

IE^4 DEKİ YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

BETÜL BULCA



T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

IE^4 DEKİ YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Betül BULCA

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2012
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Betül BULCA tarafından hazırlanan “ IE^4 deki Yüzeyle Bir Karakterizasyonu” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Üye: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ
Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

İmza

Üye: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR
Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Doç. Dr. Orhan GÜRLER
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../....

İmza

Betül BULCA

ÖZET

Doktora Tezi

E^4 DEKİ YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Betül BULCA

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu çalışmada E^4 deki yüzeylerin 1. ve 2. temel form katsayıları yardımıyla bazı sınıflandırmaları verilmiştir. Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde E^4 deki yüzeyler ele alınmıştır. Bu bölüm 7 kısımdan oluşmaktadır. Bunlar sırasıyla rotasyon yüzeyleri, Vranceanu yüzeyleri, regle yüzeyleri, Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyleri, kanal yüzeyleri, meridyen yüzeyleri ve tensör çarpım yüzeyleridir. Dördüncü bölüm orijinal sonuçlar içermekte olup bu bölümde, üçüncü bölümde ele alınan yüzeylerden 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip olup olmadıkları incelenmiştir. Beşinci bölümde E^4 deki yüzeylerin eğrilik elipsleri ele alınmıştır. Üçüncü bölümde ele alınan yüzeylerin eğrilik elipsleri karakterize edilmiştir. Bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Son bölümde üçüncü bölümde ele alınan yüzeylerin Ganchev-Milousheva değişmezleri hesaplanmış, bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: W-eğrileri, Regüler Yüzey, Gauss Eğriliği, Ortalama Eğrilik, Normal Eğrilik, Eğrilik Elipsi

2012, ix + 111 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

A CHARACTERIZATION OF A SURFACES IN E^4

Betul BULCA

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

In this thesis, some characterizations of the surfaces in E^4 with the help of coefficients of the first and second fundamental form are given. This thesis consists of six chapters. First chapter is introduction. In the second chapter some basic definitions and theorems which will be used in the other chapters are given. In the third chapter surfaces in E^4 are considered. This chapter consists of seven part. These are respectively rotation surfaces, Vranceanu surfaces, ruled surfaces, Ganchev-Milousheva rotational surfaces, canal surfaces, meridian surfaces and tensor product surfaces. The fourth section contains the original results. In this section, the third section dealt with whether the surfaces is examined with 1-type Gauss map. In the fifth chapter the curvature ellipses of surfaces in E^4 are discussed. The curvature of the ellipses of the surfaces which is discussed in the third chapter has been characterized. Some of the original results are obtained. In the final chapter Ganchev-Milousheva invariants of the surfaces which is examined in the third chapter are calculated.

Key words: W-curves, Regular Surface, Gauss curvature, Mean Curvature, Normal curvature, Ellipse of curvature
2012, ix + 111 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca sağlam bir bilgi birikimine sahip olmamı sağlayan, doktora tez konusunun belirlenmesinde ve kayda değer sonuçlar elde edebileceğimiz problemlerin ortaya atılmasında çok büyük katkıları olan ve bu tez çalışmasının ortaya çıkışından son haline gelene kadar gerek akademik bilgisiyle gerek de manevi desteğiyle yanımda olduğunu hep gösteren hocam Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a teşekkürü bir borç bilirim. Bu alanda her anlamda doğru, kendinden emin ve bilgili olmamda en büyük pay saygıdeğer hocama aittir. Ayrıca bilgi birikimiyle bana birçok konuda yardımcı olan, her zaman fikirlerine başvurduğum Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a teşekkür ederim.

Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anne ve babama ayrıca teşekkür ederim.

Betül BULCA

.. / .. /

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.0. Giriş	2
2.1. E^4 de Eğriler.....	2
2.3. E^n de Yüzeyleyler	8
3. E^4 DE YÜZEYLER.....	19
3.0. Giriş	19
3.1. E^4 de Genelleştirilmiş Rotasyon Yüzeyleyler	19
3.2. E^4 de Vranceanu Yüzeyleyler	27
3.3. E^4 de Regle Yüzeyleyler	30
3.4. E^4 de Ganchev-Milousheva Rotasyon Yüzeyleyler.....	34
3.5. E^4 de Tensör Çarpım Yüzeyleyler.....	42
3.6. E^4 de Kanal Yüzeyleyler.....	46
3.7. E^4 de Meridyen Yüzeyleyler	51
4. E^4 DE 1-TİPİNDE GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP OLAN YÜZEYLER	55
4.0. Giriş	55
4.1. E^4 de Bir Yüzeyleylin Gauss Dönüşümü.....	55
4.2. E^4 de 1-tipinde Gauss Dönüşümüne Sahip Olan Yüzeyleyler.....	56
4.2.1. Vranceanu Yüzeyleylin	56
4.2.2. Tensör Çarpım Yüzeyleylin	62
4.2.3. Meridyen Yüzeyleylin.....	70
4.2.4. Ganchev-Milousheva Rotasyon Yüzeyleylin.....	76
5. E^4 DEKİ YÜZEYLERİN EĞRİLİK ELİPSLERİ.....	83
5.0. Giriş	83
5.1. Yüzeyleylerin Eğrilik Elipsleril.....	83
5.2. Yüzeyleylerin Eğrilik Elipsleril ile İlgili Temel Sonuçlar	87
5.2.1. Vranceanu Yüzeyleyleril.....	88
5.2.2. Regle Yüzeyleyleril.....	89
5.2.3. Ganchev-Milousheva Rotasyon Yüzeyleyleril.....	90
5.2.4. Tensör Çarpım Yüzeyleyleril	92
5.2.5. Meridyen Yüzeyleyleril.....	93
6. E^4 DEKİ YÜZEYLERİN GANCHEV-MILOUSHEVA DEĞİŞMEZLERİ.....	94
6.0. Giriş	94
6.1. Ganchev-Milousheva Değişmezleril.....	94

6.1.1. Vranceanu Yüzeyinin Değişmezleri	97
6.1.2. Ganchev-Milousheva Rotasyon Yüzeyinin Değişmezleri.....	98
6.1.3. Tensör Çarpım Yüzeyinin Değişmezleri	98
6.1.4. Meridyen Yüzeyinin Değişmezleri.....	99
KAYNAKLAR.....	101
EKLER.....	105
ÖZGEÇMİŞ.....	110

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
E^n	n-boyutlu Öklit uzayı
γ	Eğri
V_i	Frenet vektörleri
κ_i	Frenet eğrilikleri
$\ \cdot \ $	Norm
S^3	3-küre
X	Regüler yama
M	Yüzey
g	Metrik tensör
C^∞	Diferansiyellenebilme
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^\perp(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
$C^\infty(M, R)$	M den R ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
∇	M üzerinde indirgenmiş Riemann koneksiyonu
$\tilde{\nabla}$	\tilde{M} üzerinde Riemann koneksiyon
∇^\perp	Normal koneksiyon
$\bar{\nabla}$	Van-der Waerden –Bortolotti koneksiyonu
$[,]$	Lie parantez operatörü
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
h	İkinci temel form
A_ξ	Şekil operatörü
$T_p M$	p noktasında teğet uzay
$T_p^\perp M$	p noktasında normal uzay
\bar{H}	Ortalama eğrilik vektörü
$\ H\ $	Ortalama eğrilik

c_{ij}^k	M nin ikinci temel form katsayıları
Γ_{ij}^k	M nin Christoffel sembolleri
h_{ij}^k	M nin ikinci temel form katsayıları
N_i	Normal vektörleri
K	Gauss eğriligi
K_N	Normal eğrilik
∂	Kısmi türev
R	M nin eğrilik tensörü
\tilde{R}	\tilde{M} nin eğrilik tensörü
R^\perp	NM üzerindeki eğrilik tensörü
Δ	Laplas operatörü
k	1. Ganchev-Milousheva invaryantı
τ	2. Ganchev-Milousheva invaryantı

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1.1 Blashke Yüzeyleri	25
Şekil 3.1.2.a Klein Şişesi.....	25
Şekil 3.1.2.b Banchof Yüzeyi.....	25
Şekil 3.1.2.c Döngü Yüzeyi.....	25
Şekil 3.1.3 Lawson Yüzeyleri	26
Şekil 3.1.4 r-tüp	27
Şekil 3.2.1 Vranceanu Yüzeyleri.....	27
Şekil 3.4.1 Süperquadrik Yüzeyler	36
Şekil 3.4.2 Otsuiki Küresi	38
Şekil 3.4.3 Ganchev-Milousheva Rotasyon Yüzeyleri	38
Şekil 3.6.1 Helis Eğrisinin Kanal Yüzeyi	50
Şekil 3.6.2 Genel Helis Eğrisinin Kanal Yüzeyi	50
Şekil 3.6.3 Düz Doğrunun Kanal Yüzeyi.....	50
Şekil 3.7.1a Küresel Eğri	52
Şekil 3.7.1b Meridyen Yüzeyi.....	52

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 3.3.1 Regle Yüzeyler.....	32

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı E^4 deki bazı yüzeylerin 1. ve 2. temel form katsayıları yardımıyla bazı sınıflandırmalarını vermektir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm temel kavramlar olup iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda E^4 deki bazı özel eğriler ele alınmıştır. Özellikle, E^4 deki sabit eğrilikli eğriler ve eğrilikleri oranı sabit olan eğriler incelenmiştir. Bu tür eğrilerin parametrik gösterimleri ve eğrilikleri verilmiştir. İkinci kısımda E^4 deki yüzeylerin ikinci temel formu, ortalama eğrilik fonksiyonu, Gauss ve normal eğrilikleri tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı temel özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde E^4 deki genelleştirilmiş rotasyon yüzeyleri, Vranceanu yüzeyleri, regle yüzeyleri, Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyleri, tensör çarpım yüzeyleri, kanal yüzeyleri ve meridyen yüzeylerinin 1. ve 2. temel form katsayıları hesaplanmıştır. Bu katsayılara bağlı olarak, ifade edilen yüzeylerin Gauss, ortalama ve normal eğrilikleri hesaplanmıştır. Bu eğrilikler yardımıyla yüzeylerin Wintgen ideal yüzey olması durumundaki gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde ele alınan Vranceanu yüzeyleri, Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyleri, meridyen yüzeyleri ve tensör çarpım yüzeylerinin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip olmaları ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, üçüncü bölümde ele alınan yüzeylerin eğrilik elipsleri ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiştir. Yüzey üzerindeki bir noktanın eğrilik elipsiyle olan bağlantısı ele alınıp, üçüncü bölümde verilen yüzeyler için eğrilik elipsi şartları incelenmiştir.

Son bölümde ise üçüncü bölümde ele alınan yüzeylerin Ganchev- Milousheva değişmezleri ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.0. Giriş

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda E^4 deki bazı özel eğriler ele alınmıştır. Bunlar, E^4 deki sabit eğrilikli eğriler (W-eğrileri) ve eğrilikleri oranı sabit olan eğriler (eğim eğrileri) dir. Bu tür eğrilerin parametrik gösterimleri ve eğrilikleri ile ilgili bazı hesaplamalar yapılmıştır.

İkinci kısımda E^4 de regüler bir yama ile verilen yüzeylerin ikinci temel formları, Gauss, ortalama ve normal eğrilikleri ile ilgili temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir.

2.1. E^4 de Eğriler

4-boyutlu Öklid uzayı E^4 ün regüler bir eğrisi $\gamma : I \subset R \rightarrow E^4$ (yani $\|\gamma'(t)\| \neq 0$) olsun. Eğer, γ nın yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \gamma^{iv}(t)$ lineer bağımsız ve $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \gamma^{iv}(t), \gamma^v(t)$ lineer bağımlı ise γ ya *4-ranklı Frenet eğrisi* adı verilir. Her bir 4-ranklı Frenet eğrisi γ nın $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ ortonormal 4-çatısı ve $k_1, k_2, k_3 : I \rightarrow R$, *Frenet eğrilikleri* için

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ V_4' \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Frenet denklemleri sağlanır, burada $\nu = \|\gamma'(t)\|$ dır (Gluck 1966). Bununla birlikte $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \gamma^{iv}(t)$ vektörlerine Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi uygulandığında γ eğrisinin ortonormal çatısı $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ olmak üzere bu çatının vektörleri

$$\begin{aligned}
E_1(t) &= \gamma'(t), \\
E_2(t) &= \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), E_1(t) \rangle \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|^2}, \\
E_3(t) &= \gamma'''(t) - \langle \gamma'''(t), E_1(t) \rangle \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|^2} - \langle \gamma'''(t), E_2(t) \rangle \frac{E_2(t)}{\|E_2(t)\|^2}, \\
E_4(t) &= \gamma^{(iv)}(t) - \langle \gamma^{(iv)}(t), E_1(t) \rangle \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|^2} - \langle \gamma^{(iv)}(t), E_2(t) \rangle \frac{E_2(t)}{\|E_2(t)\|^2} - \langle \gamma^{(iv)}(t), E_3(t) \rangle \frac{E_3(t)}{\|E_3(t)\|^2}
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

yardımıyla

$$V_i(t) = \frac{E_i(t)}{\|E_i(t)\|}, \quad 1 \leq i \leq 4 \tag{2.1.3}$$

biçiminde elde edilir. Böylece γ eğrisinin Frenet eğrilik fonksiyonları

$$k_{j-1}(t) = \frac{\|E_j(t)\|}{\|E_{j-1}(t)\| \|E_1(t)\|}, \quad 2 \leq j \leq 4 \tag{2.1.4}$$

yardımıyla hesaplanır.

Tanım 2.1.1: γ eğrisi 4-ranklı bir Frenet eğrisi olsun. γ nın Frenet eğrilikleri k_1, k_2, k_3 sabit ise γ ya *genelleştirilmiş vida eğrisi* ya da *helis* adı verilir (genel bir helis eğrisi tanımı için bakınız, Chen ve ark. 1992). Bu eğriler Öklid dönüşümlerinin 1-parametrelili gruplarının izleri olduklarından F. Klein ve S. Lie bu eğileri *W-eğrisi* olarak tanımlamışlardır (Klein ve Lie 1871).

Önerme 2.1.2: 4-boyutlu Öklid uzayı E^4 ün birim hızlı regüler bir eğrisi $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ olsun. Eğer γ eğrisi 4-ranklı bir W-eğrisi ise γ eğrisinin hız vektörü

$$\frac{d^4 V_1}{ds^4} + (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \frac{d^2 V_1}{ds^2} + k_1^2 k_3^2 V_1 = 0 \tag{2.1.5}$$

sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemini sağlar.

