregel Nehri	1
Şekil 1.2. Königsberg grafi	2
Şekil 1.3. 5 köşeli ve 7 kenarlı graf örneği	3
Şekil 1.4. Düzenli graf	4
Şekil 1.5. P_5 yol grafi	4
Şekil 1.6. C_4 devir grafi	4
Şekil 1.7. S_6 yıldız grafi	5
Şekil 1.8. K_5 tam grafi	5
Şekil 1.9. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafi	6
Şekil 1.10. $T_{4,3}$ larva grafi	7
Şekil 1.11. T_{15} ağaç grafi	7
Şekil 1.12. $C_{2,3,4}$ ve $C_{2,2,5,6}$ grafları	8
Şekil 1.13. $S_{3,4}$ ve $S_{4,2,3}$ grafları	9
Şekil 2.1. P_2 grafi	12
Şekil 2.2. P_n grafi	12
Şekil 2.3. P_{n+1} grafi	13
Şekil 2.4. C_3 grafi	13
Şekil 2.5. C_n grafi	14
Şekil 2.6. C_{n+1} grafi	14
Şekil 2.7. K_4 grafi	15
Şekil 2.8. K_n grafi	16
Şekil 2.9. K_{n+1} grafi	16
Şekil 2.10. S_4 grafi	17
Şekil 2.11. S_n grafi	17
Şekil 2.12. S_{n+1} grafi	18
Şekil 2.13. $K_{2,3}$ grafi	19
Şekil 2.14. $K_{r,s}$ grafi	19
Şekil 2.15. $K_{r+1,s+1}$ grafi	20

Şekil 2.16.	$T_{3,1}$ grafi	21
Şekil 2.17.	$T_{r,s}$ grafi	21
Şekil 2.18.	$T_{r+1,s+1}$ grafi	22
Şekil 3.1.	P_4+P_3 grafi	24
Şekil 3.2.	P_4+C_3 grafi	25
Şekil 4.1.	$C_{r,s,t}$ grafi	34
Şekil 4.2.	S_{p+1} grafi	35
Şekil 4.3.	$S_{m+1} = S_{rs+1}$ grafi	36
Şekil 4.4.	$S_{r,s}$ grafi	36
Şekil 4.5.	p^2q 'nin farklı çarpanları	38
Şekil 4.6.	$S_{p,p,q}$ ve $S_{q,p,p}$ grafları	39
Şekil 4.7.	p^3q 'nin farklı çarpanları	40
Şekil 4.8.	p merkezli ve q merkezli graflar	41
Şekil 4.9.	24 'ün farklı çarpanları	42
Şekil 4.10.	3 merkezli graf	43
Şekil 4.11.	Düzenli olmayan devir graflar	43
Şekil 4.12.	54 'ün farklı çarpanları	43
Şekil 4.13.	3 merkezli graf	44
Şekil 4.14.	Düzenli olmayan devir graflar	44
Şekil 4.15.	p^2q^2 'nin farklı çarpanları	45
Şekil 4.16.	p merkezli ve q merkezli graflar	47
Şekil 4.17.	Düzenli olmayan devir graflar	48
Şekil 4.18.	pqr 'nin farklı çarpanları	49

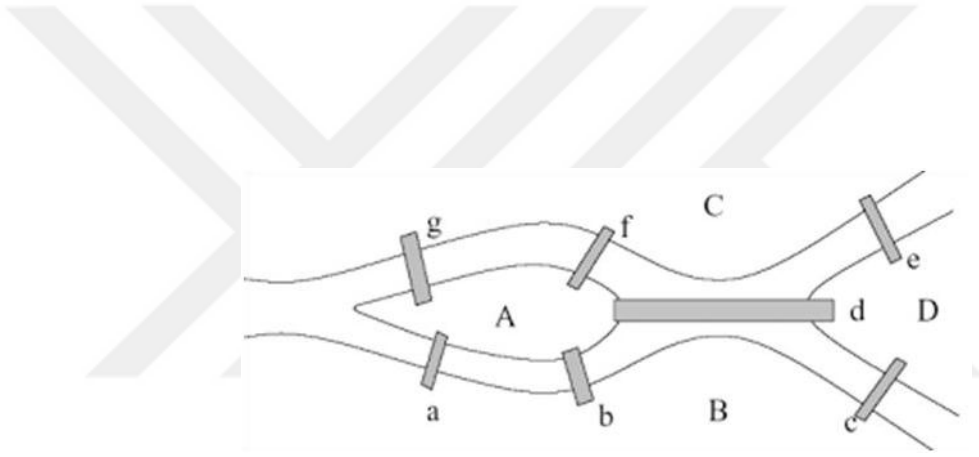
ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 3.1. İki grafin toplamının Narumi-Katayama indeksi	23
Çizelge 3.2. G_1 ve G_2 grafları için R oranı	26



1. GİRİŞ

Graf Teorisi 1736 yılında Euler'in (1707-1783) yazdığı makale ile doğmuştur. Bu makale Königsberg Bridge Problemini çözebilen bir teoriyi içeriyordu. Königsberg kasabasının içinden akan Pregel nehrinin ortasında nehrin kıyılarına ve birbirine köprüler ile bağlı bir ada ve yarımada bulunmaktadır.



Şekil 1.1. Pregel Nehri

Buradaki problem

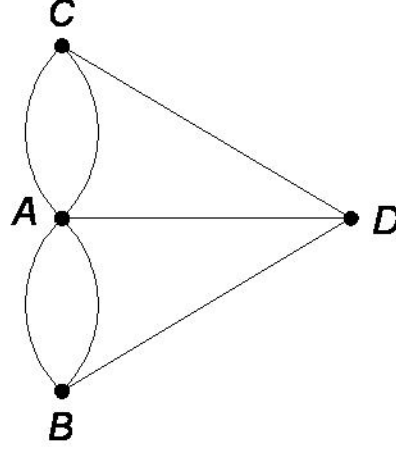
'Kıyıların veya adaların birinden başlayıp tüm köprülerden sadece bir kez geçerek başladığımız yere dönebilir miyiz?'

şeklindedir.

Euler bu problemin çözümünün olmadığını problemi aşağıdaki grafa dönüştürerek göstermiştir. Bu graf ile verilen problem

'Grafın tüm ayrıtlarını içeren kapalı bir yol var mıdır?'

haline dönüşmüştür.



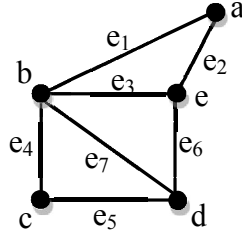
Şekil 1.2. Königsberg grafi

Aşağıdaki kısımda bu tezde kullanılacak olan bazı temel kavramları tanıyacağız. Bu kavramlarla ilgili daha geniş bilgi için Balakrishnan, Ranganathan, [A Textbook of Graph Theory, 2012], Berge, [The Theory of Graphs, 2001], Biggs, Lloyd, Wilson, [Graph Theory 1736-1936, 1986], Bondy, Murty, [Graph Theory, 2008], Bollobas, [Modern Graph Theory, 1998], West, [Introduction to Graph Theory, 1996], Chen, [Applied Graph Theory, 1976], Harary, [Graph Theory, 1994], Foulds, [Graph Theory Applications, 1992], Golumbic, Hartman, [Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, 2005], Harris, Hirst, Mossinghoff, [Combinatorics and Graph Theory, 2008], kaynaklarına başvurulabilir.

1.1. Tanım. Bir G **grafi (graph)** elemanlarına **köşeler (vertex)** denilen sonlu bir V kümesi ile köşelerin sıralanmamış ikililerini eleman kabul eden (**kenar (edge)**) sonlu bir E kümesinden oluşur.

$$G = (V, E)$$

ile gösterilir.



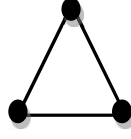
Şekil 1.3. 5 köşeli ve 7 kenarlı graf örneği

Şekil 1.3.'de verilen graf örneğinin köşe kümesi $V(G) = \{ a, b, c, d, e \}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$ 'dir.

1.2. Tanım. Bir u köşesini uç kabul eden kenarların sayısına u köşesinin **derecesi** (*degree*) denir ve $d(u)$ ile gösterilir. Örneğin Şekil 1.3.'de $d(a) = 2$ ve $d(b) = 4$ 'tür.

1.3. Tanım. Derecesi 1 olan bir köşeye **asılı köşe** (*pendant vertex*); buna bitişik olan kenara da **asılı kenar** (*pendant edge*) denir.

1.4. Tanım. Bir G grafındaki bütün köşelerin derecesi aynı ise bu grafa **düzenli** (*regular*) **graf** denir. Bir G grafının bütün köşelerinin derecesi n ise grafa **n -düzenli** (*n -regular*) **graf** denir.



Şekil 1.4. Düzenli graf

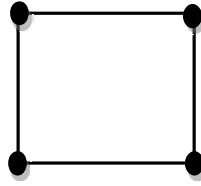
1.5. Tanım. Bir G grafının v_1, v_2, \dots, v_k köşelerinin $i = 1, 2, \dots, k$ için $v_i v_{i+1} \in E$ dizisine G grafının *yolu* denir. Eğer bir yolun tüm köşeleri farklıysa bu yola *patika (path)* denir. n köşeli bir patika P_n ile gösterilir.



Şekil 1.5. P_5 yol grafi

Tez boyunca patika için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 2$ alınacaktır.

1.6. Tanım. n köşeye sahip bir G grafi kapalı bir patika ise bu grafa *devir (cycle) graf* denir ve C_n ile gösterilir.

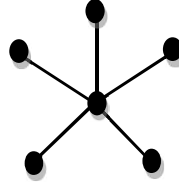


Şekil 1.6. C_4 devir grafi

Tez boyunca devir graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 3$ alınacaktır. Çünkü $n = 1$ ve $n = 2$ için $C_n = P_n$ 'dir.

1.7. Tanım. Merkezdeki bir köşenin diğer tüm köşelere bağlandığı bir grafa *yıldız (star) graf* denir ve S_n ile gösterilir.

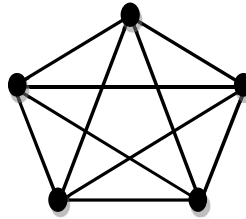
S_n grafında merkezdeki köşenin derecesi $n-1$, diğer köşelerin dereceleri 1 olur.



Şekil 1.7. S_6 yıldız grafi

Tez boyunca yıldız graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 4$ alınacaktır. Çünkü $n = 1, 2, 3$ için $S_n = P_n$ 'dir.

1.8. Tanım. Bir G grafindaki n köşenin her biri diğer köşelerin hepsi ile bir kenar oluşturuyorsa bu grafa *tam (complete) graf* denir ve K_n ile gösterilir.

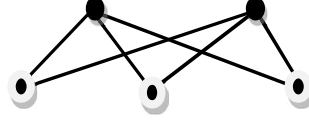


Şekil 1.8. K_5 tam grafi

Tez boyunca tam graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 4$ alınacaktır. Çünkü $n = 1, 2$ için $K_n = P_n$ ve $n = 3$ için $K_n = C_n$ 'dir.

1.9. Tanım. Bir G grafının köşe kümesi A ve B gibi iki alt köşe kümesine ayrılabilir ve A (B) kümesindeki bir köşe sadece B (A) kümesindeki bir köşe veya köşeler ile birleşiyorsa bu grafa *iki parçalı (bi-partite) graf* denir. Eğer A kümesindeki her köşe B

kümesindeki her bir köşeyle birleşiyorsa bu grafa da *tam iki parçalı (complete bi-partite) graf* denir ve A kümesinin eleman sayısı r , B kümesinin eleman sayısı s olmak üzere $K_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 1.9. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafı

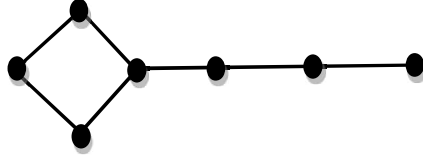
İki parçalı graflarda A ve B kümelerindeki köşelerin iki farklı renkle gösterilmesi alışılmış bir uygulamadır.

Tez boyunca r ve s köşe sayıları olmak üzere

$$s = \begin{cases} > 2, & r = 2 \\ \geq r, & r > 2 \end{cases}$$

alınacaktır.

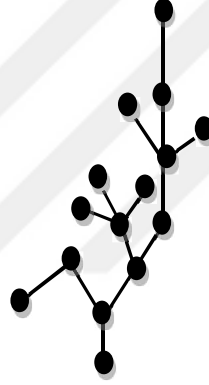
1.10. Tanım. Bir G grafının köşe kümesi A ve B gibi iki alt köşe kümesine ayrılabilirse ve A kümesindeki köşeler bir devir oluştururken, B kümesindeki köşeler bir patika oluşturuyorsa ve bu devir ile patikanın birer köşesi ortak ise bu grafa *larva (tadpole) graf* denir. Devir kısmındaki köşe sayısı r , patika kısmındaki köşe sayısı s olmak üzere bir larva graf $T_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 1.10. $T_{4,3}$ larva grafi

Tez boyunca $r \geq 3$ ve $s \geq 1$ alınacaktır. Çünkü diğer durumlarda $T_{r,s} = P_{r+s}$ olur.

1.11. Tanım. Döngü içermeyen bağlantılı graflara *ağaç (tree)* denir ve n köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir.

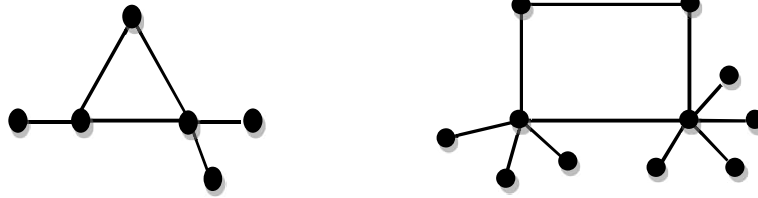


Şekil 1.11. T_{15} ağaç grafi

Şimdi ilerideki sınıflandırmalarımızda kullanacağımız ve literatürde olmayan bazı yeni gösterimler tanımlayacağız:

$n \geq 3$ için C_n ile n köşeli ve n kenarlı bir kapalı çokgenden oluşan grafi gösterdiğimizi hatırlayalım. C_n 'in tüm köşe dereceleri 2'dir. Bu grafin daha genel hali devir üzerindeki köşelerin dereceleri sırasıyla $r_1, r_2, \dots, r_n \geq 2$ olan ve diğer köşeleri asılı köşeler olan bir graftır.

1.12. Tanım. Devir üzerindeki köşelerin dereceleri sırasıyla $r_1, r_2, \dots, r_n \geq 2$ olan ve diğer köşeleri asılı köşeler olan bir grafi C_{r_1, r_2, \dots, r_n} ile göstereceğiz ve **düzenli olmayan devir grafi (irregular cycle graph)** adını vereceğiz. Örneğin;

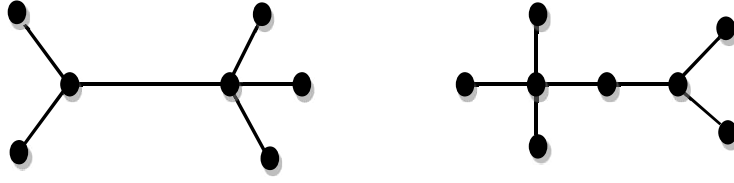


Şekil 1.12. $C_{2,3,4}$ ve $C_{2,2,5,6}$ grafları

düzenli olmayan devir graflardır. Dikkat edilirse n tane 2 dereceli köşeden oluşan düzenli olmayan devir grafi $C_{2,2, \dots, 2}$; aslında C_n devirli grafidir. Ayrıca C_{r_1, r_2, \dots, r_n} grafinde $\sum_{i=1}^n r_i - 2n$ tane asılı köşe vardır.

Düzenli olmayan devir grafinin benzer olarak S_n ile n köşeli ve $n-1$ kenarlı yıldız grafini gösterdiğimizi hatırlayalım. S_n 'nin merkez köşesinin derecesi $n-1$ olup diğer köşeler asılıdır. Bu grafi genelleştirerek asılı köşeleri hariç diğer köşelerinin dereceleri sırasıyla $r_1, r_2, \dots, r_n \geq 2$ olan ve devir içermeyen bağlantılı bir grafi tanımlayabiliriz.

1.13. Tanım. Asılı köşeleri hariç diğer köşelerinin dereceleri sırasıyla $r_1, r_2, \dots, r_n \geq 2$ olan ve devir içermeyen bağlantılı bir grafi S_{r_1, r_2, \dots, r_n} ile göstereceğiz ve **genelleştirilmiş yıldız grafi (generalized star graph)** adını vereceğiz. Örneğin;



Şekil 1.13. $S_{3,4}$ ve $S_{4,2,3}$ grafları

şeklinde. $k = 1$ durumunda graf bilinen yıldız graftır. Ayrıca S_{r_1, r_2, \dots, r_n} grafında $\sum_{i=1}^n r_i - n$ tane asılı köşe vardır.

Küçük graflardan daha büyük graflar elde etmenin yollarından biri graf operatörlerini kullanmaktır. Literatürde çok sayıda graf operatörü tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları kartezyen çarpım, birleşim, toplam, Corona çarpım, vs'dir.

1.14. Tanım. G_1 ve G_2 , köşe kümeleri ayrık V_1 ve V_2 kümeleri olan iki graf olsun. G_1 ve G_2 **graflarının toplamı (join)**, $G_1 \cup G_2$ kümesine V_1 ve V_2 kümelerindeki köşeleri birleştiren tüm kenarların katılmasıyla elde edilen graftır. $G_1 + G_2$ ile gösterilir.

Graf Teorinin önemli uygulama alanlarından biri kimyasal uygulamalardır. Atomların ve moleküllerin birçok özellikleri graflar yardımıyla bu atom ve moleküllerin modellenmesi sonucunda graf teorik metotlarla elde edilebilir. Molekül ağırlığı, kaynama ve erime noktaları, atom yarıçapı gibi atom ve moleküllerin sınıflandırılmasında ve kimyasal uygulamalarında kullanılan birçok sabit sayı, matematiksel formüllerle ifade edilebilmektedir. Bu sayılar, karşılık gelen graf modelleri yardımıyla, literatürde bilinen diğer metotlara nazaran çok daha kolay ve ekonomik şekilde hesaplanabilirler. Bu hesaplamalarda, adına graf indeksleri ya da topolojik graf indeksleri denilen bazı değişmeyen sayılardan faydalanılmaktadır. Bu indeksler yardımıyla farklı molekül sınıfları için elde edilen sayısal değerler ile moleküllerin yukarıda sıralanan kimyasal özelliklerini belirten sabitler arasında bir

bağıntı bulunması durumunda bu bağıntı yardımıyla, hesaplanan matematiksel verilerden faydalanarak kimyasal özelliklerin belirlenmesi mümkündür.

Topolojik graf indekslerinden bazıları Narumi-Katayama indeksi, birinci ve ikinci Zagreb indeksleri, birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri, Wiener indeksi, birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü geometrik-aritmetik indeksler ve ABC indeksidir.

Bu çalışmada Narumi-Katayama indeksi ele alınmıştır. Bu indeks, grafın köşe derecelerine bağlı olarak tanımlanan ve ilk defa 1984 yılında Narumi ve Katayama tarafından kullanılan bir indekstir:

1.15. Tanım. G bir basit graf, yani döngü ve katlı kenarlar içermeyen bir graf olsun. G grafının tüm köşelerinin derecelerinin çarpılmasıyla oluşan sayıya **G grafının Narumi-Katayama indeksi** denir ve $NK(G)$ ile gösterilir. Yani

$$NK(G) = \prod_{u \in V(G)} d(u)$$

şeklindedir.

Narumi-Katayama indeksi, sadece hidrojen ve karbon atomlarından oluşan hidrokarbonların dallanmasının belirlenmesinde ve kaynama noktalarının bulunmasında kullanılmaktadır. Bu uygulamalarla ilgili Azari, [Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations, 2014]'e bakılabilir.

Bu tezde patika, devir, yıldız, tam, iki parçalı tam ve larva graf türleri için Narumi-Katayama indeksleri hesaplanmıştır. Bu graflardan iki tanesinin toplamıyla elde edilen yeni grafın Narumi-Katayama indeksi belirlenmiştir. Ayrıca verilen bir sayı için Narumi-Katayama indeksi bu sayıya eşit olan grafların sayıları bulunmuştur.

Tezin ikinci bölümündeki özel grafların Narumi-Katayama indekslerinin genelleştirilip ispatlanması bize aittir. Üçüncü bölümde hesaplanan iki grafin toplamının Narumi-Katayama indeksi ve ispatı, Azari, [Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations, 2014]'de verilen teoreme dayalı sonuçlar, dördüncü bölümdeki teoremler bizim bulduğumuz orijinal sonuçlardır.