İspat: γ birim hızlı eğri olduğundan (2.1.1) eşitliği yardımıyla Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} V_1' &= k_1 V_2, \\ V_2' &= -k_1 V_1 + k_2 V_3, \\ V_3' &= -k_2 V_2 + k_3 V_4, \\ V_4' &= -k_3 V_3 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

biçimine dönüşür. Ayrıca $V_1 = \gamma'(s)$ in yüksek mertebeden türevleri yardımıyla

$$\begin{aligned} V_1'' &= -k_1^2 V_1 + k_1 k_2 V_3, \\ V_1''' &= -k_1(k_1^2 + k_2^2)V_2 + k_1 k_2 k_3 V_4, \\ V_1^{iv} &= k_1^2(k_1^2 + k_2^2)V_1 - k_1 k_2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)V_3 \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

bulunur. Böylece V_3 ikinci ve dördüncü türevlerden yok edilirse istenilen sonuç elde edilir (bkz. Aminov 2001, syf 12). \square

Önerme 2.1.3. E^4 de 2d-ranklı ($d = 1, 2$) birim hızlı W-eğrisi parametrik olarak

$$\gamma(s) = a_0 + \sum_{i=1}^2 (a_i \cos \mu_i s + b_i \sin \mu_i s) \quad (2.1.8)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 \in E^4$ de sabit vektörler ve $\mu_1 < \mu_2$ pozitif reel sayılardır. Böylece 2-ranklı W-eğrisi bir çemberdir (Chen ve ark. 1992).

Aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 2.1.4: (S^3 de helisler)

E^4 e gömülmüş birim 3-küre $S^3(1)$ ile gösterilsin. Böylece $S^3 \subset E^4$ üzerindeki helis eğrisi

$$\gamma(s) = (\cos \phi \cos(as), \cos \phi \sin(as), \sin \phi \cos(bs), \sin \phi \sin(bs)) \quad (2.1.9)$$

ile tanımlanır. Burada

$$a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi = 1 \text{ ve } x_1^2 + x_2^2 = \cos^2 \phi, x_3^2 + x_4^2 = \sin^2 \phi \quad (2.1.10)$$

dir.

Örnek 2.1.5: $\gamma : I \rightarrow E^4$

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \left(\frac{r_1}{m_1} \sin(m_1 t), -\frac{r_1}{m_1} \cos(m_1 t), \frac{r_2}{m_2} \sin(m_2 t), -\frac{r_2}{m_2} \cos(m_2 t) \right) \quad (2.1.11)$$

eğrisi $r_1^2 m_2^2 + r_2^2 m_1^2 = m_1^2 m_2^2 (r_1^2 + r_2^2)$ şartını sağladığında küresel bir W-eğrisi (yani, küre üzerinde yatan bir eğri) olur (Monterde 2007).

Örnek 2.1.6: E^4 de 4-ranklı kapalı ve birim hızlı ($2\pi r$ uzunluklu) bir W-eğrisi

$$\gamma(s) = \frac{r}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{m_1} \cos\left(\frac{m_1 s}{r}\right), \frac{1}{m_1} \sin\left(\frac{m_1 s}{r}\right), \frac{1}{m_2} \cos\left(\frac{m_2 s}{r}\right), \frac{1}{m_2} \sin\left(\frac{m_2 s}{r}\right) \right) \quad (2.1.12)$$

biçiminde parametrelendirmeye sahip bir eğridir. Burada m_1, m_2 pozitif tamsayılardır (Chen 1983).

Örnek 2.1.7: (2.1.8) eşitliği yardımıyla E^4 de 4-ranklı bir W-eğrisi aşağıdaki parametrelendirme ile verilir;

$$\gamma(v) = (a \cos cv, a \sin cv, b \cos dv, b \sin dv). \quad (2.1.13)$$

Burada, $0 \leq v \leq 2\pi$, a, b, c, d reel sabitler, $c > 0, d > 0$ dır. Genelliği bozmadan γ nın birim hızlı olması isteniyorsa $a^2 c^2 + b^2 d^2 = 1$ alınmalıdır. Böylece $c = d$ halinde γ bir çemberdir, $c \neq d$ halinde ise E^4 de bir eğridir. Bu eğrinin $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet çatısı ve k_1, k_2, k_3 Frenet eğrilikleri (2.1.2)-(2.1.4) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki şekilde hesaplanabilir;

$$\begin{aligned} \gamma'(v) &= (-ac \sin cv, ac \cos cv, -bd \sin dv, bd \cos dv), \\ \gamma''(v) &= (-ac^2 \cos cv, -ac^2 \sin cv, -bd^2 \cos dv, -bd^2 \sin dv) \\ \gamma'''(v) &= (ac^3 \sin cv, -ac^3 \cos cv, bd^3 \sin dv, -bd^3 \cos dv), \\ \gamma^{iv}(v) &= (ac^4 \cos cv, ac^4 \sin cv, bd^4 \cos dv, bd^4 \sin dv) \end{aligned}$$

türevleri yardımıyla

$$\begin{aligned} E_1(v) &= \gamma'(v) = (-ac \sin cv, ac \cos cv, -bd \sin dv, bd \cos dv), \\ E_2(v) &= \gamma''(v) - \langle \gamma''(v), E_1(v) \rangle \frac{E_1(v)}{\|E_1(v)\|^2} \\ &= (-ac^2 \cos cv, -ac^2 \sin cv, -bd^2 \cos dv, -bd^2 \sin dv), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3(v) &= \gamma'''(v) - \langle \gamma'''(v), E_1(v) \rangle \frac{E_1(v)}{\|E_1(v)\|^2} - \langle \gamma'''(v), E_2(v) \rangle \frac{E_2(v)}{\|E_2(v)\|^2} \\
&= abcd(c^2 - d^2)(bd \sin cv, -bd \cos cv, -ac \sin dv, ac \cos dv), \\
E_4(v) &= \gamma^{iv}(v) - \langle \gamma^{iv}(v), E_1(v) \rangle \frac{E_1(v)}{\|E_1(v)\|^2} - \langle \gamma^{iv}(v), E_2(v) \rangle \frac{E_2(v)}{\|E_2(v)\|^2} - \langle \gamma^{iv}(v), E_3(v) \rangle \frac{E_3(v)}{\|E_3(v)\|^2} \\
&= \frac{abc^2 d^2 (c^2 - d^2)}{a^2 c^4 + b^2 d^4} (bd^2 \cos cv, bd^2 \sin cv, -ac^2 \cos dv, -ac^2 \sin dv)
\end{aligned}$$

bulunur. Vektörlerin normları hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\|E_1(v)\| &= \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2} = 1, \quad \|E_2(v)\| = \sqrt{a^2 c^4 + b^2 d^4}, \\
\|E_3(v)\| &= abcd(c^2 - d^2), \quad \|E_4(v)\| = \frac{abc^2 d^2 (c^2 - d^2)}{\sqrt{a^2 c^4 + b^2 d^4}},
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (2.1.4) yardımıyla γ nin Frenet eğrilikleri

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\|E_2(v)\|}{\|E_1(v)\| \|E_1(v)\|} = \sqrt{a^2 c^4 + b^2 d^4}, \\
k_2 &= \frac{\|E_3(v)\|}{\|E_2(v)\| \|E_1(v)\|} = \frac{abcd(c^2 - d^2)}{\sqrt{a^2 c^4 + b^2 d^4}}, \\
k_3 &= \frac{\|E_4(v)\|}{\|E_3(v)\| \|E_1(v)\|} = \frac{cd}{\sqrt{a^2 c^4 + b^2 d^4}}
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

dir. Böylece, γ eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
V_1(v) &= \frac{E_1(v)}{\|E_1(v)\|} = (-ac \sin cv, ac \cos cv, -bd \sin dv, bd \cos dv), \\
V_2(v) &= \frac{E_2(v)}{\|E_2(v)\|} = \frac{1}{k_1} (-ac^2 \cos cv, -ac^2 \sin cv, -bd^2 \cos dv, -bd^2 \sin dv) \\
V_3(v) &= \frac{E_3(v)}{\|E_3(v)\|} = (bd \sin cv, -bd \cos cv, -ac \sin dv, ac \cos dv), \\
V_4(v) &= \frac{E_4(v)}{\|E_4(v)\|} = \frac{1}{k_1} (bd^2 \cos cv, bd^2 \sin cv, -ac^2 \cos dv, -ac^2 \sin dv)
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

biçiminde hesaplanır (Detaylı bilgi için bakınız, Ganchev ve Milousheva 2008a).

Tanım 2.1.8: γ eğrisi 4-ranklı bir Frenet eğrisi olsun. γ nın Frenet eğrilikleri oranı

$$\frac{k_2}{k_1} = \lambda, \quad \frac{k_3}{k_1} = \mu \tag{2.1.16}$$

sabit ise γ ya eğim eğrisi (*slope curve*) adı verilir (Goncharova 2008).

Monterde, 2007 yılında yaptığı çalışmasında bu tür eğrileri *eğrilikleri oranı sabit olan eğriler* yani *ccr-eğrileri* olarak adlandırmıştır (Monterde 2007). Bu eğriler ile ilgili bazı sonuçlar Öztürk ve arkadaşlarının 2008 de yaptıkları çalışmada verilmiştir (Öztürk ve ark. 2008).

Önerme 2.1.9: $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi 4-ranklı bir eğim eğrisi ise γ nın hız vektörü

$$\frac{d^4 V_1}{dt^4} + (1 + \lambda^2 + \mu^2) \frac{d^2 V_1}{dt^2} + \mu^2 V_1 = 0 \quad (2.1.17)$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemini sağlar (Goncharova 2008).

İspat: γ birim hızlı eğri olduğundan (2.1.1) eşitliği yardımıyla Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} V_1' &= k_1 V_2, \\ V_2' &= k_1 (-V_1 + \lambda V_3), \\ V_3' &= k_1 (-\lambda V_2 + \mu V_4), \\ V_4' &= -k_1 \mu V_3 \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

biçimine dönüşür. Böylece $\gamma(s)$ eğim eğrisi üzerinde $t = \int k_1 ds$ parametre değişimi yapıldığında $dt = k_1 ds$ bulunur. Buradan V_1 in yüksek mertebeden türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{dV_1}{ds} \frac{ds}{dt} = k_1 V_2 \frac{1}{k_1} = V_2, \\ \frac{d^2 V_1}{dt^2} &= \frac{dV_2}{ds} \frac{ds}{dt} = -V_1 + \lambda V_3, \\ \frac{d^3 V_1}{dt^3} &= -\frac{dV_1}{ds} \frac{ds}{dt} + \lambda \frac{dV_3}{ds} \frac{ds}{dt} = -(\lambda^2 + 1)V_2 + \lambda \mu V_4, \\ \frac{d^4 V_1}{dt^4} &= -(\lambda^2 + 1) \frac{dV_2}{ds} \frac{ds}{dt} + \lambda \mu \frac{dV_4}{ds} \frac{ds}{dt} = (\lambda^2 + 1)V_1 + \lambda(1 + \lambda^2 + \mu^2)V_3, \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece V_3 ü ikinci ve dördüncü türevlerden yok edersek istenilen sonuç bulunur. \square

Sonuç 2.1.10: $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ 4-ranklı bir eğim eğrisi olsun. Bu takdirde $\gamma(s)$ nın hız vektörü

$$V_1 = A_1 \cos v_1 t + B_1 \sin v_1 t + A_2 \cos v_2 t + B_2 \sin v_2 t \quad (2.1.19)$$

dir. Burada A_1, A_2, B_1, B_2 sabit vektörler v_1, v_2 ise λ, μ nün fonksiyonlarıdır (Goncharova 2008).

2.2. E^n de Yüzeyler

M yüzeyi $X : U \subset E^2 \rightarrow E^n$ yaması ile verilsin. M nin $p \in X(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, X_u ve X_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M nin *birinci temel formu*

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2.2.1)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

olup \langle, \rangle bir Öklid iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.2.2) yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2 \quad (2.2.3)$$

elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \neq 0$ ise $X(u, v)$ yaması *regülerdir* denir.

Şu andan itibaren aksi söylenmedikçe $X(u, v)$ yaması regüler kabul edilecektir ve

$$EG - F^2 = W^2 \quad (2.2.4)$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.1: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. E^n de Riemann koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin *ikinci temel form dönüşümü*

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M); \quad h(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \quad (2.2.5)$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.5) eşitliği *Gauss denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.2.2: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $\forall X \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi^\perp(M)$ için M nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A : \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); \quad A_\xi X = -\tilde{\nabla}_X \xi + \nabla_X^\perp \xi \quad (2.2.6)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_\xi X$, ξ ya karşılık gelen şekil operatörü ve ∇^\perp ise $\chi^\perp(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle \quad (2.2.7)$$

dir. Bu operatör self-adjoint ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.6) eşitliği *Weingarten denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Ayrıca $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için M yüzeyinin ikinci temel formu h nın kovaryant türevi

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

dir. Böylece *Codazzi denklemi*

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z) \quad (2.2.8)$$

dir (Chen 1973).

Tanım 2.2.3: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u, v)$ yamasının 2. mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} ve normal vektör alanları N_1, N_2, \dots, N_{n-2} olmak üzere M nin *ikinci temel form katsayıları*

$$\begin{aligned} c_{11}^k &= \langle X_{uu}, N_k \rangle, \\ c_{12}^k &= \langle X_{uv}, N_k \rangle, \quad 1 \leq k \leq n-2 \\ c_{22}^k &= \langle X_{vv}, N_k \rangle \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

şeklinde tanımlanır (Mello 2003).

Tanım 2.2.4: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu durumda M nin *Christoffel sembolleri* Γ_{ij}^k ($1 \leq i, j, k \leq 2$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1$ ve $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$ dir (Gray 1993).

Sonuç 2.2.5: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $F = 0$ için M nin Christoffel sembolleri

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E} = \frac{1}{E} \langle X_{uu}, X_u \rangle & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-E_v}{2G} = -\frac{1}{G} \langle X_{uv}, X_u \rangle \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E} = \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_u \rangle & \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G} = \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_v \rangle \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-G_u}{2E} = -\frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_v \rangle & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G} = \frac{1}{G} \langle X_{vv}, X_v \rangle\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

İspat: (2.2.2) ve (2.2.10) eşitliklerinden (2.2.11) elde edilir.

Önerme 2.2.6: M yüzeyi $X : U \subset R^2 \rightarrow E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun.

Bu takdirde $\forall X_u, X_v \in \mathcal{X}(M)$ ve $\{N_1, N_2, \dots, N_{n-2}\} \in \mathcal{X}^\perp(M)$ için

$$\begin{aligned}X_{uu} &= \tilde{\nabla}_{X_u} X_u = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2 + \dots + c_{11}^{n-2} N_{n-2} \\ X_{uv} &= \tilde{\nabla}_{X_u} X_v = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2 + \dots + c_{12}^{n-2} N_{n-2} \\ X_{vv} &= \tilde{\nabla}_{X_v} X_v = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2 + \dots + c_{22}^{n-2} N_{n-2}\end{aligned}\quad (2.2.12)$$

dir (Gray 1993).

Böylece (2.2.12), (2.2.5) ve (2.2.6) denklemleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.2.7: M yüzeyi $X : U \subset R^2 \rightarrow E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun.

Bu takdirde

$$\begin{aligned}h(X_u, X_u) &= c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2 + \dots + c_{11}^{n-2} N_{n-2} \\ h(X_u, X_v) &= c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2 + \dots + c_{12}^{n-2} N_{n-2} \\ h(X_v, X_v) &= c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2 + \dots + c_{22}^{n-2} N_{n-2}\end{aligned}\quad (2.2.13)$$

dir.

Sonuç 2.2.8: M yüzeyi $X : D \subset R^2 \rightarrow E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}h(X_u, X_u) &= X_{uu} - \Gamma_{11}^1 X_u - \Gamma_{11}^2 X_v \\ h(X_u, X_v) &= X_{uv} - \Gamma_{12}^1 X_u - \Gamma_{12}^2 X_v \\ h(X_v, X_v) &= X_{vv} - \Gamma_{22}^1 X_u - \Gamma_{22}^2 X_v\end{aligned}\quad (2.2.14)$$

dir.

Sonuç 2.2.9: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $F = 0$ ise bu takdirde

$$\begin{aligned} h(X_u, X_u) &= X_{uu} - \frac{1}{E} \langle X_{uu}, X_u \rangle X_u + \frac{1}{G} \langle X_{uv}, X_u \rangle X_v \\ h(X_u, X_v) &= X_{uv} - \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_u \rangle X_u - \frac{1}{G} \langle X_{uv}, X_v \rangle X_v \\ h(X_v, X_v) &= X_{vv} + \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_v \rangle X_u - \frac{1}{G} \langle X_{vv}, X_v \rangle X_v \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

İspat: (2.2.11) ve (2.2.14) eşitliklerinden (2.2.15) elde edilir.

Tanım 2.2.10: $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilen $M \subset E^n$ yüzeyinin *Gauss eğrilik fonksiyonu*

$$K = \frac{1}{W^2} \sum_{i=1}^{n-2} (c_{11}^i c_{22}^i - (c_{12}^i)^2) \quad (2.2.16)$$

dir (Mello 2009).

Tanım 2.2.11: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde her $\{X_1, X_2\} \in \chi(M)$ ve $\{N_1, N_2, \dots, N_{n-2}\} \in \chi^\perp(M)$ ortonormal bazları için M nin *ortalama eğrilik vektör alanı*

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n-2} H_i N_i \quad (2.2.17)$$

dir. Burada

$$H_i = \frac{1}{2W^2} \sum_{i=1}^{n-2} (Gc_{11}^i - 2Fc_{12}^i + Ec_{22}^i) \quad (2.2.18)$$

M nin *i.nci ortalama eğrilik fonksiyonudur*. Bununla birlikte M nin *ortalama eğrilik fonksiyonu* $H = \|\vec{H}\|$ dir (Mello 2003).

Önerme 2.2.12: M yüzeyi $X : U \subset R^2 \rightarrow E^n$ regüler yaması ile verilsin. Böylece X_1, X_2 vektörleri $T_p(M)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{X_u}{\|X_u\|}, \\ X_2 &= \frac{\sqrt{E}}{W} \left(X_v - \langle X_v, X_u \rangle \frac{X_u}{\|X_u\|^2} \right), \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

dir. Burada $W = \sqrt{EG - F^2}$ olarak (2.2.4) eşitliğinde tanımlanmıştır.

İspat. X_u, X_v vektörlerine Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi uygulandığında

$$\begin{aligned} E_1 &= X_u, \\ E_2 &= X_v - \langle X_v, X_u \rangle \frac{X_u}{\|X_u\|^2}, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

elde edilir. Buradan $X_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|}$, $X_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|}$ yardımıyla (2.2.19) sonucuna ulaşılır. \square

Böylece (2.2.19) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar bulunur.

Önerme 2.2.13: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin.

Bu takdirde $T_p(M)$ nin bir $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazı için

$$\begin{aligned} h(X_1, X_1) &= \frac{1}{E} h(X_u, X_u) \\ h(X_1, X_2) &= \frac{1}{W} h(X_u, X_v) - \frac{F}{WE} h(X_u, X_u) \\ h(X_2, X_2) &= \frac{E}{W^2} h(X_v, X_v) - \frac{2F}{W^2} h(X_u, X_v) + \frac{F^2}{W^2 E} h(X_u, X_u) \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

dir.

Önerme 2.2.14: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin.

Bu takdirde $T_p(M)$ nin bir $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazı için M nin Gauss eğriliği

$$K = \langle h(X_1, X_1), h(X_2, X_2) \rangle - \langle h(X_1, X_2), h(X_1, X_2) \rangle \quad (2.2.22)$$

dir (Chen 1973).

İspat. (2.2.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &\langle h(X_1, X_1), h(X_2, X_2) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{E} h(X_u, X_u), \frac{E}{W^2} h(X_v, X_v) - \frac{2F}{W^2} h(X_u, X_v) + \frac{F^2}{W^2 E} h(X_u, X_u) \right\rangle \\ &= \frac{1}{W^2} \langle h(X_u, X_u), h(X_v, X_v) \rangle - \frac{2F}{EW^2} \langle h(X_u, X_u), h(X_u, X_v) \rangle \\ &\quad + \frac{F^2}{W^2 E^2} \langle h(X_u, X_u), h(X_u, X_u) \rangle \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \langle h(X_1, X_2), h(X_1, X_2) \rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{W} h(X_u, X_v) - \frac{F}{WE} h(X_u, X_u), \frac{1}{W} h(X_u, X_v) - \frac{F}{WE} h(X_u, X_u) \right\rangle \\
&= \frac{1}{W^2} \langle h(X_u, X_v), h(X_u, X_v) \rangle - \frac{2F}{WE} \langle h(X_u, X_v), h(X_u, X_u) \rangle \\
&\quad + \frac{F^2}{W^2 E^2} \langle h(X_u, X_u), h(X_u, X_u) \rangle
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

bulunur. Buradan, eşitliklerin farkı alınır

$$\begin{aligned}
& \langle h(X_1, X_1), h(X_2, X_2) \rangle - \langle h(X_1, X_2), h(X_1, X_2) \rangle \\
&= \frac{1}{W^2} (\langle h(X_u, X_u), h(X_v, X_v) \rangle - \langle h(X_u, X_v), h(X_u, X_v) \rangle)
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

elde edilir. Böylece (2.2.13) yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{W^2} (\langle h(X_u, X_u), h(X_v, X_v) \rangle - \langle h(X_u, X_v), h(X_u, X_v) \rangle) \\
&= \frac{1}{W^2} \sum_{i=1}^{n-2} (c_{11}^i c_{22}^i - (c_{12}^i)^2)
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

bulunur. Buradan (2.2.26) denklemini (2.2.16) ile kıyaslandığında istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 2.2.15: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $T_p(M)$ nin bir $\{X_u, X_v\}$ bazı için M nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{W^2} (\langle h(X_u, X_u), h(X_v, X_v) \rangle - \langle h(X_u, X_v), h(X_u, X_v) \rangle) \tag{2.2.27}$$

dir.

İspat. (2.2.26) ve (2.2.16) eşitlikleri yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 2.2.16: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde her $\{X_1, X_2\} \in T_p(M)$ ortonormal bazı için M nin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{1}{2} (h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2)) \tag{2.2.28}$$

dir (Chen 1973).

İspat. (2.2.21) eşitliğinden

$$h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2) = \frac{E}{W^2} h(X_v, X_v) - \frac{2F}{W^2} h(X_u, X_v) + \frac{G}{W^2} h(X_u, X_u) \quad (2.2.29)$$

bulunur. Ayrıca (2.2.13) eşitliği (2.2.29) de kullanılırsa

$$h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2) = \frac{1}{W^2} \sum_{i=1}^{n-2} (Gc_{11}^i - 2Fc_{12}^i + Ec_{22}^i) N_i \quad (2.2.30)$$

elde edilir. Böylece (2.2.30) ile (2.2.17) kıyaslanırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 2.2.17: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $\chi(M)$ nin bir $\{X_u, X_v\}$ bazı için M nin ortalama eğrilik vektörü

$$\bar{H} = \frac{1}{2W^2} (Eh(X_v, X_v) - 2Fh(X_u, X_v) + Gh(X_u, X_u)) \quad (2.2.31)$$

dir.

İspat. (2.2.30), (2.2.29) ve (2.2.17) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Tanım 2.2.18: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $\chi(M)$ nin ortonormal bir bazı $\{X_1, X_2\}$ olmak üzere M nin *ikinci temel form katsayıları*

$$h_{ij}^k = \langle h(X_i, X_j), N_k \rangle, \quad (2.2.32)$$

ile tanımlanır (Chen 1973).

Önerme 2.2.19: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde her $\{X_1, X_2\} \in \chi(M)$ ve $\{N_1, N_2, \dots, N_{n-2}\} \in \chi^\perp(M)$ ortonormal bazıları için ikinci temel form katsayıları ($1 \leq \alpha \leq n-2$)

$$\begin{aligned} h_{11}^\alpha &= \langle h(X_1, X_1), N_\alpha \rangle = \frac{c_{11}^\alpha}{E}, \\ h_{12}^\alpha &= \langle h(X_1, X_2), N_\alpha \rangle = \frac{1}{W} \left(c_{12}^\alpha - \frac{F}{E} c_{11}^\alpha \right), \\ h_{22}^\alpha &= \langle h(X_2, X_2), N_\alpha \rangle = \frac{1}{W^2} \left(Ec_{22}^\alpha - 2Fc_{12}^\alpha + \frac{F^2}{E} c_{11}^\alpha \right) \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

dir.

İspat. (2.2.13) ve (2.2.21) denklemlerinden (2.2.33) elde edilir. \square

Sonuç 2.2.20: $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilen $M \subset E^n$ yüzeyinin N_α ya göre şekil operatörü matrisi

$$A_{N_\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{c_{11}^\alpha}{E} & \frac{1}{W} \left(c_{12}^\alpha - \frac{F}{E} c_{11}^\alpha \right) \\ \frac{1}{W} \left(c_{12}^\alpha - \frac{F}{E} c_{11}^\alpha \right) & \frac{1}{W^2} \left(E c_{22}^\alpha - 2F c_{12}^\alpha + \frac{F^2}{E} c_{11}^\alpha \right) \end{pmatrix} \quad (2.2.34)$$

dır.

İspat. (2.2.6) ve (2.2.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} A_{N_\alpha} X_1 &= \langle A_{N_\alpha} X_1, X_1 \rangle X_1 + \langle A_{N_\alpha} X_1, X_2 \rangle X_2 \\ &= \langle h(X_1, X_1), N_\alpha \rangle X_1 + \langle h(X_1, X_2), N_\alpha \rangle X_2 \\ &= h_{11}^\alpha X_1 + h_{12}^\alpha X_2 \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$A_{N_\alpha} X_2 = h_{12}^\alpha X_1 + h_{22}^\alpha X_2$$

elde edilir.

Böylece A_{N_α} şekil operatörü matrisi

$$A_{N_\alpha} = \begin{pmatrix} h_{11}^\alpha & h_{12}^\alpha \\ h_{21}^\alpha & h_{22}^\alpha \end{pmatrix} \quad (2.2.35)$$

olduğundan (2.2.33) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Önerme 2.2.21: $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilen $M \subset E^n$ yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \det(A_{N_1} + A_{N_2} + \dots + A_{N_{n-2}}) \quad (2.2.36)$$

dir (Chen 1973).

İspat. (2.2.35) matrisinin determinantı alınıp (2.2.33) eşitliğindeki değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \det(A_{N_1} + A_{N_2} + \dots + A_{N_{n-2}}) \\
&= h_{11}^1 h_{22}^1 - (h_{12}^1)^2 + h_{11}^2 h_{22}^2 - (h_{12}^2)^2 + \dots + h_{11}^{n-2} h_{22}^{n-2} - (h_{12}^{n-2})^2 \\
&= \frac{1}{W^2} \sum_{i=1}^{n-2} (c_{11}^i c_{22}^i - (c_{12}^i)^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Önerme 2.2.22: $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilen $M \subset E^n$ yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \{ \dot{I}z(A_{N_1})N_1 + \dot{I}z(A_{N_2})N_2 + \dots + \dot{I}z(A_{N_{n-2}})N_{n-2} \} \quad (2.2.37)$$

dir (Chen 1973).

İspat. (2.2.34) de verilen matrisler (2.2.36) de yerine yazılırsa (2.2.17) elde edilir. Bu da bize istenilen sonucu verir. \square

Tanım 2.2.23: $M \subset E^n$ yüzeyi ile normal demeti $\chi^\perp(M)$ nin *eğrilik tensörleri* sırasıyla

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.2.38)$$

ve

$$R^\perp(X, Y)\xi = h(X, A_\xi Y) - h(Y, A_\xi X), \quad \xi \in \chi^\perp(M) \quad (2.2.39)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ ve $\xi, \eta \in \chi^\perp(M)$ için $M \subset E^n$ yüzeyinin *Gauss* ve *Ricci* denklemleri sırasıyla

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle - \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle, \quad (2.2.40)$$

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle \quad (2.2.41)$$

dir (Chen 1973).

Burada $[\cdot, \cdot]$ *Lie parantez operatörü*

$$\begin{aligned}
[\cdot, \cdot] : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\
(X, Y) &\mapsto [X, Y] = XY - YX = \nabla_X Y - \nabla_Y X
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $R^\perp = 0$ ise M yüzeyi *düz (flat) normal koneksiyonludur* denir.

Tanım 2.2.24: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $\chi(M)$ ve $\chi^\perp(M)$ uzaylarının $\{X_1, X_2\}$ ve $\{N_\alpha\}, 1 \leq \alpha \leq n-2$ ortonormal bazları için M nin *normal eğriliği*

$$K_N = \left\{ \sum_{1=\alpha<\beta}^{n-2} \langle R^\perp(X_1, X_2)N_\beta, N_\alpha \rangle^2 \right\}^{1/2} \quad (2.2.42)$$

şeklinde tanımlanır (DeSmet ve ark. 1999).

Açıklama 2.2.25: $M \subset E^4$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $\chi(M)$ ve $\chi^\perp(M)$ uzaylarının $\{X_1, X_2\}$ ve $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları için M nin *normal eğriliği*

$$K_N = \langle R^\perp(X_1, X_2)N_2, N_1 \rangle \quad (2.2.43)$$

şeklinde tanımlanır (Guadalupe ve Rodriguez 1983).