Narumi-Katayama indeksine benzer olarak Fath-Tabar, Vaez-Zadeh, Ashrafi, Graovac, [Some inequalities for the atom-bond connectivity index of graph operations, 2011]'de bazı graf operasyonlarının ABC indeksleri hesaplanmıştır. Azari-Iranmanesh, [Computing the eccentric-distance sum for graph operations, 2013]'de graf operasyonlarının ekzantirik uzaklık toplamı indeksleri hesaplanmıştır.

2. GRAFLARIN NARUMI-KATAYAMA İNDEKSLERİ

2.1. P_n Yol Grafi için Narumi-Katayama İndeksi

Teorem 2.1.1. $NK(P_n) = 2^{n-2}$ olur.

İspat. Tümevarımla ispat yapacağız. İlk olarak $n = 2$ için $NK(P_2) = 2^{2-2} = 2^0 = 1$ midir?



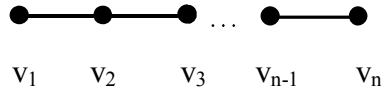
Şekil 2.1. P_2 grafi

Narumi-Katayama indeksi tanımı gereği

$$NK(P_2) = 1.1 = 1 = 2^0 = 2^{2-2}$$

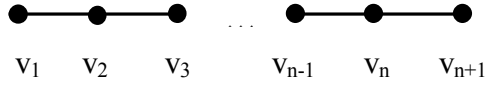
olup $n = 2$ için iddia doğrudur.

n için $NK(P_n) = 2^{n-2}$ olsun.



Şekil 2.2. P_n grafi

$n+1$ için $NK(P_{n+1}) = 2^{n+1-2} = 2^{n-1}$ midir?



Şekil 2.3. P_{n+1} grafi

$2 \leq i \leq n$ iken $d(v_i) = 2$ ve $d(v_1) = d(v_{n+1}) = 1$ 'dir. Narumi-Katayama indeksinin tanımı gereği

$$NK(P_{n+1}) = 1.2.2 \dots 2.2.1 = 2^{n-1}$$

olur. Dolayısıyla önerme her n için doğrudur ve

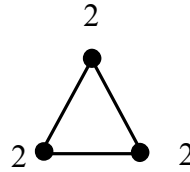
$$NK(P_n) = 2^{n-2}$$

elde edilir.

2.2. C_n Devir Grafi için Narumi-Katayama İndeksi

Teorem 2.1.2. $NK(C_n) = 2^n$ olur.

İspat. İspatı yine tümevarım ile yapacağız. $n = 3$ için $NK(C_3) = 2^3$ müdür?



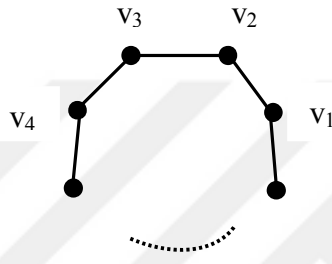
Şekil 2.4. C_3 grafi

Narumi-Katayama indeksi tanımı gereği

$$NK(C_3) = 2.2.2 = 2^3$$

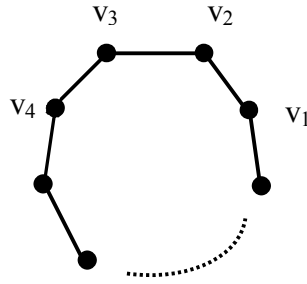
olup $n = 3$ için iddia doğrudur.

n için $NK(C_n) = 2^n$ olsun.



Şekil 2.5. C_n grafi

$n+1$ için $NK(C_{n+1}) = 2^{n+1}$ midir?



Şekil 2.6. C_{n+1} grafi

$1 \leq i \leq n+1$ için $d(v_i) = 2$ 'dir. Narumi-Katayama indeksinin tanımı gereği

$$NK(C_{n+1}) = 2.2.2 \dots 2 = 2^{n+1}$$

olur. Dolayısıyla önerme her n için doğrudur ve

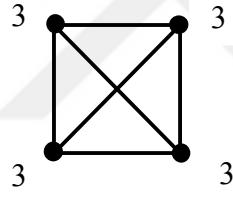
$$NK(C_n) = 2^n$$

olur.

2.3. K_n Tam Grafi için Narumi-Katayama İndeksi

Teorem 2.3.1. $NK(K_n) = (n-1)^n$ olur.

İspat. $n = 4$ için $NK(K_4) = (4-1)^4 = 3^4$ müdür?



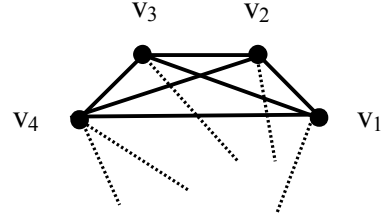
Şekil 2.7. K_4 grafi

Narumi-Katayama indeksi tanım gereği

$$NK(K_4) = 3.3.3.3 = 3^4$$

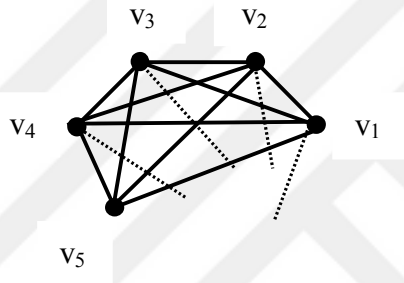
olup $n = 4$ için iddia doğrudur.

n için $NK(K_n) = (n-1)^n$ olsun.



Şekil 2.8. K_n grafi

$n+1$ için $NK(K_{n+1}) = n^{n+1}$ midir?



Şekil 2.9. K_{n+1} grafi

$1 \leq i \leq n+1$ için $d(v_i) = n$ 'dir. Narumi-Katayama indeksi tanımını gereği

$$NK(K_{n+1}) = n.n \dots n = n^{n+1}$$

olur. Dolayısıyla önerme her n için doğrudur ve

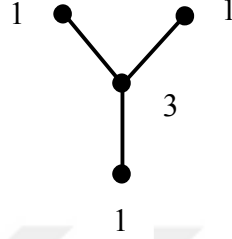
$$NK(K_n) = (n-1)^n$$

olur.

2.4. S_n Yıldız Grafi için Narumi-Katayama İndeksi

Teorem 2.4.1. $NK(S_n) = n-1$ olur.

İspat. $n = 4$ için $NK(S_4) = 4-1 = 3$ müdür?



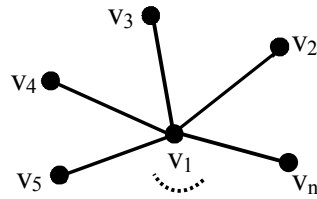
Şekil 2.10. S_4 grafi

Narumi-Katayama indeksi tanımı gereği

$$NK(S_4) = 1.1.1.3 = 3$$

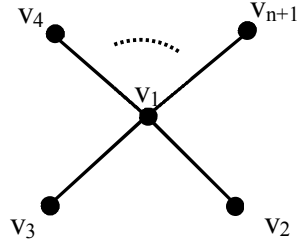
olup $n = 4$ için iddia doğrudur.

n için $NK(S_n) = n-1$ olsun.



Şekil 2.11. S_n grafi

$n+1$ için $NK(S_{n+1}) = n-1+1 = n$ midir?



Şekil 2.12. S_{n+1} grafi

$2 \leq i \leq n+1$ için $d(v_i) = 1$ ve $d(v_1) = n$ 'dir. Narumi-Katayama indeksi tanımı gereği

$$NK(S_{n+1}) = 1.1 \dots 1.n = n$$

olur. Dolayısıyla önerme her n için doğrudur ve

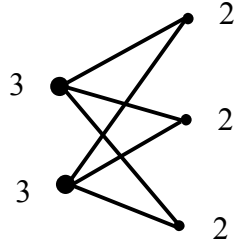
$$NK(S_n) = n-1$$

olur.

2.5. $K_{r,s}$ Tam İki Parçalı Graf için Narumi-Katayama İndeksi

Teorem 2.5.1. $NK(K_{r,s}) = r^s \cdot s^r$ olur.

İspat. $r = 2$ ve $s = 3$ için $NK(K_{2,3}) = 2^3 \cdot 3^2$ midir?



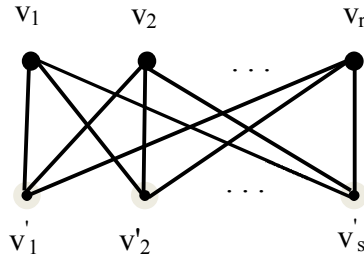
Şekil 2.13. $K_{2,3}$ grafi

Narumi-Katayama indeksi tanımı gereği

$$NK(K_{2,3}) = 2.2.2.3.3 = 2^3.3^2$$

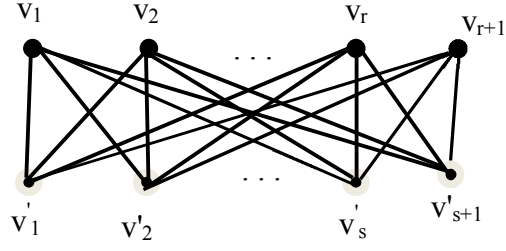
olup $r = 2$ ve $s = 3$ için iddia doğrudur.

n için $NK(K_{r,s}) = r^s.s^r$ olsun.



Şekil 2.14. $K_{r,s}$ grafi

$n+1$ için $NK(K_{r,s}) = (r+1)^{s+1}.(s+1)^{r+1}$ midir?



Şekil 2.15. $K_{r+1, s+1}$ grafi

$1 \leq i \leq r+1$ için $d(v_i) = s+1$ ve $1 \leq j \leq s+1$ için $d(v'_j) = r+1$ 'dir. Narumi-Katayama indeksi tanım gereği

$$NK(K_{r+1, s+1}) = (s+1).(s+1) \dots (s+1).(r+1).(r+1) \dots (r+1) = (s+1)^{r+1} . (r+1)^{s+1}$$

olur. Dolayısıyla önerme her r, s için doğrudur ve

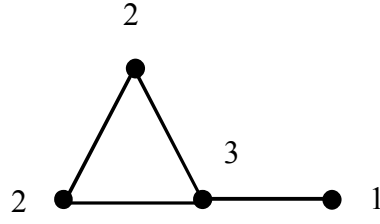
$$NK(K_{r, s}) = r^s . s^r$$

olur.