Önerme 2.2.26: $X(u, v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \subset E^4$ yüzeyinin normal eğriliği

$$K_N = h_{12}^1(h_{22}^2 - h_{11}^2) + h_{12}^2(h_{11}^1 - h_{22}^1) \quad (2.2.44)$$

dir .

İspat. (2.2.39) eşitliği yardımıyla

$$R^\perp(X_1, X_2)N_2 = h(X_1, A_{N_2}X_2) - h(X_2, A_{N_2}X_1) \quad (2.2.45)$$

elde edilir. Böylece (2.2.45) in N_1 ile iç çarpımından

$$\begin{aligned} \langle R^\perp(e_1, e_2)N_2, N_1 \rangle &= \langle h(X_1, A_{N_2}X_2), N_1 \rangle - \langle h(X_2, A_{N_2}X_1), N_1 \rangle \\ &= \langle A_{N_1}X_1, A_{N_2}X_2 \rangle - \langle A_{N_1}X_2, A_{N_2}X_1 \rangle \\ &= \langle h_{11}^1X_1 + h_{12}^1X_2, h_{12}^2X_1 + h_{22}^2X_2 \rangle - \langle h_{12}^1X_1 + h_{22}^1X_2, h_{11}^2X_1 + h_{12}^2X_2 \rangle \\ &= h_{11}^1h_{12}^2 + h_{12}^1h_{22}^2 - h_{12}^1h_{11}^2 - h_{22}^1h_{12}^2 \\ &= h_{12}^1(h_{22}^2 - h_{11}^2) + h_{12}^2(h_{11}^1 - h_{22}^1) \end{aligned}$$

bulunur. \square

Sonuç 2.2.27: $M \subset E^4$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $K_N = 0$ olması için gerek ve yeter şart $R^\perp = 0$ olmasıdır.

Önerme 2.2.28: $X(u, v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \subset E^4$ yüzeyinin normal eğrilik fonksiyonu

$$K_N = \frac{E(c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{12}^2 c_{22}^1) - F(c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{11}^2 c_{22}^1) + G(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{11}^2 c_{12}^1)}{W^3} \quad (2.2.46)$$

dir.

İspat. (2.2.33) deki eşitlikler (2.2.44) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 2.2.29: $X(u, v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \subset E^4$ yüzeyinin normal eğrilik fonksiyonu

$$K_N = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^2 (c_{1i}^1 c_{2j}^2 - c_{2i}^1 c_{1j}^2) g^{ij} \quad (2.2.47)$$

dır. Burada

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}, \quad g = \det(g_{ij}) = W^2$$

dır (Aminov 2001).

Açıklama 2.2.30: Normal eğrilik fonksiyonu K_N aynı zamanda *Gauss torsiyonu* olarak da bilinir. (Detaylı bilgi için bkz. Aminov 2001) $K_N(p) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $p \in M$ noktasının yarı-umbilik olmasıdır. Her $p \in M$ noktası yarı-umbilik olan yüzey *yarı-umbilik yüzey* denir (Gutierrez-Nunez ve ark. 2008).

Tanım 2.2.31: $X(u, v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \subset E^4$ yüzeyinin Gauss, normal ve ortalama eğrilikleri

$$\|H\|^2 - K - |K_N| = 0 \quad (2.2.48)$$

eşitliğini sağlar ise M ye *Wintgen ideal yüzey* adı verilir (Wintgen 1979).

Tanım 2.2.32: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\langle h(X, Y), \vec{H} \rangle = \lambda^2 \langle X, Y \rangle, \quad \lambda = \|\vec{H}\| \quad (2.2.49)$$

şartı sağlanırsa M ye *yarı-umbilik yüzey* denir (Chen 1972).

3. E^4 DE YÜZEYLER

3.0. Giriş

Bu bölümde E^4 deki bazı özel yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeyler sırasıyla rotasyon yüzeyleri, Vranceanu yüzeyleri, regle yüzeyleri, küresel çarpım yüzeyleri, tensör çarpım yüzeyleri, kanal yüzeyleri ve meridyen yüzeyleridir. Bu yüzeylerin Gauss, ortalama ve normal eğrilikleri hesaplanmış, Wintgen ideal yüzeyi olmaları durumları ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

3.1. E^4 de Genelleştirilmiş Rotasyon Yüzeyleri

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ eğrisi (2.1.13) parametrelendirilmesiyle verilen 4-ranklı bir W-eğrisi olsun. G. Ganchev ve V. Milousheva 2008 yılında yaptıkları çalışmada

$$X(u, v) = \gamma(u) + A(v)V_2(u) + B(v)V_4(u), \quad v \in J, 0 \leq u \leq 2\pi \quad (3.1.1)$$

regüler yüzey yaması ile verilen yüzeyler tanımlamışlardır. Burada $A = A(v)$, $B = B(v)$, $J \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı türevlenebilir fonksiyonlar olup

$$\begin{aligned} A'(v)^2 + B'(v)^2 &> 0 \\ (k_1 A(v) - 1)^2 + (k_2 A(v) - k_3 B(v))^2 &> 0, \quad v \in J \end{aligned}$$

şartları sağlanır. Bu yüzeyler γ eğrisinin $\{V_2(u), V_4(u)\}$ vektörleri ile gerilen normal düzleminde yatan düzlemsel eğrilerin 1-parametrelili ailesidir. O nedenle bu yüzeylere *genelleştirilmiş rotasyon yüzeyleri* denilmektedir (Moore 1919). Burada $V_2(u)$ ve $V_4(u)$ vektörlerinin (2.1.15) eşitliklerindeki değerleri (3.1.1) de yerine yazılırsa genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin parametrik denklemi

$$X(u, v) = \left(\begin{aligned} &\left(a + \frac{1}{k_1} (-ac^2 A(v) + bd^2 B(v)) \right) \cos cu, \left(a + \frac{1}{k_1} (-ac^2 A(v) + bd^2 B(v)) \right) \sin cu, \\ &\left(b + \frac{1}{k_1} (-bd^2 A(v) - ac^2 B(v)) \right) \cos du, \left(b + \frac{1}{k_1} (-bd^2 A(v) - ac^2 B(v)) \right) \sin du \end{aligned} \right)$$

biçimine dönüşür. Ayrıca

$$\begin{aligned} f(v) &= a + \frac{1}{k_1} \left(-ac^2 A(v) + bd^2 B(v) \right), \\ g(v) &= b + \frac{1}{k_1} \left(-bd^2 A(v) - ac^2 B(v) \right) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

alınırsa yukarıdaki denklem

$$X(u, v) = (f(v) \cos cu, f(v) \sin cu, g(v) \cos du, g(v) \sin du) \quad (3.1.3)$$

biçimine dönüşür. Burada $f(v)$ ve $g(v)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğer $\alpha(v) = (f(v), g(v))$ düzlemsel döngü eğrisi olarak tanımlanırsa

$$c^2 f(v)^2 + d^2 g(v)^2 > 0 \text{ ve } (f'(v))^2 + (g'(v))^2 > 0$$

şartlarını sağlar (Ganchev ve Milousheva 2008a).

Genelleştirilmiş rotasyon yüzeyleri ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme 3.1.1: M yüzeyi (3.1.3) parametrelendirmesi ile verilen bir genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{(c^2 f^2 + d^2 g^2)(g'f'' - f'g'')(d^2 g'f' - c^2 f'g') - c^2 d^2 (g'f' - f'g')^2 ((f')^2 + (g')^2)}{((f')^2 + (g')^2)^2 (c^2 f^2 + d^2 g^2)^2} \quad (3.1.4)$$

dir (Arslan ve ark. 2011a).

İspat: M yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= X_u(u, v) = (-cf(v) \sin cu, cf(v) \cos cu, -dg(v) \sin du, dg(v) \cos du) \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= X_v(u, v) = (f'(v) \cos cu, f'(v) \sin cu, g'(v) \cos du, g'(v) \sin du), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece M nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle = (cf(v))^2 + (dg(v))^2, \\ F &= \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle = (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

dir. Ayrıca X in ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (-c^2 f(v) \cos cu, -c^2 f(v) \sin cu, -d^2 g(v) \cos du, -d^2 g(v) \sin du) \\ X_{uv}(u, v) &= (-cf'(v) \sin cu, cf'(v) \cos cu, -dg'(v) \sin du, dg'(v) \cos du), \\ X_{vv}(u, v) &= (f''(v) \cos cu, f''(v) \sin cu, g''(v) \cos du, g''(v) \sin du), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

dir. Bununla birlikte M yüzeyinin normal uzayı

$$\begin{aligned}
N_1(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}} (-g'(v) \cos cu, -g'(v) \sin cu, f'(v) \cos du, f'(v) \sin du), \\
N_2(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{(cf(v))^2 + (dg(v))^2}} (-dg(v) \sin cu, dg(v) \cos cu, cf(v) \sin du, -cf(v) \cos du)
\end{aligned}
\tag{3.1.8}$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece (2.2.9), (3.1.7) ve (3.1.8) eşitlikleri yardımıyla ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
c_{11}^1 &= \langle X_{uu}(u, v), N_1(u, v) \rangle = \frac{c^2 f(v)g'(v) - d^2 g(v)f'(v)}{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}}, \\
c_{12}^1 &= \langle X_{uv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = 0, \\
c_{22}^1 &= \langle X_{vv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = \frac{f'(v)g''(v) - f''(v)g'(v)}{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}}, \\
c_{11}^2 &= \langle X_{uu}(u, v), N_2(u, v) \rangle = 0, \\
c_{12}^2 &= \langle X_{uv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = \frac{cd(f'(v)g(v) - f(v)g'(v))}{\sqrt{(cf(v))^2 + (dg(v))^2}}, \\
c_{22}^2 &= \langle X_{vv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = 0
\end{aligned}
\tag{3.1.9}$$

bulunur. Sonuç olarak (3.1.6) ve (3.1.9) eşitlikleri (2.2.16) da yerine yazılırsa

$$K = \frac{1}{EG} (c_{11}^1 c_{22}^1 - (c_{12}^2)^2)
\tag{3.1.10}$$

elde edilir. İkinci temel form katsayılarınının değerleri yerine yazılırsa

$$K = \frac{1}{(f')^2 + (g')^2} \left(\frac{(f'g'' - f''g')(c^2 fg' - d^2 gf')}{(f')^2 + (g')^2} - \frac{c^2 d^2 (f'g - fg')^2}{(cf)^2 + (dg)^2} \right)$$

bulunur. Son eşitlik yeniden düzenlendiğinde (3.1.4) eşitliği elde edilir. \square

Önerme 3.1.1 in yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2: M yüzeyi (3.1.3) parametrelendirmesi ile verilen bir genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin düz (flat) bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$(c^2 f^2 + d^2 g^2)(f'g'' - g'f'')(c^2 fg' - d^2 gf') - c^2 d^2 (gf' - fg')^2 ((f')^2 + (g')^2) = 0
\tag{3.1.11}$$

olmasıdır (Arslan ve ark. 2011a).

Önerme 3.1.3: M yüzeyi (3.1.3) parametrelendirmesi ile verilen bir genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin ortalama eğrilik vektörü

$$\bar{H} = \left(\frac{(c^2 f^2 + d^2 g^2)(f'g'' - g'f'') + (c^2 fg' - d^2 gf')((f')^2 + (g')^2)}{2((f')^2 + (g')^2)^{3/2}(c^2 f^2 + d^2 g^2)} \right) N_1 \quad (3.1.12)$$

dir (Arslan ve ark. 2011a).

İspat: (2.2.17), (3.1.6) ve (3.1.9) eşitlikleri kullanılarak M nin ortalama eğrilik vektörü

$$\bar{H} = \frac{1}{2EG} (c_{11}^1 G + c_{22}^1 E) N_1 \quad (3.1.13)$$

olarak bulunur. Ayrıca (3.1.6) ve (3.1.9) eşitlikleri (3.1.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{H} = \frac{1}{2((f')^2 + (g')^2)((cf)^2 + (dg)^2)} & \left(\frac{f'g'' - f''g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} ((cf)^2 + (dg)^2) \right. \\ & \left. + \frac{c^2 fg' - d^2 gf'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} ((f')^2 + (g')^2) \right) N_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik yeniden düzenlendiğinde (3.1.12) eşitliği elde edilir. \square

Önerme 3.1.3. yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.4: M yüzeyi (3.1.3) parametrelendirmesi ile verilen bir genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$(c^2 f^2 + d^2 g^2)(f'g'' - g'f'') + (c^2 fg' - d^2 gf')((f')^2 + (g')^2) = 0 \quad (3.1.14)$$

olmasıdır (Arslan ve ark. 2011a).

Önerme 3.1.5: M yüzeyi (3.1.3) parametrelendirmesi ile verilen bir genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin normal eğriliği

$$K_N = \frac{cd(f'g - fg')((c^2 fg' - d^2 gf')((f')^2 + (g')^2) - (f'g'' - f''g')((cf)^2 + (dg)^2))}{((f')^2 + (g')^2)^2 (c^2 f^2 + d^2 g^2)^2} \quad (3.1.15)$$

dir.

İspat. (3.1.6) ve (3.1.9) eşitlikleri (2.2.46) da yerine yazılırsa genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin normal eğriliği

$$K_N = \frac{Gc_{11}^1c_{12}^2 - Ec_{22}^1c_{12}^2}{(EG)^{3/2}} \quad (3.1.16)$$

dir. Son eşitlik yeniden düzenlendiğinde (3.1.15) eşitliği elde edilir. \square

Önerme 3.1.5 ve Açıklama 2.2.30 dan aşağıdaki sonuç elde edilir;

Sonuç 3.1.6: M yüzeyi (3.1.3) parametrelendirmesi ile verilen bir genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin yarı-umbilik yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$cd(f'g - fg')((c^2 fg' - d^2 gf')((f')^2 + (g')^2) - (f'g'' - f''g')(cf)^2 + (dg)^2)) = 0$$

olmasıdır.

Önerme 3.1.7: M yüzeyi (3.1.3) parametrelendirmesi ile verilen bir genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde $K_N = K$ olması için gerek ve yeter şart

$$(\sqrt{E}c_{12}^2 + \sqrt{G}c_{11}^1)(\sqrt{E}c_{22}^1 - \sqrt{G}c_{12}^2) = 0 \quad (3.1.17)$$

olmasıdır.

İspat. (3.1.16) ve (3.1.10) eşitliklerinden (3.1.17) elde edilir. \square

Aşağıda bazı özel durumlar incelenmiştir;

$$\text{I. Durum: } \sqrt{E}c_{12}^2 + \sqrt{G}c_{11}^1 = 0 \text{ olsun.} \quad (3.1.18)$$

$$\text{II. Durum: } \sqrt{E}c_{22}^1 - \sqrt{G}c_{12}^2 = 0 \text{ olsun.} \quad (3.1.19)$$

Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

Sonuç 3.1.8: Genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi I. Durum' daki (3.1.18) şartını sağlasın.

Bu takdirde M yüzeyinin

i) γ eğrisi bir çemberdir ($c = d$ durumu) ya da

ii) α döngü eğrisi $\alpha(v) = ((g(v))^{-c/d}, g(v))$ ($c \neq d$ durumu)

parametrelendirmesi ile verilen bir egridir.

İspat. Farzedelim ki $\sqrt{E}c_{12}^2 + \sqrt{G}c_{11}^1 = 0$ olsun. Bu takdirde (3.1.6) ve (3.1.9) yardımıyla

$$(c - d)(df'g + cfg') = 0$$

bulunur. Böylece $c = d$, yada $df'g + cfg' = 0$ durumları söz konusudur. Birinci durumda Örnek 2.1.7 yardımıyla γ bir çember belirtir. İkinci durumda ise $f(v) = (g(v))^{-c/d}$ bulunur. \square

Sonuç 3.1.9: $M \subset E^4$ yüzeyi (3.1.3) parametrelendirmesi ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin döngü eğrisi $\alpha(v) = (f(v), \lambda f(v))$ biçiminde bir parametrelendirmeye sahip (orijinden geçen bir doğru) ise M yüzeyi II. Durumdaki (3.1.19) eşitliğini sağlar.

İspat. (3.1.6) ve (3.1.9) yardımıyla

$$\sqrt{E}c_{22}^1 - \sqrt{G}c_{12}^2 = ((cf)^2 + (dg)^2)(f'g'' - f''g') - cd((f')^2 + (g')^2)(f'g - fg')$$

dır. Böylece $f(v) = \lambda g(v)$ olması durumunda $\sqrt{E}c_{22}^1 - \sqrt{G}c_{12}^2 = 0$ bulunur. Bu da bize istenilen sonucu verir. \square

Aşağıda E^4 de bazı rotasyon yüzeyi örnekleri verilmiştir;

Örnek 3.1.10: (Düz Klein şişesi)

$$f(v) = \cos v, g(v) = 2 \sin v, c = 1, d = \frac{1}{2}, \quad (3.1.20)$$

parametrelendirmesi ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi düz *Klein şişesi* olarak bilinir (Tompkins 1941).

Örnek 3.1.11: (Blaschke yüzeyi)

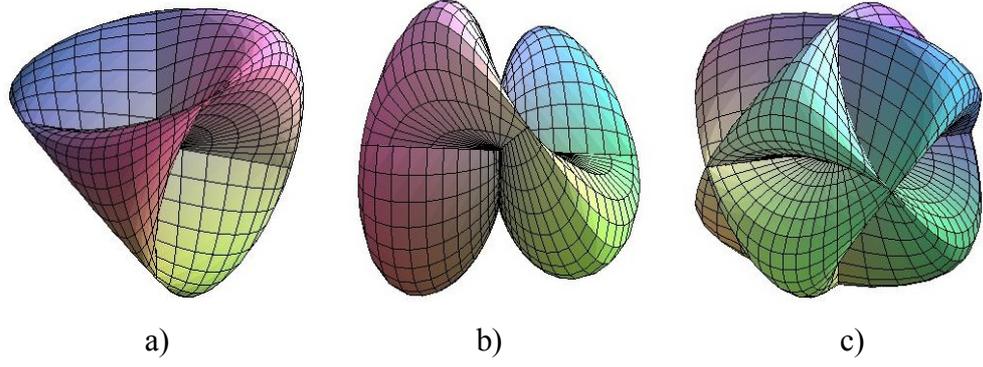
$$X(u, v) = \frac{1}{\kappa} (\sin \kappa v \cos u, \sin \kappa v \sin u, (1 - \cos \kappa v) \cos 2u, (1 - \cos \kappa v) \sin 2u) \quad (3.1.21)$$

parametrelendirmesi ile verilen yüzeye *Blaschke yüzeyi* adı verilir (Kim ve Lee 1993).

Burada

$$f(v) = \frac{1}{\kappa} \sin \kappa v, g(v) = \frac{1}{\kappa} (1 - \cos \kappa v), c = 1, d = 2 \quad (3.1.22)$$

alındığında E^4 de bir rotasyon yüzeyi olduğu görülür. Ayrıca burada κ , M yüzeyinin geodezik eğriliğidir. Bununla birlikte Y.H. Kim $p \in M$ noktası boyunca her bir geodeziğin E^4 de bir W-eğrisi olduğunu da ispatlamıştır.



Şekil 3.1.1. Blaschke yüzeyleri; a) $k = 2$, b) $k = 1/\exp(2v)$, c) $k = 1/\sin(2v)$

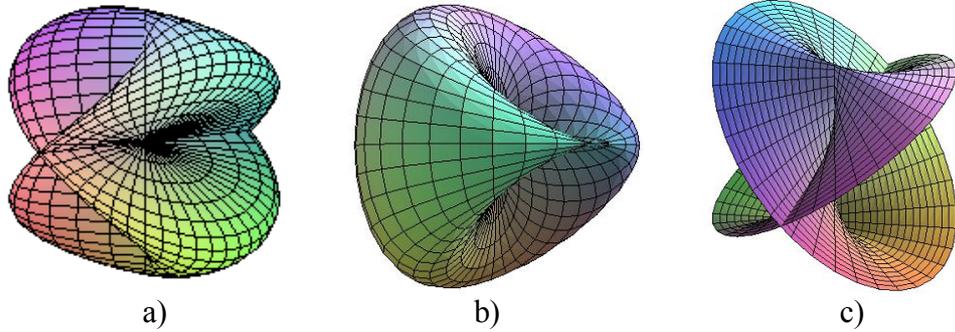
Örnek 3.1.12: (Banchoff yüzeyi)

$$f(v) = \cos^2 v, g(v) = \sin 2v, c = 2, d = 1 \quad (3.1.23)$$

parametrelendirme ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi *Banchoff yüzeyi* olarak bilinir (Banchoff 1978).

Örnek 3.1.13: (Döngü yüzeyi)

Genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinde $f(v) = v, g(v) = 1$ ve $c = 1, d \in R^+$ alınsın. Bu yüzey *döngü yüzeyi* olarak adlandırılır (Geysens ve ark. 1983).



Şekil 3.1.2. a) Klein şişesi , b) Banchoff yüzeyi, c) Döngü yüzeyi.

Örnek 3.1.14: (Aminov rotasyon yüzeyi)

$$f(v) = a \cos v, g(v) = b \sin v, c = 1, d = 1; a, b \in R \quad (3.1.24)$$

parametrelendirmesi ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi *Aminov rotasyon yüzeyi* olarak bilinir (Aminov 1994). Böylece Aminov rotasyon yüzeyi için

$$K = K_N = \frac{-16a^2b^2(b^2 - a^2)\cos 2v}{(4a^2b^2 + (b^2 - a^2)^2 \sin^2 2v)^2} \quad (3.1.25)$$

bulunur. Böylece, $a=b$ durumunda $K = K_N = 0$ elde edilir. Bu durumda yüzey Clifford tor yüzeyi olur (Yoon 2003).

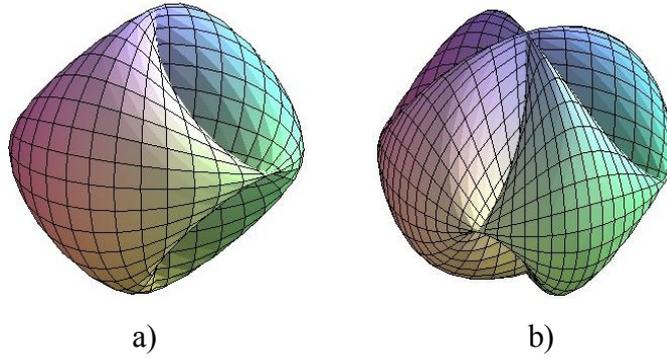
Örnek 3.1.15: (Lawson yüzeyi)

$$f(v) = \cos v, g(v) = \sin v, c \in R^+, d = 1 \quad (3.1.26)$$

parametrelendirmesi ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi *Lawson yüzeyi* olarak bilinir (Lawson 1970). Bu yüzeyler $S^3(1)$ de minimal yüzeylerdir. Bu yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{(c^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^2 - c^2}{(c^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^2}$$

dir. Eğer $c = 1$ ise $K = 0$ dir. Bu durumda yüzey bir çeşit düz Aminov yüzeyi olur.



Şekil 3.1.3. Lawson yüzeyleri; a) $c = 1$, b) $c = 1/2$

Örnek 3.1.16: (r-tüp)

γ eğrisi E^4 de bir W-eğrisi olsun. γ eğrisi etrafında sabit r -yarıçaplı bir tüp

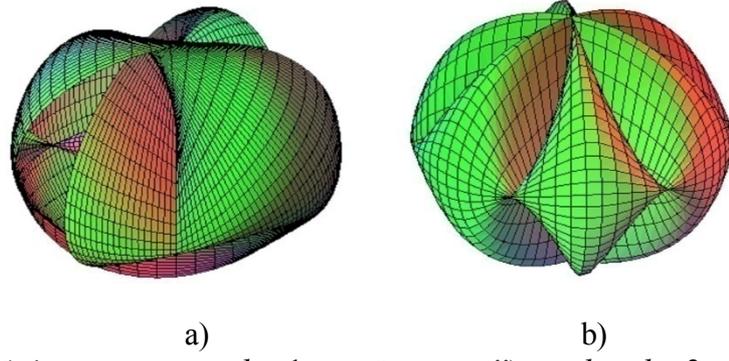
$$M = X(u, v) = \gamma(u) + r \cos v V_2(u) + r \sin v V_4(u) \quad (0 \leq u, v < 2\pi) \quad (3.1.27)$$

ile tanımlanır (Geysens ve ark. 1983). Bu yüzey (3.1.1) ve (3.1.3) denklemleri yardımıyla

$$f(v) = a + \frac{1}{k_1} (-ac^2 r \cos v + bd^2 r \sin v),$$

$$g(v) = a + \frac{1}{k_1} (-bd^2 r \cos v - ac^2 r \sin v)$$

fonksiyonlarıyla tanımlı bir genelleştirilmiş rotasyon yüzeyidir.



Şekil 3.1.4. r-tüp; a) $r = a = b = 1, c = 3, d = 4$, ii) $r = b = d = 3, a = c = 1$.

Örnek 3.1.17:

$$f(v) = \frac{\sin v}{1 + \cos^2 v}, g(v) = f(v) \cos v; \quad c = 1, d = 1 \quad (3.1.28)$$

parametrelendirmesi ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi *Whitney küresi* olarak bilinir (Borrelli ve ark. 1995). Bu yüzeyler $K = |K_N|$ şartını sağlayan Wintgen ideal yüzeylerdir (Chen 2010).

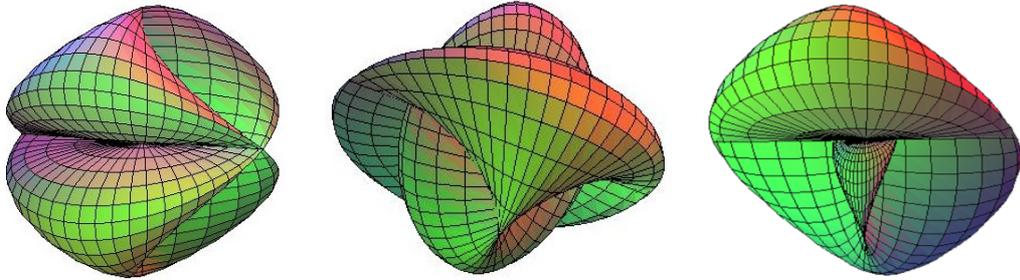
3.2. E^4 de Vranceanu Yüzeyleri

Tanım 3.2.1: (3.1.3) parametrelendirilmesi ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinde $c = d = 1$ ve

$$\begin{aligned} f(v) &= r(v) \cos v \\ g(v) &= r(v) \sin v \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

alındığında elde edilen rotasyon yüzeyi *Vranceanu yüzeyi* adını alır (Vranceanu 1977).

Bu yüzeye ait bazı örnekler Şekil 3.2.1 de verilmiştir.



Şekil 3.2.1. Vranceanu yüzeyleri; a) $r(v) = 1$, b) $r(v) = \sqrt{v}$, c) $r(v) = \exp(v)$

Vranceanu yüzeyinin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle = (r(v))^2, \\ F &= \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$G = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle = (r(v))^2 + (r'(v))^2$$

dir. Ayrıca (3.2.1) ve (3.1.9) eşitlikleri yardımıyla Vranceanu yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= \langle X_{uu}(u, v), N_1(u, v) \rangle = \frac{r(v)^2}{\sqrt{(r(v))^2 + (r'(v))^2}}, \\ c_{12}^1 &= \langle X_{uv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = 0, \\ c_{22}^1 &= \langle X_{vv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = \frac{-r(v)r''(v) + 2(r'(v))^2 + (r(v))^2}{\sqrt{(r(v))^2 + (r'(v))^2}}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$c_{11}^2 = \langle X_{uu}(u, v), N_2(u, v) \rangle = 0,$$

$$c_{12}^2 = \langle X_{uv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = -r(v),$$

$$c_{22}^2 = \langle X_{vv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = 0$$

dir. Böylece (3.2.3) ve (3.2.2) eşitlikleri (2.2.16) da yerine yazılırsa Vranceanu yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{(r'(u))^2 - r(u)r''(u)}{((r(u))^2 + (r'(u))^2)^2} \quad (3.2.4)$$

dır. Benzer şekilde (3.2.3) ve (2.2.17) eşitliklerinden ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \left(\frac{-r(v)r''(v) + 3(r'(v))^2 + 2(r(v))^2}{2(r(v)^2 + r'(v)^2)^{3/2}} \right) N_1 \quad (3.2.5)$$

elde edilir.

Önerme 3.2.2: Vranceanu yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter şart

$$r(v)r''(v) - (r'(v))^2 = 0 \quad (3.2.6)$$

olmasıdır (Arslan ve ark. 2011a).

Bu önerme yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.3: Vranceanu yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter şart

$$r(v) = \lambda e^{\mu v}; \quad \lambda, \mu \in R \quad (3.2.7)$$

olmasıdır (Arslan ve ark. 2011a).

İspat. (3.2.6) diferensiyel denkleminin çözümünden istenilen sonuç elde edilir (bkz. Ek1). □

Açıklama 3.2.4: Eğer (3.2.7) eşitliğinde $\lambda = 1$ ve $\mu = 0$ alınırsa $r(u) = 1$ elde edilir. Bu durumda yüzey Clifford tor yüzeyi olur (Yoon 2003).