2.6. $T_{r, s}$ Larva Grafi için Narumi-Katayama İndeksi

Teorem 2.6.1. $NK(T_{r, s}) = 3.2^{r-1} . 2^{s-1}$ olur.

İspat. $r = 3$ ve $s = 1$ için $NK(T_{r, s}) = 3.2^{3-1} . 2^{1-1} = 3.2^2$ midir?



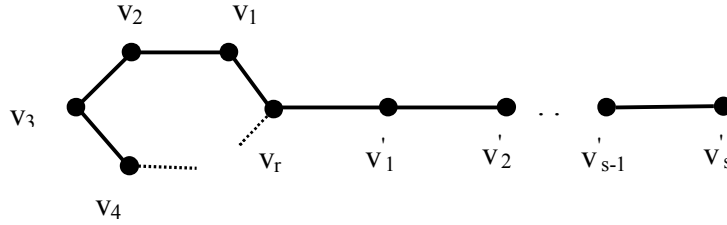
Şekil 2.16. $T_{3,1}$ grafi

Narumi-Katayama indeksi tanımı gereği

$$NK(T_{r,s}) = 3.2.2.1 = 3.2^2$$

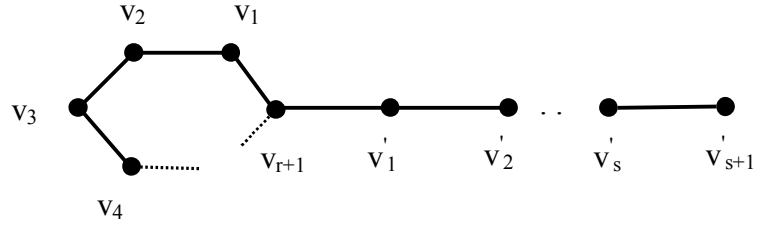
olup $r = 3$ ve $s = 1$ için iddia doğrudur.

n için $NK(T_{r,s}) = 3.2^{r-1}.2^{s-1}$ olsun.



Şekil 2.17. $T_{r,s}$ grafi

$n+1$ için $NK(T_{r+1,s+1}) = 3.2^{r+1-1}.2^{s+1-1} = 3.2^r.2^s$ midir?



Şekil 2.18. $T_{r+1,s+1}$ grafi

$1 \leq i \leq r$ için $d(v_i) = 2$, $d(v_{r+1}) = 3$, $1 \leq j \leq s$ için $d(v'_j) = 2$ ve $d(v'_{s+1}) = 1$ 'dir.

Narumi-Katayama indeksi tanımı gereği

$$NK(T_{r+1,s+1}) = 2.2 \dots 2.3.2.2 \dots 2.1 = 2^r.3.2^s = 3.2^r.2^s$$

olur. Dolayısıyla önerme her r,s için doğrudur ve

$$NK(T_{r,s}) = 3.2^r.2^s$$

olur.

3. İKİ GRAFIN TOPLAMININ NARUMI-KATAYAMA İNDEKSİ

3.1. Giriş

G_1 ve G_2 patika, devir, tam, yıldız, iki parçalı tam graf, larva graflardan herhangi ikisi olmak üzere G_1 ile G_2 'nin toplamı (join) olan G_1+G_2 grafının Narumi-Katayama indeksi aşağıdaki sonuçta verilmektedir:

Teorem 3.1.1. G_1 ve G_2 patika, devir, tam, yıldız, iki parçalı tam graf, larva graflardan herhangi ikisi olmak üzere G_1+G_2 toplam grafının Narumi-Katayama indeksi aşağıdaki şekildedir:

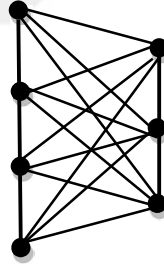
G_1	G_2	$NK(G_1+G_2)$
P_m	P_n	$(n+1)^2 \cdot (n+2)^{m-2} \cdot (m+1)^2 \cdot (m+2)^{n-2}$
P_m	C_n	$(n+1)^2 \cdot (n+2)^{m-2} \cdot (m+2)^n$
P_m	S_n	$(n+1)^2 \cdot (n+2)^{m-2} \cdot (m+1)^{n-1} \cdot (m+n-1)$
P_m	K_n	$(n+1)^2 \cdot (n+2)^{m-2} \cdot (m+n-1)^n$
P_m	$T_{n,t}$	$(n+t+1)^2 \cdot (n+t+2)^{m-2} \cdot (m+1) \cdot (m+2)^{n+t-2} \cdot (m+3)$
P_m	$K_{n,t}$	$(n+t+1)^2 \cdot (n+t+2)^{m-2} \cdot (m+n)^t \cdot (m+t)^n$
C_m	P_n	$(n+2)^m \cdot (m+1)^2 \cdot (m+2)^{n-2}$
C_m	C_n	$(n+2)^m \cdot (m+2)^n$
C_m	S_n	$(n+2)^m \cdot (m+n-1) \cdot (m+1)^{n-1}$
C_m	K_n	$(n+2)^m \cdot (m+n-1)^n$
C_m	$T_{n,t}$	$(n+t+2)^m \cdot (m+1) \cdot (m+2)^{n+t-2} \cdot (m+3)$
C_m	$K_{n,t}$	$(n+t+2)^m \cdot (m+n)^t \cdot (m+t)^n$
S_m	P_n	$(n+1)^{m-1} \cdot (m+n-1) \cdot (m+1)^2 \cdot (m+2)^{n-2}$
S_m	C_n	$(n+1)^{m-1} \cdot (m+n-1) \cdot (m+2)^n$
S_m	S_n	$(n+1)^{m-1} \cdot (m+n-1)^2 \cdot (m+1)^{n-1}$
S_m	K_n	$(n+1)^{m-1} \cdot (m+n-1) \cdot (m+n-1)^n$
S_m	$T_{n,t}$	$(n+t+1)^{m-1} \cdot (m+n+t-1) \cdot (m+1) \cdot (m+2)^{n+t-2} \cdot (m+3)$
S_m	$K_{n,t}$	$(n+t+1)^{m-1} \cdot (m+n+t-1) \cdot (m+n)^t \cdot (m+t)^n$
K_m	P_n	$(m+n-1)^m \cdot (m+1)^2 \cdot (m+2)^{n-2}$
K_m	C_n	$(m+n-1)^m \cdot (m+2)^n$
K_m	S_n	$(m+n-1)^m \cdot (m+1)^{n-1} \cdot (m+n-1)$

K_m	K_n	$(m+n-1)^{m+n}$
K_m	$T_{n,t}$	$(m+n+t-1)^m \cdot (m+1) \cdot (m+2)^{n+t-2} \cdot (m+3)$
K_m	$K_{n,t}$	$(m+n+t-1)^m \cdot (m+n)^t \cdot (m+t)^n$
$T_{r,s}$	P_n	$(t+2)^{r+s-2} \cdot (t+1) \cdot (t+3) \cdot (r+s+1)^2 \cdot (r+s+2)^{t-2}$
$T_{r,s}$	C_t	$(t+2)^{r+s-2} \cdot (t+1) \cdot (t+3) \cdot (r+s+2)^t$
$T_{r,s}$	S_t	$(t+2)^{r+s-2} \cdot (t+1) \cdot (t+3) \cdot (r+s+1)^{t-1} \cdot (r+s+t-1)$
$T_{r,s}$	K_t	$(t+2)^{r+s-2} \cdot (t+1) \cdot (t+3) \cdot (r+s+t-1)^t$
$T_{r,s}$	$T_{t,m}$	$(t+m+2)^{r+s-2} \cdot (t+m+1) \cdot (t+m+3) \cdot (r+s+2)^{t+m-2} \cdot (r+s+1) \cdot (r+s+3)$
$T_{r,s}$	$K_{t,m}$	$(t+m+2)^{r+s-2} \cdot (t+m+1) \cdot (t+m+3) \cdot (r+s+t)^m \cdot (r+s+m)^t$
$K_{r,s}$	P_t	$(r+t)^s \cdot (s+t)^r \cdot (r+s+1)^2 \cdot (r+s+2)^{t-2}$
$K_{r,s}$	C_t	$(r+t)^s \cdot (s+t)^r \cdot (r+s+2)^t$
$K_{r,s}$	S_t	$(r+t)^s \cdot (s+t)^r \cdot (r+s+1)^{t-1} \cdot (r+s+t-1)$
$K_{r,s}$	K_t	$(r+t)^s \cdot (s+t)^r \cdot (r+s+t-1)^t$
$K_{r,s}$	$T_{t,m}$	$(r+t+m)^s \cdot (s+t+m)^r \cdot (r+s+2)^{t+m-2} \cdot (r+s+1) \cdot (r+s+3)$
$K_{r,s}$	$K_{t,m}$	$(r+t+m)^s \cdot (s+t+m)^r \cdot (r+s+m)^t \cdot (r+s+t)^m$

Çizelge 3.1. İki grafın toplamının Narumi-Katayama indeksi

İspat. Tüm durumlarda ispat yöntemi benzer olduğundan iki durumda ispatı vereceğiz:

Durumu açıklamak için ilk olarak P_4+P_3 toplamının grafını ele alalım.



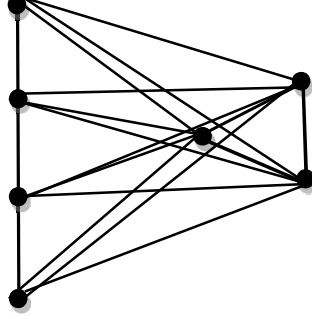
Şekil 3.1. P_4+P_3 grafı

Genel durumda $G_1 = P_n$ ve $G_2 = P_m$ alınırsa P_n+P_m aslında $K_{n,m}$ 'dir ve iki tane $m+1$ dereceli, $n-2$ tane $m+2$ dereceli, iki tane $n+1$ dereceli ve $m-2$ tane $n+2$ dereceli köşe mevcuttur. Dolayısıyla P_n+P_m 'nin Narumi-Katayama indeksi

$$NK(P_n+P_m) = (m+1)^2 \cdot (m+2)^{n-2} \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^{m-2}$$

olarak bulunur.

İkinci duruma örnek olarak P_4+C_3 toplamının grafi



Şekil 3.2. P_4+C_3 grafi

şeklinde. Eğer genel durumda $G_1 = P_n$ ve $G_2 = C_m$ alınırsa P_n+C_m toplam grafi iki tane $m+1$ dereceli, $n-2$ tane $m+2$ dereceli ve m tane $n+2$ dereceli köşe mevcuttur. Dolayısıyla P_n+C_m 'in Narumi-Katayama indeksi

$$NK(P_n+C_m) = (m+1)^2 \cdot (m+2)^{n-2} \cdot (n+2)^m$$

olarak bulunur.

3.2. Narumi-Katayama İndeksi ile İlgili Bazı Sonuçlar

Azari, [Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations, 2014] makalesinde aşağıdaki teorem ifade edilmiştir:

Teorem 3.2.1. $G_1+G_2+\dots+G_k$ toplamının Narumi-Katayama indeksi için aşağıdaki eşitsizlik geçerli olur:

$$n = n_1+n_2+\dots+n_k \text{ ve } \bar{n}_i = n-n_i, 1 \leq i \leq k \text{ olmak üzere}$$

$$NK(G_1+G_2+\dots+G_k) > 2^n \sqrt{\prod_{i=1}^k (\bar{n}_i)^{n_i} NK(G_i)}$$

dir. Burada $k = 2$ alındığında $n = n_1 + n_2$ olmak üzere

$$NK(G_1 + G_2) > 2^n \cdot \sqrt{n_1^{n_2} n_2^{n_1}} \sqrt{NK(G_1)NK(G_2)}$$

elde edilir. Burada $2^n \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^2 (\bar{n}_i)^{n_i} NK(G_i)}$ ifadesini kısaca A sembolü ile göstereceğiz.

Özel graflar için şu sonuçları elde edebiliriz:

$$R = \frac{NK(G_1 + G_2)}{2^n \cdot \sqrt{n_1^{n_2} n_2^{n_1}} \sqrt{NK(G_1)NK(G_2)}} = \frac{NK(G_1 + G_2)}{A}$$

olarak tanımlarsak $n \rightarrow \infty$ iken $R \rightarrow 1$ olur ve eşitsizlik eşitlik haline dönüşür.

Eğer G_1 ve G_2 'yi P_n , C_n , S_n , K_n ve $K_{r,s}$ graflarından herhangi ikisi olarak alıp R oranını hesaplırsak aşağıdaki tabloyu elde ederiz:

G_1	G_2	R
P_2	P_3	1,5
P_3	P_3	1,85
P_3	P_4	2,302
P_4	P_4	3,089
P_4	P_5	4,111
P_5	P_5	5,955

C_3	C_3	1,130
C_3	C_4	1,294
C_3	C_5	1,501
C_3	C_6	1,740

C ₄	C ₄	1,601
C ₄	C ₅	2,014
C ₄	C ₆	2,5

S ₄	S ₄	3,894
S ₄	S ₅	6,089
S ₅	S ₅	10,628
S ₅	S ₆	18,493

K ₄	S ₄	2,056
K ₄	S ₅	2,777
K ₄	S ₆	3,886
K ₅	S ₅	3,363
K ₅	S ₆	4,813

K ₄	K ₄	1,085
K ₄	K ₅	1,137
K ₄	K ₆	1,313
K ₅	K ₅	1,064
K ₅	K ₆	1,107
K ₇	K ₇	1,042
K ₈	K ₈	1,036

Çizelge 3.2. G₁ ve G₂ grafları için R oranı

Bu tabloda, örnek graf çiftleri olarak P_m-P_n, C_n-C_m, S_n-S_m, K_n-S_m, K_n-K_m alınmıştır. Olası diğer durumlar için de benzer tablolar oluşturulabilir. Dikkat edilirse her bir graf ikilisi için m, n indekslerinin her ikisi de arttığında tam graflar dışındaki tüm durumlarda R değeri de artmaktadır.

Sonuç 3.2.2. n, m ≥ 2 olsun. G₁ = P_n ve G₂ = P_m ise

$$NK(G_1 + G_2) \geq \frac{81}{64} \cdot A$$

olur.

İspat. Narumi-Katayama indeksinin tanımından dolayı $NK(P_n) = 2^{n-2}$, $NK(P_m) = 2^{m-2}$ ve $NK(P_n + P_m) = (m+1)^2 \cdot (m+2)^{n-2} \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^{m-2}$ olduğunu hatırlayalım. $A = 2^{n+m} \cdot \sqrt{m^n n^m} \cdot \sqrt{NK(P_n)NK(P_m)}$ şeklini alır. Buradan

$$\frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = \frac{(m+1)^2 \cdot (m+2)^{n-2} \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^{m-2}}{2^{m+n} \cdot \sqrt{m^n n^m} \cdot \sqrt{2^{m+n-4}}}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{NK(G_1 + G_2)}{A} &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} 4 \cdot \frac{(m+1)^2}{2^m 2^{\frac{m}{2}} (m+2)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{2^n 2^{\frac{n}{2}} (n+2)^2} \cdot \frac{(n+2)^m (m+2)^n}{n^{\frac{m}{2}} m^{\frac{n}{2}}} \\ &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \right)^m \cdot \left(\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}} \right)^n \\ &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} \right)^m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{2}} \right)^n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde edilir. $n = m = 2$ alınırsa

$$\frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = \frac{81}{64}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{NK(G_1 + G_2)}{A} \rightarrow \infty$$

olduğundan

$$NK(G_1 + G_2) \geq \frac{81}{64} \cdot A$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.3. $G_1 = C_n$, $G_2 = C_m$, $n, m \geq 3$ için

$$NK(G_1 + G_2) \geq \frac{15625}{13824} \cdot A$$

elde edilir.

İspat. $A = 2^{n+m} \cdot \sqrt{n^m \cdot m^n} \sqrt{2^n \cdot 2^m}$ olduğu açıktır. Buradan

$$\frac{NK(G_1+G_2)}{A} = \frac{(2+m)^n \cdot (2+n)^m}{2^{n+m} \sqrt{n^m \cdot m^n} \sqrt{2^n \cdot 2^m}}$$

olur.

$$\begin{aligned} \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{NK(G_1+G_2)}{A} &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{(2+m)^n \cdot (2+n)^m}{2^{n+m} 2^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{m}{2}} \sqrt{n^m} \sqrt{m^n}} \\ &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{(2+m)^n \cdot (2+n)^m}{m^{\frac{n}{2}} \cdot n^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{2})^{m+n}} \\ &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+m}{\sqrt{m}} \right)^n \cdot \left(\frac{2+n}{\sqrt{n}} \right)^m \cdot \frac{1}{(2\sqrt{2})^{m+n}} \\ &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+m}{2\sqrt{2m}} \right)^n \cdot \left(\frac{2+n}{2\sqrt{2n}} \right)^m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

olur. $n = m = 3$ alınır

$$\frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = \frac{15625}{13824}$$

elde edilir. O halde,

$$NK(G_1 + G_2) \geq \frac{15625}{13824} \cdot A$$

olur.

Sonuç 3.2.4. $n, m \geq 4$ olsun. $G_1 = K_n$ ve $G_2 = S_m$ için

$$NK(G_1 + G_2) \geq \frac{7^5 \cdot 5^3}{2^{16} \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}} \cdot A$$

elde edilir.

İspat. $NK(K_n) = (n - 1)^n$, $NK(S_m) = m - 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$NK(S_m + K_n) = (n - 1 + m)^n \cdot (1 + n)^{m-1} \cdot (m - 1 + n)$$

olur. Buradan $A = 2^{n+m} \cdot \sqrt{n^m m^n} \cdot \sqrt{(n - 1)^n \cdot (m - 1)}$ elde edilir. O halde

$$\frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = \frac{(n + m - 1)^{n+1} \cdot (n + 1)^{m-1}}{2^{n+m} \cdot \sqrt{n^m m^n} \cdot \sqrt{(n - 1)^n \cdot (m - 1)}}$$

olur. Böylece

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{NK(G_1 + G_2)}{A} \rightarrow \infty$$

elde edilir. $n = m = 4$ iken

$$\frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = \frac{7^5 \cdot 5^3}{2^{16} \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}}$$

olur. O halde,

$$NK(G_1 + G_2) \geq \frac{7^5 \cdot 5^3}{2^{16} \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}} \cdot A$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.5. $n, m \geq 4$ olsun. $G_1 = S_n$ ve $G_2 = S_m$ olsun. Bu takdirde

$$NK(G_1 + G_2) \geq \frac{5^6 \cdot 7^2}{2^{16} \cdot 3} \cdot A$$

elde edilir.

İspat. $NK(S_n) = n - 1$ ve $NK(S_m) = m - 1$ olup

$$\begin{aligned} NK(S_n + S_m) &= (1 + m)^{n-1} \cdot (n - 1 + m) \cdot (1 + n)^{m-1} \cdot (m - 1 + n) \\ &= (1 + m)^{n-1} \cdot (1 + n)^{m-1} \cdot (m + n - 1)^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan $A = 2^{n+m} \cdot \sqrt{n^m \cdot m^n} \cdot \sqrt{(n-1) \cdot (m-1)}$ elde edilir. Böylece

$$\frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = \frac{(1+m)^{n-1} \cdot (1+n)^{m-1} \cdot (m+n-1)^2}{2^{n+m} \cdot \sqrt{n^m \cdot m^n} \cdot \sqrt{(n-1) \cdot (m-1)}}$$

bulunur.

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{NK(G_1 + G_2)}{A} \rightarrow \infty$$

olur. $n = m = 4$ iken

$$\frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = \frac{5^6 \cdot 7^2}{2^{16} \cdot 3}$$

olur. O halde

$$NK(G_1 + G_2) \geq \frac{5^6 \cdot 7^2}{2^{16} \cdot 3} \cdot A$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.6. $n, m \geq 4$ olsun. $G_1 = K_n$ ve $G_2 = K_m$ ise

$$NK(G_1 + G_2) \geq A$$

olur.

İspat. $NK(K_n) = (n-1)^n$ ve $NK(K_m) = (m-1)^m$ olduğundan

$$NK(K_n + K_m) = (n - 1 + m)^n \cdot (m - 1 + n)^m,$$

$$A = 2^{n+m} \cdot \sqrt{n^m \cdot m^n} \cdot \sqrt{(n-1)^n \cdot (m-1)^m}$$

olur.

$$\frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = \frac{(n + m - 1)^{n+m}}{2^{n+m} \cdot m^{\frac{n}{2}} \cdot n^{\frac{m}{2}} \cdot (m-1)^{\frac{m}{2}} \cdot (n-1)^{\frac{n}{2}}}$$

olur. $n = m$ için

$$\frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = \frac{(2n - 1)^{2n}}{2^{2n} \cdot n^n \cdot (n - 1)^n}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n=m \rightarrow \infty} \frac{NK(G_1 + G_2)}{A} = 1$$

olur. O halde

$$NK(G_1 + G_2) \geq A$$

elde edilir.