Önerme 3.2.5: Vranceanu yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$r(v)r''(v) - 3(r'(v))^2 - 2(r(v))^2 = 0 \quad (3.2.8)$$

olmasıdır (Arslan ve ark. 2011a).

Sonuç 3.2.6: Vranceanu yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$r(v) = \frac{\pm 1}{\sqrt{a \sin(2v) - b \cos(2v)}}; \quad a, b \in R \quad (3.2.9)$$

olmasıdır (Arslan ve ark. 2011a).

İspat. (3.2.8) diferensiyel denkleminin maple ile çözümünden istenilen sonuç elde edilir (bkz. Ek2). □

Açıklama 3.2.7: Önerme 3.2.5 de ifade edilen minimal yüzeyler Eisenhart'ın çalışmasında ele alınmış olup R-yüzeyleri olarak bilinir (Eisenhart 1912).

Önerme 3.2.8: Vranceanu yüzeyinin normal eğriliği

$$K_N = \frac{(r'(u))^2 - r(u)r''(u)}{((r(u))^2 + (r'(u))^2)^2} \quad (3.2.10)$$

dir.

İspat. (3.2.1) ve (3.1.15) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.9: Vranceanu yüzeyi için $K_N = K$ dir.

Önerme 3.2.10: Vranceanu yüzeyinin Wintgen ideal yüzey olması ($K_N + K = H^2$ şartının sağlanması) için gerek ve yeter şart

$$(r'(v))^2 + 2(r(v))^2 + r(v)r''(v) = 0 \quad (3.2.11)$$

olmasıdır.

İspat. $K_N = K$ olduğundan (3.2.4) ve (3.2.5) eşitlikleri yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 3.2.11: Vranceanu yüzeyinin Wintgen ideal yüzey olması için gerek ve yeter şart $r(v) = \pm\sqrt{b\cos(2v) - a\sin(2v)}$; $a, b \in R$ (3.2.12) olmasıdır.

İspat. (3.2.11) diferensiyel denkleminin Maple ile çözümünden istenilen sonuç elde edilir (bkz. Ek3). \square

3.3. E^4 de Regle Yüzeyler

4-boyutlu Öklit uzayı E^4 de bir α eğrisi ve bir \vec{V} vektörü verilsin. \vec{V} vektörünün α eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile E^4 de bir M yüzeyi oluşur. Bu yüzeye E^4 ün *regle yüzeyi* adı verilir. Farz edelim ki bu eğri

$$\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u), f_4(u)) \quad (3.3.1)$$

ve hareketli vektör

$$\beta(u) = (g_1(u), g_2(u), g_3(u), g_4(u)) \quad (3.3.2)$$

ile tanımlansın. Burada f_i ve g_i fonksiyonları türevlenebilir kabul edildiğinden $\alpha(u)$ ve $\beta(u)$ regülerdir. Böylece $\beta(u)$ vektörünün $\alpha(u)$ eğrisi boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen M regle yüzeyi

$$M : X(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u) \quad (3.3.3)$$

yaması ile verilir. $\beta(u)$ birim vektör alındığında, yüzeyin v parametresi $\beta(u)$ pozitif yönü boyunca p noktasının $\alpha(u)$ eğrisine olan uzaklığına eşit olur. Bu şekilde tanımlanan $\alpha(u)$ eğrisine yüzeyin *üreteç eğrisi* ve $\beta(u)$ vektörüne de yüzeyin *döngüleri* denir (Plass 1939).

Eğer tüm $\beta(u)$ vektörleri aynı noktada kesişirlerse birim hiperküreyi orijinde kesen bir koni oluşturur. Bu koniye yüzeyin *üreteç konisi* denir. Bundan sonra $\alpha(u)$ birim hızlı eğri ve $\langle \alpha'(u), \beta(u) \rangle = 0$ olarak kabul edilecektir.

Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme 3.3.1: M yüzeyi E^4 de (3.3.3) parametrelendirilmesiyle verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde M yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği

$$K = -\frac{1}{E} \left\{ \langle X_{uv}, X_{uv} \rangle - \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_u \rangle^2 \right\} \quad (3.3.4)$$

dir (Bayram ve ark. 2009).

İspat: $p = X(u, v)$ noktasında M yüzeyinin teğet uzayı

$$\begin{aligned} X_u &= \alpha'(u) + v\beta'(u) \\ X_v &= \beta(u), \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

ile gerilir. Böylece (2.2.2) eşitliğinden 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 2v\langle \alpha', \beta' \rangle + v^2\langle \beta', \beta' \rangle, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle \alpha', \beta \rangle + v\langle \beta', \beta \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle \beta, \beta \rangle = 1 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

dir. Ayrıca X in ikinci mertebeden kısmi türevleri yardımıyla

$$\begin{aligned} X_{uv} &= \beta'(u), \\ X_{vv} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \langle X_{uv}, X_v \rangle &= 0, \\ \langle X_{vv}, X_v \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

bulunur.

Böylece (3.3.8) ve (2.2.15) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} h(X_u, X_u) &= X_{uu} - \frac{1}{E} \langle X_{uu}, X_u \rangle X_u + \frac{1}{G} \langle X_{uv}, X_u \rangle X_v, \\ h(X_u, X_v) &= X_{uv} - \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_u \rangle X_u, \\ h(X_v, X_v) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

elde edilir. Böylece (2.2.27) eşitliğinden $M \subset E^4$ regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{\langle h(X_u, X_v), h(X_u, X_v) \rangle}{E}, \quad (3.3.10)$$

dir. Buradan (3.3.9) eşitliği (3.3.10) da yerine yazılırsa (3.3.4) elde edilir. \square

Önerme 3.3.1 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.2: M yüzeyi E^4 de (3.3.3) parametrelendirilmesiyle verilen bir regle yüzey olsun. M yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{\langle \beta'(u), \beta'(u) \rangle - \langle \alpha'(u), \beta'(u) \rangle^2}{(1 + 2v\langle \alpha', \beta' \rangle + v^2\langle \beta', \beta' \rangle)^2} \quad (3.3.11)$$

dir (Bayram ve ark. 2009).

İspat. (3.3.5) eşitliği yardımıyla

$$\langle X_{uv}, X_{uv} \rangle = \langle \beta', \beta' \rangle, \quad \langle X_{uv}, X_u \rangle = \langle \alpha', \beta' \rangle + v\langle \beta', \beta' \rangle \quad (3.3.12)$$

elde edilir. Böylece (3.3.12) deki eşitlikler (3.3.4) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

Açıklama 3.3.3: E^4 de bir regle yüzeyin Gauss eğriliği $K=0$ ise açılabilir yüzeydir. Açılabilir yüzeyler burulmuş eğrilerin teğet sel yüzeyleridir. Bununla birlikte $K=0$ Gauss eğriliğine sahip E^4 deki tüm yüzeyler açılabilir regle yüzeyler olmak zorunda değildir (bkz. Plass 1939, syf. 9).

Örnek 3.3.4: Üreteç eğrisi $\alpha(v)$, E^4 de birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin Frenet vektörleri $V_i(u)$, $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere

$$M_i : X(u, v) = \alpha(u) + vV_i(u) \quad (3.3.13)$$

parametrelendirilmesiyle verilen regle yüzeylerinin Gauss eğrilikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir (Bayram ve ark. 2009);

Tablo 3.3.1 Regle Yüzeyler

Yüzey	Gauss Eğriliği (K)
M_2	$-\frac{k_2^2}{((1 - vk_1)^2 + v^2k_2^2)^2}$
M_3	$-\frac{k_2^2 + k_3^2}{(1 + v^2k_2^2 + v^2k_3^2)^2}$
M_4	$-\frac{k_3^2}{(1 + v^2k_3^2)^2}$

Tablo 3.3.1 yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir (Bayram ve ark. 2009);

i) $\alpha(u)$ üreteç eğrisi düzlemsel bir eğri ise M_2 ve M_3 düz yüzeylerdir.

ii) $\alpha(u)$ üreteç eğrisi E^3 de bir uzay eğrisi ise M_4 düz yüzeydir.

Önerme 3.3.5: M yüzeyi E^4 de (3.3.3) parametrelendirilmesiyle verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde M nin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{1}{2E} h(X_u, X_u) \quad (3.3.14)$$

dir (Bayram ve ark. 2009).

İspat. (3.3.3) regle yaması ile verilen M yüzeyi için $F = 0$ ve $h(X_v, X_v) = 0$ olduğundan (2.2.31) denklemini yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 3.3.6: (3.3.3) regle yaması ile verilen bir M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği

$$\|H\|^2 = \frac{\langle h(X_u, X_u), h(X_u, X_u) \rangle}{4E^2} \quad (3.3.15)$$

dir.

Örnek 3.3.7: E^4 de

$$X(u, v) = (0, 0, bu, 0) + v(\cos u, \sin u, 0, 0) \quad (3.3.16)$$

regle yaması ile verilen yüzey E^3 de yatan helikoid yüzeyidir. Bu yüzey için

$$\langle X_u, X_v \rangle = 0, \langle X_{uu}, X_u \rangle = 0, \langle X_{uv}, X_u \rangle = v$$

dir. Bu eşitlikler (3.3.9) denkleminde yerine yazılırsa $h(X_u, X_u) = 0$ bulunur. Bu

nedenle helikoid yüzeyi minimaldir. Bu yüzeyin Gauss eğriliği ise $K = \frac{-b^2}{b^2 + v^2}$ dir.

Sonuç 3.3.8: E^4 de minimal olan tek yüzey E^3 de yatan minimal bir regle yüzeyi, yani helikoiddir (Plass 1939).

Tanım 3.3.9: (3.3.3) yamasıyla verilen regle yüzeyinde $\beta(u)$ birim vektörü için

$$\beta(u) = \sum_{i=2}^4 \beta_i V_i \quad (3.3.17)$$

alındığında

$$X(u, v) = \gamma(u) + v \sum_{i=2}^4 \beta_i V_i \quad (3.3.18)$$

regle yaması elde edilir. Bu yamayla tanımlanan yüzey *genelleştirilmiş standart regle yüzeyi* olarak bilinir (Goncharova 2006a). Burada V_i ler birim hızlı γ eğrisinin Frenet vektörleridir. Ayrıca, $\beta(u)$ eğrisinin hız vektörü

$$\beta'(u) = \sum_{i=1}^4 a_i V_i \quad (3.3.19)$$

olup, burada

$$\begin{aligned} a_1 &= -k_1 \beta_2, \\ a_2 &= \beta_2' - k_2 \beta_3, \\ a_3 &= \beta_3' + k_2 \beta_2 - k_3 \beta_4, \\ a_4 &= \beta_4' + k_3 \beta_3 \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

dır.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.3.10: (3.3.18) yamasıyla verilen genelleştirilmiş standart regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{E^2} \quad (3.3.21)$$

dir (Goncharova 2006b).

İspat: (3.3.11), (3.3.19) ve (3.3.20) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir. \square

3.4. Ganchev-Milousheva Rotasyon Yüzeyleri

$f: M \rightarrow E^{m+d}$ dönüşümü m -boyutlu altmanifold M den $(m+d)$ -boyutlu Öklit uzayına E^{m+d} bir gömme (embedding) ve $g: S^{n-1} \rightarrow E^n$ dönüşümü ise S^{n-1} (n-1)-küresinin standart gömmesi olsun. Bu takdirde $\forall u \in M, f_1(u) \neq 0$ ve $v \in S^n$ için

$$\begin{aligned} X: M \times S^{n-1} &\rightarrow E^{m+n+d-1} \\ X(u, v) &= (f_1(u), f_2(u), \dots, f_{m+d-1}(u), f_{m+d}(u)g(v)) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm *rotasyonel gömme* olarak bilinir (Kuiper 1970). Bu dönüşüm E^n nin E^{m+d-1} etrafında döndürülmesiyle elde edilir.

Tanım 3.4.1: $\alpha, \beta : R \rightarrow E^2$ düzlemsel eğriler olsun. $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u))$ ve $\beta(v) = (g_1(v), g_2(v))$ şeklinde verilsin. Bu takdirde bu eğrilerin *küresel çarpımı*

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \alpha \otimes \beta : E^2 \rightarrow E^3 \\ X(u, v) &= (f_1(u), f_2(u)g_1(v), f_2(u)g_2(v)) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

şeklinde tanımlanır. $u_0 < u < u_1, v_0 < v < v_1$ için $X(u, v)$ yaması E^3 de bir *küresel çarpım yüzeyi* tanımlar (Jaklic ve ark. 2000).

Örnek 3.4.2: (3.4.2) eşitliğinde

$$\begin{aligned} f_1(u) &= a_1 \sin^{\varepsilon_1} u, \quad f_2(u) = \cos^{\varepsilon_1} u, \\ g_1(v) &= a_2 \cos^{\varepsilon_2} v, \quad g_2(v) = a_3 \sin^{\varepsilon_2} v \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

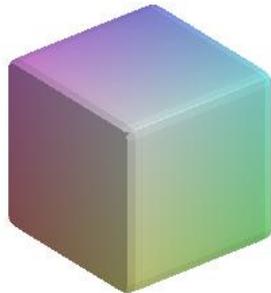
alındığında

$$X(u, v) = \alpha(u) \otimes \beta(v) = \begin{bmatrix} a_1 \sin^{\varepsilon_1} u \\ a_2 \cos^{\varepsilon_2} v \cos^{\varepsilon_1} u \\ a_3 \sin^{\varepsilon_2} v \cos^{\varepsilon_1} u \end{bmatrix}, \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad -\pi \leq v < \pi \quad (3.4.4)$$

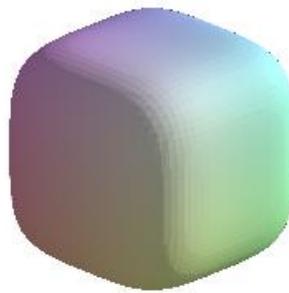
yaması ile verilen küresel çarpım yüzeyi süperkuadrik olarak bilinir. Bu yüzeyin kapalı denklemi

$$\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^{\frac{2}{\varepsilon_1}} + \left(\left| \frac{x_2}{a_2} \right|^{\frac{2}{\varepsilon_2}} + \left| \frac{x_3}{a_3} \right|^{\frac{2}{\varepsilon_2}} \right)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = 1 \quad (3.4.5)$$

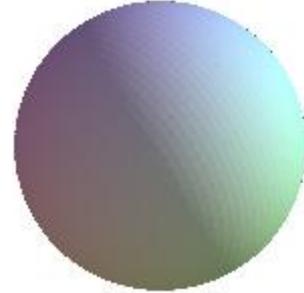
dir. Uygulama olarak a) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, b) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$, c) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, d) $\varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = 1$, e) $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 3$ ve f) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 3$ değerleri için yüzey örnekleri Şekil 3.4.1 de verilmiştir.