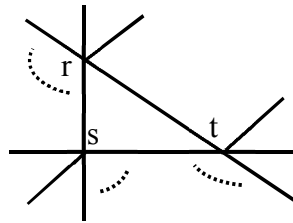
4. NARUMI-KATAYAMA İNDEKSİ, VERİLEN BİR SAYIYA EŞİT OLAN GRAFLARIN SAYISI

4.1. Giriş

Aşağıdaki teoremler daha önce literatürde olmayan kendi bulduğumuz orijinal sonuçlardır:

Teorem 4.1.1. Bir G grafinin köşe dereceleri d_1, d_2, \dots, d_n olsun. Bunlardan en az üç tanesi 1'den büyük ise bu köşe derecelerine sahip graflardan en az biri bir devir bulundurur.

İspat. G grafinin derece dizisinde 1'den büyük olan üç sayı r, s, t olsun. Aşağıdaki graf istenilen özelliكتedir:



Şekil 4.1. $C_{r,s,t}$ grafi

$$d(u) = r, d(v) = s, d(w) = t$$

Narumi-Katayama indeksi n olan tüm grafların sayısını N_n ile gösterelim.

Teorem 4.1.2. $N_n \geq 1$ olur.

İspat. Bu özellikte en azından S_{n+1} grafi mevcuttur.

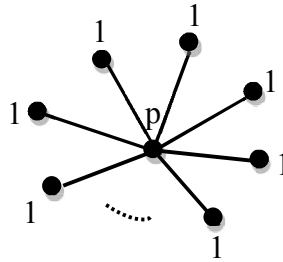
4.2. Narumi-Katayama İndeksi Asal Sayı Olan Graflar

Teorem 4.2.1. p asal olsun.

$$NK(G) = p \Leftrightarrow N_p = 1$$

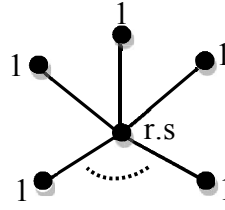
olur.

İspat. (\Rightarrow) $NK(G) = p$ olsun. $NK(G) = p = p \cdot 1^k$, $k \geq 0$ yazılabilir. Yani bir köşenin derecesi p olup diğer köşelerin derecesi 1 'dir. Bu da G grafinin S_{p+1} olmasıyla mümkündür.



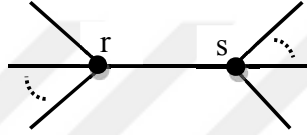
Şekil 4.2. S_{p+1} grafi

(\Leftarrow) Olmayana ergi metodunu kullanalım. $m = NK(G)$ asal olmasın. m 'nin en az iki tane asal çarpanı vardır. Bunlara r ve s dersek $m = r \cdot s$ 'dir. Bu durumda en azından iki adet graf çizilebilir. Bunlar $d(u) = r \cdot s$ olmak üzere



Şekil 4.3. $S_{m+1} = S_{rs+1}$ grafi

ve $d(u) = r$, $d(v) = s$ olmak üzere



Şekil 4.4. $S_{r,s}$ grafi

graflarıdır. Bu da $N_n > 1$ olduğunu gösterir. Olmayana ergi metoduna göre $N_n = 1$ iken $NK(G) = p$ asal olmak zorundadır.

4.3. Narumi-Katayama İndeksi İki Asal Sayının Çarpımı Olan Graflar

Teorem 4.3.1. p ve q farklı olmak zorunda olmayan iki asal olsun. $n = p \cdot q$ için

$$NK(G) = p \cdot q \Leftrightarrow N_n = 2$$

olur.

İspat. $(\Rightarrow) NK(G) = p \cdot q$ olsun.

İlk olarak $p = q$ ise $NK(G) = p^2$ olur. Yani

$$NK(G) = p^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \text{ veya } NK(G) = p \cdot p \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$$

elde edilir. Bu durumda olası graflardan ilki S_{p^2+1} ; ikincisi $S_{p,p}$ olmak zorundadır. Böylece

$$NK(G) = p^2 \quad \text{ise} \quad N_p^2 = 2$$

olur.

İkinci olarak $p \neq q$ ise $NK(G) = p \cdot q$ olur. Yani

$$NK(G) = pq \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \quad \text{veya} \quad NK(G) = p \cdot q \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$$

olur. Bu durumda iki olası graf S_{pq+1} ve $S_{p,q}$ olur. Böylece her durumda

$$N_{pq} = 2$$

olur.

(\Leftrightarrow) Olmayana ergi metodunu kullanacağız. $NK(G) \neq p \cdot q$ olsun. Yani $NK(G) = 1$, $NK(G) = p$ veya $NK(G)$ 'nin en az üç asal çarpanı olsun.

$NK(G) = 1$ olması sadece E_1 (bir köşeli boş graf) için mümkündür ki bu da P_1 'e eşittir. Yani $N_n = 1$ 'dir.

$NK(G) = p$ asal ise Teorem 4.2.1. gereği $N_p = 1$ 'dir.

Son olarak $NK(G)$ 'nin en az üç asal çarpanı olsun ve bunlara r, s, t diyelim. O halde en azından $S_{r,s,t+1}, S_{r,s,t}, S_{r,t,s}, \dots$ grafları çizilebilir ve daha fazla çarpan olması durumunda bunlara başka grafların ekleneceği açıktır. Yani $N_n > 2$ 'dir. Olmayana ergi metoduna göre $N_n = 2$ iken $NK(G) = p \cdot q$ olmalıdır.

Sonuç 4.3.2. p asal olsun.

$$NK(G) = p^2 \quad \text{iken} \quad N_n = 2$$

olur.

İspat. Teorem 4.3.1.'de $p = q$ alınırsa $NK(G) = p^2$ iken $N_n = 2$ 'dir.

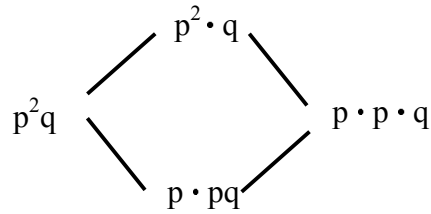
4.4. Narumi-Katayama İndeksi Bir Asal Sayının Karesi ile Bir Diğer Asal Sayının Çarpımı Olan Graflar

Teorem 4.4.1. $n = p^2 \cdot q$, $p \neq q$ asal olmak üzere

$$N_n = 6$$

olur.

İspat.



Şekil 4.5. $p^2 \cdot q$ 'nin farklı çarpanları

- n 'nin p^2q yazılımı için S_{p^2q+1} olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p^2 \cdot q$ yazılımı için $S_{p^2,q}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p \cdot pq$ yazılımı için $S_{p,pq}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p \cdot p \cdot q$ yazılımı için

$$p \cdot p \cdot q$$

$$p \cdot q \cdot p$$

$$q \cdot p \cdot p$$

çarpımları elde edilir. Bu üç çarpımdan $p \cdot p \cdot q$ 'dan elde edilecek graf ile $q \cdot p \cdot p$ 'dan elde edilecek graf birbirinin simetriğidir.



Şekil 4.6. $S_{p,p,q}$ ve $S_{q,p,p}$ grafları

Böylece iki farklı $S_{p,p,q}$ ve $S_{p,q,p}$ grafları elde edilir. Teorem 4.1.1.'den elde edilecek düzenli olmayan devir grafi için $C_{p,p,q}$ ile $C_{p,q,p}$ simetrik olduğundan $C_{p,p,q}$ dışında graf yoktur.

n 'nin $p \cdot p \cdot q$ yazılımında $S_{p,p,q}$, $S_{p,q,p}$ ve $C_{p,p,q}$ dışında graf yoktur.

Sonuç olarak $n = p^2 \cdot q$, $p \neq q$ asalları için toplam altı tane olası graf mevcuttur.

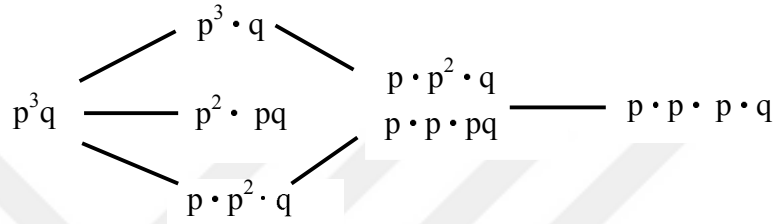
4.5. Narumi-Katayama İndeksi Bir Asal Sayının Kübü ile Bir Diğer Asal Sayının Çarpımı Olan Graflar

Teorem 4.5.1. $n = p^3 \cdot q$, $p \neq q$ ($p, q > 3$) asal olmak üzere

$$N_n = 19$$

olur.

İspat.



Şekil 4.7. p^3q 'nin farklı çarpanları

- n 'nin p^3q yazılımı için $S_{p^3, q+1}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p^3 \cdot q$ yazılımı için $S_{p^3, q}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p^2 \cdot pq$ yazılımı için $S_{p^2, pq}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p \cdot p^2q$ yazılımı için S_{p, p^2q} olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p \cdot p^2 \cdot q$ yazılımı için

$$\begin{aligned}
 & p \cdot p^2 \cdot q \\
 & p \cdot q \cdot p^2 \\
 & p^2 \cdot p \cdot q \\
 & p^2 \cdot q \cdot p \\
 & q \cdot p^2 \cdot p \\
 & q \cdot p \cdot p^2
 \end{aligned}$$

çarpımları elde edilir. Bu 6 çarpımın 3'ünden elde edilecek graflar diğer 3'ünden elde edilecek grafların simetriği olduğundan 3 farklı $S_{p, p^2, q}$, S_{p, q, p^2} ve $S_{p^2, p, q}$ grafları elde edilir. Teorem 4.1.1. gereği $p \cdot p^2 \cdot q$ yazılımından bir tek $C_{p, p^2, q}$ grafi elde edilir.

n 'nin $p \cdot p^2 \cdot q$ yazılımı için $S_{p, p^2, q}$, S_{p, q, p^2} , $S_{p^2, p, q}$ ve $C_{p, p^2, q}$ dışında graf yoktur.

- n 'nin $p \cdot p \cdot pq$ yazılımı için

$$p \cdot p \cdot pq$$

$$p \cdot pq \cdot p$$

$$pq \cdot p \cdot p$$

çarpımları elde edilir. Bu 3 çarpımdan $p \cdot p \cdot pq$ ile $pq \cdot p \cdot p$ 'den elde edilecek graflar simetrik olduğundan 2 farklı $S_{p,p,pq}$, $S_{p,pq,p}$ grafları elde edilir. Teorem 4.1.1. gereği $p \cdot p \cdot pq$ yazılımından bir tek $C_{p,p,pq}$ grafi elde edilir.

n 'nin $p \cdot p \cdot pq$ yazılımı için $S_{p,p,pq}$, $S_{p,pq,p}$, $C_{p,p,pq}$ dışında graf yoktur.

- n 'nin $p \cdot p \cdot p \cdot q$ yazılımı için

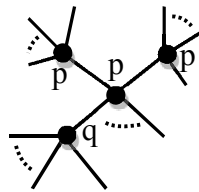
$$p \cdot p \cdot p \cdot q$$

$$p \cdot p \cdot q \cdot p$$

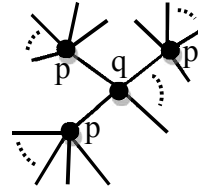
$$p \cdot q \cdot p \cdot p$$

$$q \cdot p \cdot p \cdot p$$

çarpımları elde edilir. Bu 4 çarpımdan ilk 2'sinden elde edilecek graflar diğer 2'sinden elde edilecek grafların simetriği olduğundan 2 farklı $S_{p,p,p,q}$, $S_{p,p,q,p}$ grafları elde edilir. Ayrıca;



p merkezde



q merkezde

Şekil 4.8. p merkezli ve q merkezli graflar

p 'nin ve q 'nun merkezde olduğu p merkezli ve q merkezli graflar vardır. Teorem 4.1.1. gereği 2'den büyük 4 sayı olduğundan üçlü ya da dörtlü devirler oluşturabiliriz. Üçlü devirler p, p, p veya p, p, q şeklindedir. Birincisinin herhangi bir köşesine q dereceli bir köşe birleştirilebilir. İkincinin ise p dereceli köşelerinden birine ya da q dereceli köşeye p dereceli dördüncü köşe birleştirilebilir. Yani toplam 3 grafta üçgen bulunur. Dörtlü devir için ise bir tek ihtimal vardır.

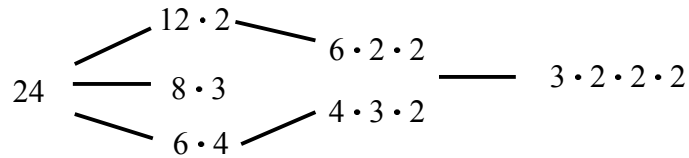
n 'in $p \cdot p \cdot p \cdot q$ yazılımı için $S_{p,p,p,q}$, $S_{p,p,q,p}$, p merkezli ve q merkezli graflar,

üç tane üçgen devir graf ve bir tane dörtgen devir graf vardır.

Sonuç olarak $n = p^3 \cdot q$, $p \neq q$ ($p, q > 3$) asalları için toplam 19 tane olası graf mevcuttur.

4.5.2. Özel Durumlar

1) $p = 2$ ve $q = 3$ için $NK(G) = 2^3 \cdot 3$ iken $N_n = 16$ olur.

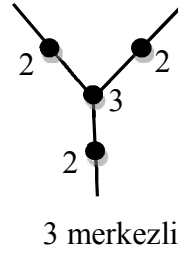


Şekil 4.9. 24'ün farklı çarpanları

yazılımları için S_{25} , $S_{12,2}$, $S_{8,3}$, $S_{6,4}$, $S_{6,2,2}$, $S_{2,6,2}$, $C_{6,2,2}$, $S_{4,3,2}$, $S_{4,2,3}$, $S_{2,4,3}$,

$C_{4,2,3}$ grafları p^3q , $p^3 \cdot q$, $p^2 \cdot pq$, $p \cdot p^2q$ çarpımlarından gelen graflardır.

$p \cdot p \cdot p \cdot q$ yazılımında ise $S_{3,2,2,2}$, $S_{2,3,2,2}$ ve 3 merkezli Şekil 4.10. grafi mevcuttur.



Şekil 4.10. 3 merkezli graf

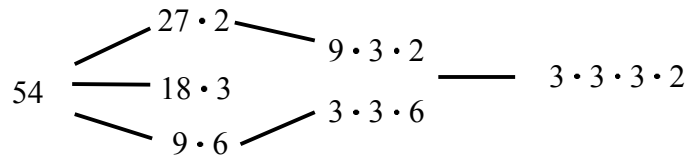
Teoremden verilen ifadeden farklı olarak 2'nin merkezde olduğu graf bulunmamaktadır. Teorem 4.1.1.'den ise sadece Şekil 4.11.'deki graflar geldiği için aynı şekilde verilen ifadeden farklıdır.



Şekil 4.11. Düzenli olmayan devir graflar

Sonuç olarak $NK = 2^3 \cdot 3$ iken $N_n = 16$ olur.

2) $p = 3$ ve $q = 2$ için $NK(G) = 3^3 \cdot 2$ iken $N_n = 17$ olur.

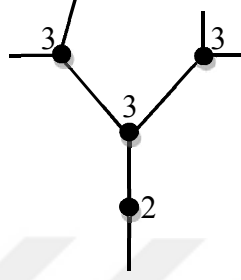


Şekil 4.12. 54'nin farklı çarpanları

yazılımları için $S_{55}, S_{27,2}, S_{18,3}, S_{9,6}, S_{9,3,2}, S_{9,2,3}, S_{2,9,3}, C_{2,9,3}, C_{3,3,6}, S_{3,3,6}$,

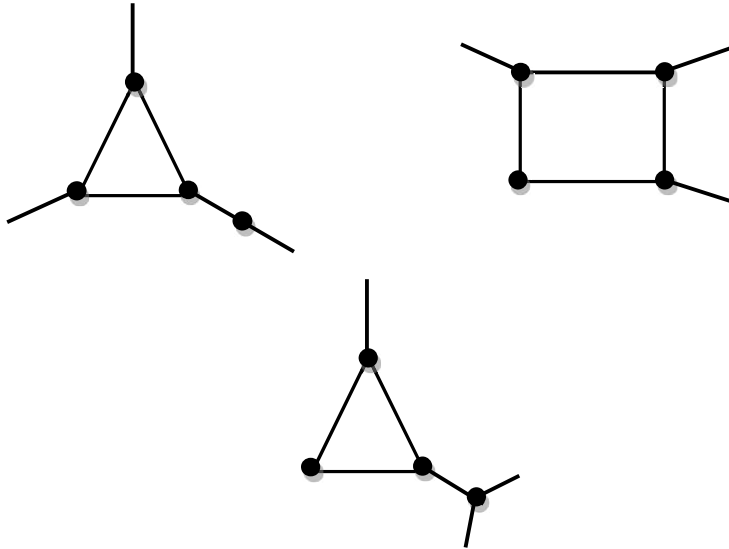
$S_{3,6,3}$ grafları p^3q , $p^3 \cdot q$, $p^2 \cdot pq$, $p \cdot p^2q$ çarpımlarından gelen graflardır.

$p \cdot p \cdot p \cdot q$ yazılımında ise $S_{3,3,3,2}$, $S_{3,3,2,3}$ ve Şekil 4.13. grafi mevcuttur.



Şekil 4.13. 3 merkezli graf

Teoremde verilen ifadeden farklı olarak 2'nin merkezde olduğu graf bulunmamaktadır. Teorem 4.1.1.'den ise sadece Şekil 4.14.'deki graflar geldiği için aynı şekilde verilen ifadeden farklıdır.



Şekil 4.14. Düzenli olmayan devir graflar

Sonuç olarak $NK = 3^3 \cdot 2$ iken $N_n = 17$ olur.

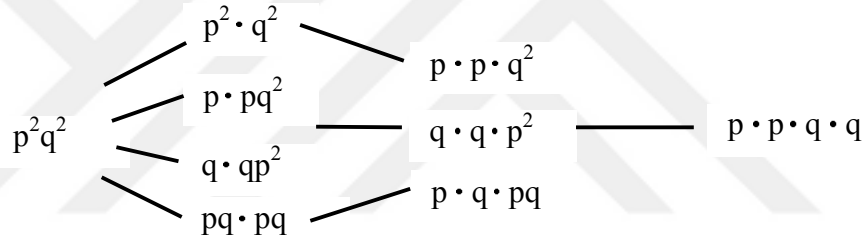
4.6. Narumi-Katayama İndeksi İki Asal Sayının Karelerinin Çarpımı Olan Graflar

Teorem 4.6.1. p ve q farklı tek asallar olmak üzere $NK(G) = p^2 \cdot q^2$ ise

$$N_n = 27$$

olur.

İspat.



Şekil 4.15. p^2q^2 'nin farklı çarpanları

- n 'nin p^2q^2 yazılımı için $S_{p^2q^2+1}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p^2 \cdot q^2$ yazılımı için S_{p^2, q^2} olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p \cdot pq^2$ yazılımı için S_{p, pq^2} olabilecek tek graftır.
- n 'nin $q \cdot qp^2$ yazılımı için S_{q, qp^2} olabilecek tek graftır.
- n 'nin $pq \cdot pq$ yazılımı için $S_{pq, pq}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p \cdot p \cdot q^2$ yazılımı için

$$p \cdot p \cdot q^2$$

$$p \cdot q^2 \cdot p$$

$$q^2 \cdot p \cdot p$$

çarpımları elde edilir. Bu 3 çarpımın 2'sinden birbirinin simetriği olmayan 2 farklı S_{p,p,q^2} ve $S_{p,q^2,p}$ grafları elde edilir. Teorem 4.1.1. gereği $p \cdot p \cdot q^2$ yazılımından bir tek C_{p,p,q^2} grafi elde edilir.

n'nin $p \cdot p \cdot q^2$ yazılımı için S_{p,p,q^2} , $S_{p,q^2,p}$ ve C_{p,p,q^2} dışında graf yoktur.