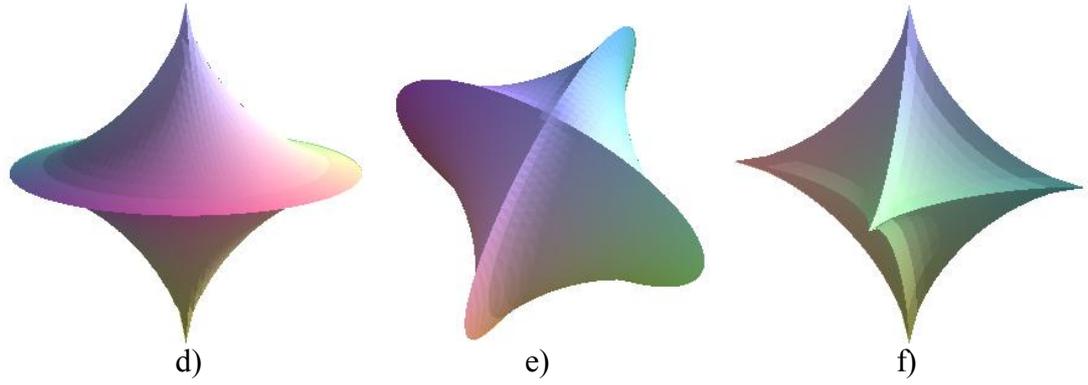
a)



b)



c)



Şekil 3.4.1 Süperquadrik Yüzeyler

Açıklama 3.4.3: (3.4.2) eşitliğinde $\beta(v)$ eğrisi birim çember alınırsa $X(u, v) = (f_1(u), f_2(u) \cos v, f_2(u) \sin v)$ (3.4.6) parametrelendirmesi ile verilen küresel çarpım yüzeyi *dönel yüzey* halini alır (O'Neill 1997).

Örnek 3.4.4: E^3 deki (3.4.6) yaması ile verilen dönel yüzeyin üzerindeki

$$\gamma(v) = (f_1(v) \cos v, f_1(v) \sin v, f_2(v))$$

parametrelendirmesiyle verilen uzay eğrisi birim hızlı ve $S^2(1)$ de yatan küresel bir eğri ise bu taktirde $\|\gamma(v)\|^2 = 1$ ve $\|\gamma'(v)\|^2 = 1$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} (f_1(v))^2 + (f_2(v))^2 &= 1 \\ (f_1(v))^2 + (f_1'(v))^2 + (f_2'(v))^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin Maple yardımıyla çözümünden (bkz. Ek4)

$$f_1(v) = \pm \tanh(v + c), \quad f_2(v) = \pm \sqrt{1 - (f_1(v))^2} = \pm \operatorname{sech}(v + c)$$

elde edilir.

Tanım 3.4.5: $\alpha : R \rightarrow E^3$ bir uzay eğrisi ve $\beta : R \rightarrow E^2$ bir düzlemsel eğri olsun. $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ ve $\beta(v) = (g_1(v), g_2(v))$ şeklinde verilsin. Bu takdirde bu eğrilerin *küresel çarpımı*

$$\begin{aligned} X &= \alpha \otimes \beta : E^2 \rightarrow E^4 \\ X(u, v) &= (f_1(u), f_2(u), f_3(u)g_1(v), f_3(u)g_2(v)) \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

şeklinde tanımlanır. $u_1 < u < u_2, v_1 < v < v_2$ için $X(u, v)$ yaması E^4 de bir küresel çarpım yüzeyi tanımlar.

Örnek 3.4.6: (3.4.8) eşitliğinde

$$\begin{aligned} f_1(u) &= a_1 \cos^{2\varepsilon_1} u, f_2(u) = a_2 \cos^{\varepsilon_1} u \sin^{\varepsilon_1} u, f_3(u) = \sin^{\varepsilon_1} u \\ g_1(v) &= a_3 \cos^{\varepsilon_2} v, g_2(v) = a_4 \sin^{\varepsilon_2} v \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

alındığında

$$X(u, v) = \alpha(u) \otimes \beta(v) = \begin{bmatrix} a_1 \cos^{2\varepsilon_1} u \\ a_2 \cos^{\varepsilon_1} u \sin^{\varepsilon_1} u \\ a_3 \sin^{\varepsilon_1} u \cos^{\varepsilon_2} v \\ a_4 \sin^{\varepsilon_1} u \sin^{\varepsilon_2} v \end{bmatrix}, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, -\pi \leq v < \pi \quad (3.4.10)$$

yaması ile verilen küresel çarpım yüzeyi elde edilir. Bu yüzeyin kapalı denklemi

$$\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^{\frac{2}{\varepsilon_1}} + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^{\frac{2}{\varepsilon_1}} + \left(\left| \frac{x_3}{a_3} \right|^{\frac{2}{\varepsilon_2}} + \left| \frac{x_4}{a_4} \right|^{\frac{2}{\varepsilon_2}} \right)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = 1 \quad (3.4.11)$$

dir.

Örnek 3.4.7: (Otsuiki Küresi)

$$\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), \sin u) \text{ ve } \beta(v) = (\cos v, \sin v) \quad (3.4.12)$$

alındığında küresel çarpım

$$X(u, v) = (f_1(u), f_2(u), \sin u \cos v, \sin u \sin v) \quad (3.4.13)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u \in R, 0 \leq v \leq 2\pi$ ve $(f_1')^2 + (f_2')^2 = \sin^2 u$ dir.

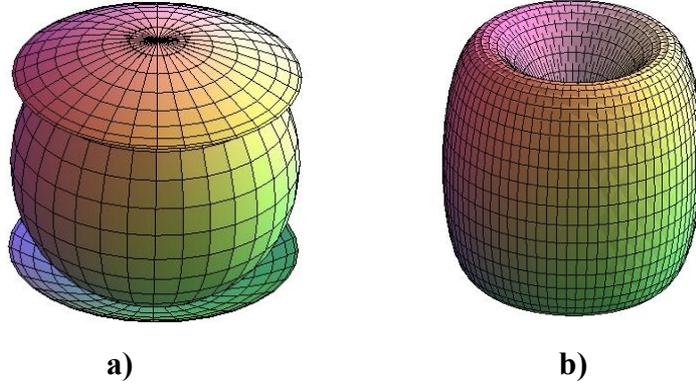
Bu çarpımı ilk defa T. Otsuiki 1966 yılında (Otsuiki 1966) da tanımlamıştır. Aynı çalışmasında ayrıca

$$\text{a) } f_1(u) = \frac{4}{3} \cos^3\left(\frac{u}{2}\right), f_2(u) = \frac{4}{3} \sin^3\left(\frac{u}{2}\right), f_3(u) = \sin u,$$

$$\text{b) } f_1(u) = \frac{1}{2} \sin^2 u \cos(2u), f_2(u) = \frac{1}{2} \sin^2 u \sin(2u), f_3(u) = \sin u$$

durumlarını da göz önüne almıştır. a) durumu için $X(u, v)$ yamasıyla verilen yüzey E^4 ün 3-boyutlu alt uzayında yatmayan Otsuiki küresi (non-round) olarak adlandırılır. Aynı

zamanda bu yüzey sabit Gauss eğriliğine sahiptir. Bu yüzeylerin E^3 deki izdüşümleri Şekil 3.4.2 de verilmiştir.



Şekil 3.4.2. Otsuiki küresinin E^3 deki izdüşümleri

Son zamanlarda G. Ganchev ve V. Milousheva $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ birim hızlı uzay eğrisi ile $\beta(v) = (\cos v, \sin v)$ çemberinin genel çarpımını

$$X(u, v) = \alpha(u) \otimes \beta(v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u) \cos v, f_3(u) \sin v), \quad f_3 > 0 \quad (3.4.14)$$

küresel çarpım yüzeyi olarak ele almışlardır. Burada $u \in \mathbb{R}$, $0 \leq v \leq 2\pi$ ve α birim hızlı (yani; $(f_1')^2 + (f_2')^2 + (f_3')^2 = 1$) dir (Ganchev ve Milousheva 2008b). (3.4.14) yaması ile verilen yüzeyler *Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyleri* olarak adlandırılır. Burada $\alpha(u)$ eğrisi yüzeyin döngü eğrisi olarak adlandırılacaktır.

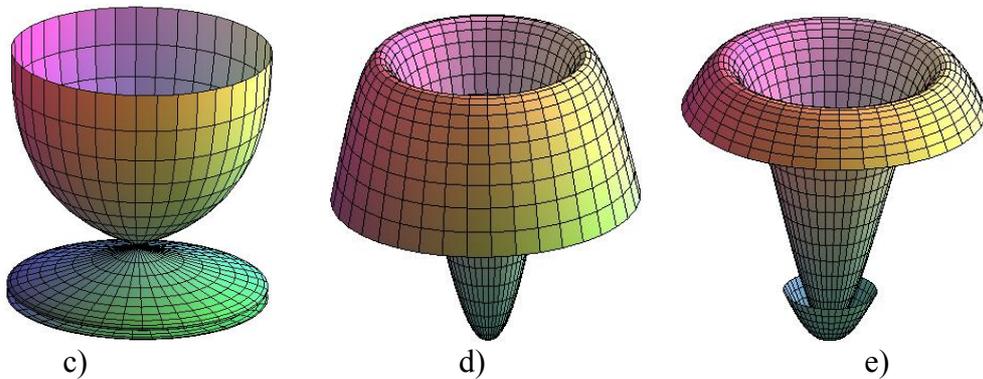
Örnek 3.4.8: (3.4.14) yaması ile verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyleri

$$c) \alpha(u) = (e^u, 3e^u + 5, \cos u),$$

$$d) \alpha(u) = (\sin u, 3 \sin u + 5, 3u + 5),$$

$$e) \alpha(u) = (3 \sin u, u + 5, 3u + 5)$$

döngü eğrileri ile verilsin. Bu yüzeylerin E^3 deki izdüşümleri Şekil 3.4.3 de verilmiştir.



Şekil 3.4.3. Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeylerinin E^3 deki izdüşümleri

Önerme 3.4.9: M yüzeyi (3.4.14) parametrelendirmesiyle verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{f_3''}{f_3} \quad (3.4.15)$$

dir.

İspat: M yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= X_u(u, v) = (f_1'(u), f_2'(u), f_3'(u) \cos v, f_3'(u) \sin v), \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= X_v(u, v) = (0, 0, -f_3(u) \sin v, f_3(u) \cos v) \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece M nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = f_3^2(u) \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

dir. Burada $W^2 = EG - F^2 = f_3^2(u)$ dir.

Ayrıca M nin ikinci kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (f_1'', f_2'', f_3'' \cos v, f_3'' \sin v), \\ X_{uv}(u, v) &= (0, 0, -f_3' \sin v, f_3' \cos v), \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, -f_3 \cos v, -f_3 \sin v) \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

dir. Bununla birlikte M yüzeyinin normal uzayı

$$\begin{aligned} N_1(u, v) &= \frac{1}{\kappa} (f_1'', f_2'', f_3'' \cos v, f_3'' \sin v), \\ N_2(u, v) &= \frac{1}{\kappa} (f_2' f_3'' - f_2'' f_3', f_3' f_1'' - f_3'' f_1', (f_1' f_2'' - f_1'' f_2') \cos v, (f_1' f_2'' - f_1'' f_2') \sin v) \end{aligned}$$

vektör alanları ile gerilir. Burada

$$\kappa = \sqrt{(f_1'')^2 + (f_2'')^2 + (f_3'')^2}$$

$\alpha(u)$ döngü eğrisinin eğriliğidir.

Böylece ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
c_{11}^1 &= \langle X_{uu}(u, v), N_1(u, v) \rangle = \kappa, \\
c_{12}^1 &= \langle X_{uv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = 0, \\
c_{22}^1 &= \langle X_{vv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = -\frac{f_3 f_3''}{\kappa}, \\
c_{11}^2 &= \langle X_{uu}(u, v), N_2(u, v) \rangle = 0, \\
c_{12}^2 &= \langle X_{uv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = 0, \\
c_{22}^2 &= \langle X_{vv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = -\frac{f_3 \kappa_1}{\kappa}
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

dir. Burada

$$\kappa_1 = f_1' f_2'' - f_2' f_1'' , \tag{3.4.20}$$

$\alpha(u)$ eğrisinin Oe_1e_2 düzlemine izdüşümü olan $\alpha_1(u) = (f_1(u), f_2(u))$ eğrisinin eğriliğidir.

Ayrıca (2.2.16) yardımıyla

$$K = \frac{c_{11}^1 c_{22}^1}{EG} \tag{3.4.21}$$

elde edilir. Böylece (3.4.17) ve (3.4.19) daki eşitlikler (3.4.21) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

Önerme 3.4.9 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.10: M yüzeyi (3.4.14) parametrelendirmesiyle verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin düz (flat) bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$f_3(u) = au + b, \quad a, b \in R \tag{3.4.22}$$

olmasıdır.

İspat: (3.4.15) eşitliğinin sıfır olmasından ispat kolayca görülebilir. \square

Sonuç 3.4.11: M yüzeyi (3.4.14) parametrelendirmesiyle verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin sabit Gauss eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart

$$f_3(u) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-a_1}{e^{\left(\frac{u}{a_1}\right)^2} e^{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2} + 1}} \tag{3.4.23}$$

olmasıdır.

İspat: (3.4.15) eşitliğinin u ya göre kısmi türevinden

$$\frac{\partial K}{\partial u} = \frac{f_3'' f_3' - f_3 f_3'''}{f_3^2},$$

elde edilir. Böylece sabit Gauss eğriliğine sahip olması için

$$f_3'' f_3' - f_3 f_3''' = 0 \quad (3.4.24)$$

olmalıdır. (3.4.24) diferansiyel denkleminin Maple ile çözümünden (3.4.23) elde edilir (bkz. Ek5). \square

Önerme 3.4.12: M yüzeyi (3.4.14) parametrelendirmesiyle verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin ortalama eğrilik vektör alanı

$$\vec{H} = \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{f_3''}{2\kappa f_3} \right) N_1 - \frac{\kappa_1}{2\kappa f_3} N_2 \quad (3.4.25)$$

dir.