- n'nin $q \cdot q \cdot p^2$ yazılımı için aynı şekilde S_{q,q,p^2} , $S_{q,p^2,q}$ ve C_{q,q,p^2} dışında graf yoktur.
- n'nin $p \cdot q \cdot pq$ yazılımı için

$p \cdot q \cdot pq$

$p \cdot pq \cdot q$

$q \cdot pq \cdot p$

$q \cdot p \cdot pq$

$pq \cdot q \cdot p$

$pq \cdot p \cdot q$

çarpımları elde edilir. Bu 6 çarpımdan birbirinin simetriği olmayan 3 farklı $S_{p,q,pq}$, $S_{p,pq,q}$, $S_{pq,p,q}$ grafları elde edilir. Teorem 4.1.1. gereği $p \cdot q \cdot pq$ yazılımından bir tek $C_{p,q,pq}$ grafi elde edilir.

n'nin $p \cdot q \cdot pq$ yazılımı için $S_{p,q,pq}$, $S_{p,pq,q}$, $S_{pq,p,q}$ ve $C_{p,q,pq}$ dışında graf yoktur.

- n 'nin $p \cdot p \cdot q \cdot q$ yazılımı için

$$p \cdot p \cdot q \cdot q$$

$$p \cdot q \cdot p \cdot q$$

$$p \cdot q \cdot q \cdot p$$

$$q \cdot p \cdot p \cdot q$$

$$q \cdot p \cdot q \cdot p$$

$$q \cdot q \cdot p \cdot p$$

çarpımları elde edilir. Bu 6 çarpımdan birbirinin simetriği olmayan 4 farklı

$$S_{p,p,q,q}, S_{p,q,p,q}, S_{p,q,q,p}, S_{q,p,p,q}$$

grafları elde edilir. Ayrıca;



Şekil 4.16. p merkezli ve q merkezli graflar

p 'nin ve q 'nin merkezde olduğu p merkezli ve q merkezli graflar vardır. Teorem 4.1.1. gereği 2'den büyük 4 sayı olduğundan üçlü ya da dördlü devirler oluşturabiliriz. Üçlü devirler p, p, q veya q, q, p şeklindedir. Birincisinin q köşesine q dereceli bir köşe ya da p köşesine q dereceli bir köşe birleştirilebilir. İkincinin ise q dereceli köşesine p dereceli bir köşe ya da p köşesine p dereceli bir köşe birleştirilebilir. Yani toplam 4 grafla üçgen bulunur. Dördlü devirler ise ardışık köşeler olarak p, p, q, q ve p, q, p, q şeklindedir.

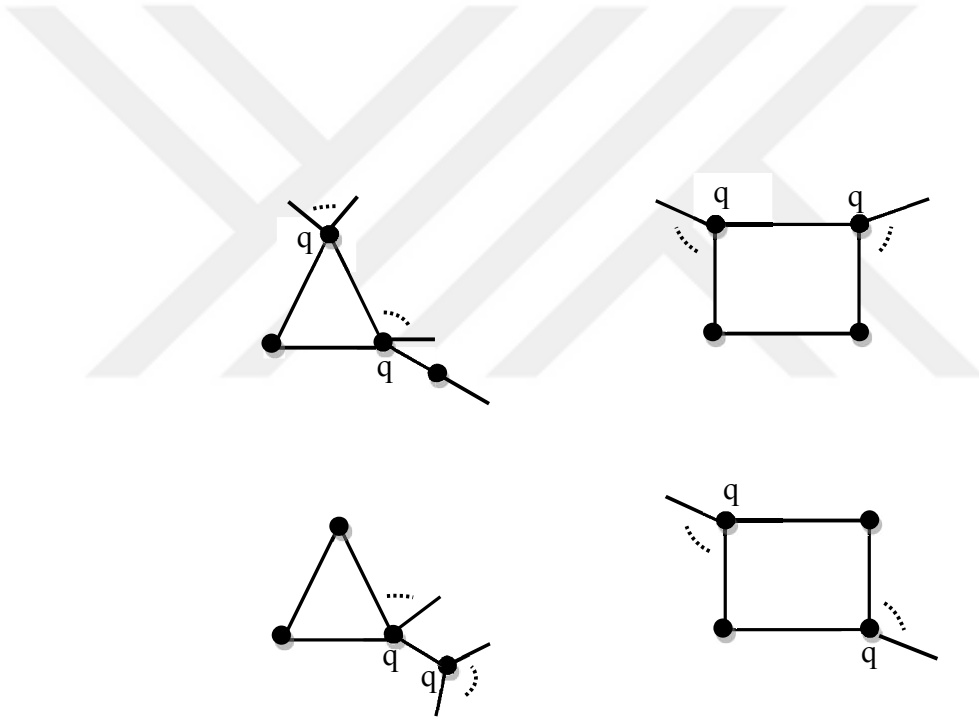
n 'nin $p \cdot p \cdot q \cdot q$ yazılımı için 12 grafla mevcuttur.

Sonuç olarak $NK(G) = p^2 \cdot q^2$, p ve q farklı tek asalları için $N_n = 27$ olur.

4.6.2. Özel Durum

$p = 2$ olsun. q bir tek asal sayı olmak üzere $NK(G) = 2^2 \cdot q^2$ için $S_{p^2 \cdot q^2 + 1}$, $S_{p^2 \cdot q^2}$, $S_{p \cdot pq^2}$, $S_{q \cdot qp^2}$, $S_{pq \cdot pq}$, $S_{p \cdot p \cdot q^2}$, $S_{p \cdot q^2 \cdot p}$, $C_{p \cdot p \cdot q^2}$, $S_{q \cdot q \cdot p^2}$, $S_{q \cdot p^2 \cdot q}$, $C_{q \cdot q \cdot p^2}$, $S_{p \cdot q \cdot pq}$, $S_{p \cdot pq \cdot q}$, $S_{pq \cdot p \cdot q}$, $C_{p \cdot q \cdot pq}$ grafları $p^2 q^2$, $p^2 \cdot q^2$, $p \cdot pq^2$, $q \cdot qp^2$, $pq \cdot pq$, $p \cdot p \cdot q^2$, $q \cdot q \cdot p^2$, $p \cdot q \cdot pq$ çarpımlarından gelen graflardır.

$p \cdot p \cdot q \cdot q$ yazılımında ise $S_{p \cdot p \cdot q \cdot q}$, $S_{p \cdot q \cdot p \cdot q}$, $S_{p \cdot q \cdot q \cdot p}$, $S_{q \cdot p \cdot p \cdot q}$ ve q merkezli graf mevcuttur. Teoremden verilen ifadeden farklı olarak 2 merkezli graf bulunmamaktadır. Teorem 4.1.1. gereği ise Şekil 4.17'deki 4 tane graf geldiği için verilen ifadeden farklıdır.



Şekil 4.17. Düzenli olmayan devir graflar

Sonuç olarak $NK(G) = 2^2 \cdot q^2$ iken $N_n = 24$ olur.

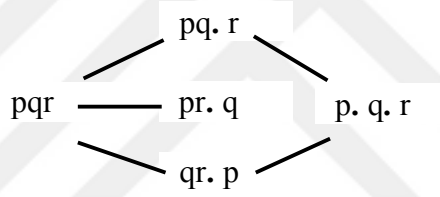
4.7. Narumi-Katayama İndeksi Üç Asal Sayının Çarpımı Olan Graflar

Teorem 4.7.1. p, q, r farklı asallar olmak üzere $NK(G) = p \cdot q \cdot r$ ise

$$N_n = 8$$

olur.

İspat.



Şekil 4.18. pqr 'nin farklı çarpanları

- n 'nin pqr yazılımı için S_{pqr+1} olabilecek tek graftır.
- n 'nin $pq \cdot r$ yazılımı için $S_{pq, r}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $pr \cdot q$ yazılımı için $S_{pr, q}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $qr \cdot p$ yazılımı için $S_{qr, p}$ olabilecek tek graftır.
- n 'nin $p \cdot q \cdot r$ yazılımı için

$$p \cdot q \cdot r$$

$$p \cdot r \cdot q$$

$$q \cdot r \cdot p$$

$$q \cdot p \cdot r$$

$$r \cdot p \cdot q$$

$$r \cdot q \cdot p$$

Çarpımları elde edilir. Bu 6 çarpımdan birbirinin simetriği olmayan 3 farklı $S_{p,q,r}$, $S_{p,r,q}$ ve $S_{q,p,r}$ grafları elde edilir. Teorem 4.1.1. gereği $p \cdot q \cdot r$ yazılımindan bir tek $C_{p,q,r}$ grafi elde edilir.

Sonuç olarak $NK(G) = p \cdot q \cdot r$ (p, q, r farklı asallar olmak üzere) $N_n = 8$

olur.

KAYNAKLAR

Azari, M., Iranmanesh, A., 2013. Computing the eccentric-distance sum for graph operations, *Discrete Applied Mathematics*, **161** (2013), 2827-2840.

Azari, M., 2014. Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations, *Applied Mathematics and Computation*, **239** (2014), 409-421.

Balakrishnan, R., Ranganathan, K. 2012. A Textbook of Graph Theory (Second Edition), Springer, New York.

Berge, C., 2001. The Theory of Graphs, Fletcher & Son Ltd., UK.

Biggs, N. L., Lloyd, E. K., Wilson, R. J. 1986. Graph Theory 1736-1936, Oxford University Press, London.

Bollobas, B., 1998. Modern Graph Theory, Springer, New York.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 2008. Graph Theory, Springer, New York.

Chen, W., 1976. Applied Graph Theory, North-Holland Publishing Company, New York.

Fath-Tabar, G. H., Vaez-Zadeh, B., Ashrafi, A. R., Graovac, A., 2011. Some inequalities for the atom-bond connectivity index of graph operations, *Discrete Applied Mathematics*, **159** (2011), 1323-1330.

Foulds, L. R. 1992. Graph Theory Applications. Springer, New York.

Golumbic, M. C., Hartman, I. B., 2005. Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, Springer, New York.

Harary, F. 1994. Graph Theory. Addison-Wesley, USA.

Harris, J. M., Hirst, J. L., Mossinghoff, M. J., 2008. Combinatorics and Graph Theory, Springer, New York.

West, D. B. 1996. Introduction to Graph Theory, Upper Saddle River, Prentice Hall.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Merve AŞÇIOĞLU

Doğum Yeri ve Tarihi : Yıldırım/BURSA, 15/05/1991

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ulubatlı Hasan Anadolu Lisesi, 2005-2009

Lisans : Uludağ Üniversitesi, 2009-2014

Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi, 2014-...

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler MYO (yarı-zamanlı), 2015-...

İletişim (e-posta) : mascioglu@uludag.edu.tr