İspat: (2.2.17), (3.4.17) ve (3.4.19) eşitlikleri kullanılarak M nin ortalama eğrilik vektör alanı

$$\vec{H} = \frac{1}{2EG} \left[(c_{11}^1 G + c_{22}^1 E) N_1 + (c_{22}^2 E) N_2 \right] \quad (3.4.26)$$

olarak bulunur. Ayrıca (3.4.17) ve (3.4.19) eşitlikleri (3.4.26) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\vec{H} = \frac{1}{2f_3^2} \left[\left(f_3^2 \kappa - \frac{f_3 f_3''}{\kappa} \right) N_1 - \frac{f_3 \kappa_1}{\kappa} N_2 \right]$$

elde edilir. Son eşitlik yeniden düzenlendiğinde (3.4.25) eşitliği elde edilir. \square

Önerme 3.4.12 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.13: M yüzeyi (3.4.14) parametrelendirmesiyle verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1 = 0 \text{ ve } \kappa^2 = -K$$

olmasıdır.

İspat: $\kappa_1 = 0$ ise $\alpha(u)$ eğrisinin Oe_1e_2 düzlemine izdüşümü olan $\alpha_1(u)$ eğrisi düz bir doğru olur. \square

Önerme 3.4.14: (3.4.14) parametrelendirmesiyle verilen her bir Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi yarı-umbiliktir.

İspat. (3.4.17) ve (3.4.19) eşitliklerinden $F = 0$, $c_{12}^1 = 0$, $c_{11}^2 = 0$ ve $c_{12}^2 = 0$ dir. Bu değerler (2.2.47) de yerine yazılırsa $K_N = 0$ bulunur. \square

(3.4.15) ve (3.4.25) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.15: M yüzeyi (3.4.14) parametrelendirmesiyle verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin Wintgen ideal yüzey olması ($K_N + K = H^2$ şartının sağlanması) için gerek ve yeter şart

$$\kappa^4 f_3^2 + 2\kappa^2 f_3 f_3'' + (f_3'')^2 + 4\kappa_1^2 = 0$$

olmasıdır.

İspat. (3.4.15) ve (3.4.25) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir. \square

3.5. Tensör Çarpım Yüzeyleri

Tanım 3.5.1: $c_1 : R \rightarrow E^2$ ve $c_2 : R \rightarrow E^2$ düzlemsel eğriler olsun. $c_1(u) = (\gamma(u), \delta(u))$ ve $c_2(v) = (\alpha(v), \beta(v))$ şeklinde verilsin. Bu takdirde bu eğrilerin *tensör çarpımı*

$$\begin{aligned} X &= c_1 \otimes c_2 : E^2 \rightarrow E^4 \\ X(u, v) &= (\alpha(v)\gamma(u), \beta(v)\gamma(u), \alpha(v)\delta(u), \beta(v)\delta(u)) \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu yamayla verilen yüzeye E^4 de bir *tensör çarpım yüzeyi* denir (Mihai ve ark. 1995).

(3.5.1) eşitliğinde $c_1(u) = (\cos u, \sin u)$ ve $c_2(v) = (\alpha(v), \beta(v))$ alınırsa tensör çarpım yüzeyi

$$M : X(u, v) = (\alpha(v) \cos u, \beta(v) \cos u, \alpha(v) \sin u, \beta(v) \sin u) \quad (3.5.2)$$

halini alır.

Önerme 3.5.2: M yüzeyi (3.5.2) parametrelendirmesiyle verilen tensör çarpım yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin Gauss ve normal eğrilik fonksiyonları birbirine eşit olup

$$K = K_N = \frac{b(v)(c(v) - b(v))}{(\alpha')^2 + (\beta')^2} \quad (3.5.3)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} b(v) &= \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ c(v) &= \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{(\alpha')^2 + (\beta')^2}, \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

reel değerli türevlenebilir fonksiyonlardır.

İspat: M yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= X_u(u, v) = (-\alpha(v)\sin u, -\beta(v)\sin u, \alpha(v)\cos u, \beta(v)\cos u), \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= X_v(u, v) = (\alpha'(v)\cos u, \beta'(v)\cos u, \alpha'(v)\sin u, \beta'(v)\sin u) \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece M nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \alpha(v)^2 + \beta(v)^2, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = (\alpha'(v))^2 + (\beta'(v))^2 \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

dir.

Ayrıca M nin ikinci kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (-\alpha(v)\cos u, -\beta(v)\cos u, -\alpha'(v)\sin u, -\beta'(v)\sin u), \\ X_{uv}(u, v) &= (-\alpha'(v)\sin u, -\beta'(v)\sin u, \alpha'(v)\cos u, \beta'(v)\cos u), \\ X_{vv}(u, v) &= (\alpha''(v)\cos u, \beta''(v)\cos u, \alpha''(v)\sin u, \beta''(v)\sin u) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

dir. Bununla birlikte M yüzeyinin normal uzayı

$$\begin{aligned} N_1(u, v) &= \frac{1}{\|c_2'\|} (-\beta'(v)\cos u, \alpha'(v)\cos u, -\beta'(v)\sin u, \alpha'(v)\sin u), \\ N_2(u, v) &= \frac{1}{\|c_2\|} (-\beta(v)\sin u, \alpha(v)\sin u, \beta(v)\cos u, -\alpha(v)\cos u) \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece (2.2.9), (3.5.7) ve (3.5.8) eşitlikleri yardımıyla ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
c_{11}^1 &= \langle X_{uu}(u, v), N_1(u, v) \rangle = \frac{\alpha(v)\beta'(v) - \alpha'(v)\beta(v)}{\|c_2'\|}, \\
c_{12}^1 &= \langle X_{uv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = 0, \\
c_{22}^1 &= \langle X_{vv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = \frac{\alpha'(v)\beta''(v) - \alpha''(v)\beta'(v)}{\|c_2'\|}, \\
c_{11}^2 &= \langle X_{uu}(u, v), N_2(u, v) \rangle = 0, \\
c_{12}^2 &= \langle X_{uv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = \frac{\alpha'(v)\beta(v) - \alpha(v)\beta'(v)}{\|c_2\|}, \\
c_{22}^2 &= \langle X_{vv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = 0,
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

dir. Sonuç olarak (3.5.6) ve (3.5.9) eşitlikleri (2.2.16) ve (2.2.47) de yerine yazılırsa

$$K = \frac{c_{11}^1 c_{22}^1 - (c_{12}^1)^2}{EG} \text{ ve } K_N = \frac{Gc_{11}^1 c_{12}^2 - Ec_{12}^2 c_{22}^1}{(EG)^{3/2}}$$

elde edilir. Son eşitlikler yeniden düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir. \square

Önerme 3.5.2 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5.3: M yüzeyi (3.5.2) parametrelendirmesiyle verilen tensör çarpım yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin düz (flat) bir yüzey olması için gerek ve yeter şart $c_2(v)$ orijinden geçen bir doğru ya da

$$(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\alpha')^2 + (\beta')^2 = 0 \tag{3.5.10}$$

eşitliğini sağlayan bir eğri olmasıdır.

İspat: (3.5.3) eşitliğinin sıfır olmasından ispat kolayca görülebilir. \square

Önerme 3.5.4: M yüzeyi (3.5.2) parametrelendirmesiyle verilen tensör çarpım yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin ortalama eğriliği

$$\|\bar{H}\| = \frac{b(v) + c(v)}{2\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}} \tag{3.5.11}$$

dir. Burada $b(v)$ ve $c(v)$ fonksiyonları (3.5.4) de tanımlanmıştır.

İspat: (2.2.17), (3.5.6) ve (3.5.9) eşitlikleri kullanılarak M nin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{1}{2EG} \{(c_{11}^1 G + c_{22}^1 E)N_1\} \quad (3.5.12)$$

olarak bulunur. Ayrıca (3.5.9) ve (3.5.6) eşitlikleri (3.5.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\vec{H} = \frac{\{\{\alpha(v)\beta'(v) - \alpha'(v)\beta(v)\}((\alpha')^2 + (\beta')^2) + \{\alpha'(v)\beta''(v) - \alpha''(v)\beta'(v)\}(\alpha^2 + \beta^2)\}}{2(\alpha^2 + \beta^2)((\alpha')^2 + (\beta')^2)^{3/2}} N_1$$

elde edilir. Son eşitlik yeniden düzenlendiğinde (3.5.11) eşitliği elde edilir. \square

Sonuç 3.5.5: M yüzeyi (3.5.2) parametrelendirmesiyle verilen tensör çarpım yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin minimal olması için gerek ve yeter şart c_2 eğrisinin orijin merkezli bir hiperbol olmasıdır (Mihai ve ark. 1995).

Sonuç 3.5.6: M yüzeyi (3.5.2) parametrelendirmesiyle verilen tensör çarpım yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin Wintgen ideal yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$3(\alpha\beta' - \alpha'\beta)((\alpha')^2 + (\beta')^2) - (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = 0 \quad (3.5.13)$$

olmasıdır.

İspat. (3.5.3) ve (3.5.11) eşitliklerinden

$$3b(v) - c(v) = 0$$

elde edilir. Ayrıca (3.5.4) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5.7: $c_2(v) = (r(v)\cos v, r(v)\sin v)$ eğrisi ile $c_1(u) = (\cos u, \sin u)$ çemberinin tensör çarpım yüzeyi

$$X(u, v) = (r(v)\cos v \cos u, r(v)\sin v \cos u, r(v)\cos v \sin u, r(v)\sin v \sin u)$$

yamasıyla verilen bir yüzeydir.

Bu yüzey yamasında ikinci ve üçüncü bileşenler yer değiştirilirse Vranceanu yüzeyi elde edilir.

3.6. Kanal Yüzeyleri

Tanım 3.6.1: $\gamma \subset E^4$ regüler birim hızlı bir eğri olsun ve

$$\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u), 0) \quad (3.6.1)$$

parametrelendirmesiyle verilsin. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, γ eğrisinin Frenet çatısı olmak üzere aşağıdaki Frenet denklemleri sağlansın;

$$\begin{aligned} \gamma'(u) &= e_1(u), \\ e_1'(u) &= \kappa(u)e_2(u), \\ e_2'(u) &= -\kappa(u)e_1(u) + \tau(u)e_3(u), \\ e_3'(u) &= -\tau(u)e_2(u), \\ e_4'(u) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Burada, κ ve τ sırasıyla γ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. Böylece,

$$M : X(u, v) = \gamma(u) + r(u)(e_3(u) \cos v + e_4(u) \sin v) \quad (3.6.3)$$

parametrelendirmesiyle verilen yüzeye E^4 de bir *kanal yüzeyi* adı verilir (Gal ve Pal 2009). Burada $r(u)$ reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur.

Örnek 3.6.2: E^3 de helis eğrisi

$$\gamma(u) = \left(a \cos \frac{u}{c}, a \sin \frac{u}{c}, \frac{bu}{c} \right)$$

üzerine kurulan kanal yüzeyi

$$X(u, v) = \left(a \cos \frac{u}{c} + \frac{br(u)}{c} \sin \frac{u}{c} \cos v, a \sin \frac{u}{c} - \frac{br(u)}{c} \cos \frac{u}{c} \cos v, \frac{bu}{c} + \frac{ar(u)}{c} \cos v, r(u) \sin v \right)$$

parametrelendirmesiyle ifade edilir.

Örnek 3.6.3: E^3 de genel helis eğrisi

$$\gamma(u) = \left(\frac{(1+u)^{3/2}}{3}, \frac{(1-u)^{3/2}}{3}, \frac{u}{\sqrt{2}} \right)$$

üzerine kurulan kanal yüzeyi

$$X(u, v) = \left(\frac{(1+u)^{3/2}}{3} - \frac{r(u)(1+u)^{1/2}}{2} \cos v, \frac{(1-u)^{3/2}}{3} + \frac{r(u)(1-u)^{1/2}}{2} \cos v, \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{r(u)}{\sqrt{2}} \cos v, r(u) \sin v \right)$$

parametrelendirmesiyle ifade edilir.

Önerme 3.6.4: M yüzeyi (3.6.3) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun.

Bu takdirde M nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{EG} \left\{ \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle - \frac{1}{E} \langle X_{uu}, X_u \rangle \langle X_{vv}, X_u \rangle - \langle X_{uv}, X_{uv} \rangle + \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_u \rangle^2 + \frac{1}{G} \langle X_{uv}, X_v \rangle^2 \right\} \quad (3.6.4)$$

dir.

İspat. $p = X(u, v)$ noktasında M yüzeyinin teğet uzayı

$$\begin{aligned} X_u &= e_1 - r(u)\tau \cos v e_2 + r'(u) \cos v e_3 + r'(u) \sin v e_4, \\ X_v &= -r(u) \sin v e_3 + r(u) \cos v e_4, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

ile gerilir. Böylece (2.2.2) eşitliğinden 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (r'(u))^2 + r(u)^2 \tau(u)^2 \cos^2 v, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = r(u)^2 \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

dir. Ayrıca $X(u, v)$ yamasının ikinci kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \kappa(u)r(u)\tau(u) \cos v e_1 + (\kappa(u) - (r(u)\tau(u))' \cos v - r'(u)\tau(u) \cos v) e_2 \\ &\quad + \cos v (r''(u) - r(u)\tau(u)^2) e_3 + r''(u) \sin v e_4, \\ X_{uv} &= r(u)\tau(u) \sin v e_2 - r'(u) \sin v e_3 + r'(u) \cos v e_4, \\ X_{vv} &= -r(u) \cos v e_3 - r(u) \sin v e_4 \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

dir. Böylece (3.6.5) ve (3.6.7) eşitliklerinden

$$\langle X_{vv}, X_v \rangle = 0 \quad (3.6.8)$$

elde edilir. Buradan (3.6.8) ve (2.2.15) eşitlikleri (2.2.27) de yerine yazılıp $F=0$ durumu göz önünde bulundurularak (3.6.4) eşitliği elde edilir. \square

Sonuç 3.6.5: M yüzeyi (3.6.3) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun.

Bu takdirde M nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{r(u)}{E^2 G} \left\{ r(u) \cos^2 v (2\tau(u)^2 + 2(r'(u))^2 \tau(u)^2 - r(u)r''(u)\tau(u)^2 + r'(u)\tau(u)(r(u)\tau(u))') \right\} \\ \left\{ + r(u)^3 \tau(u)^4 \cos^4 v - r''(u) - r(u)\tau(u)^2 (1 + (r'(u))^2) \right\} \quad (3.6.9)$$

dir.

İspat. (3.6.5) ve (3.6.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\langle X_{uu}, X_{vv} \rangle &= r(u)^2 \tau(u)^2 \cos^2 v - r(u)r''(u), \\
\langle X_{uv}, X_{uv} \rangle &= r(u)^2 \tau(u)^2 \sin^2 v + (r'(u))^2, \\
\langle X_{uu}, X_u \rangle &= r(u)\tau(u)(r(u)\tau(u))' \cos^2 v + r'(u)r''(u), \\
\langle X_{vv}, X_v \rangle &= -r(u)r'(u), \\
\langle X_{uv}, X_u \rangle &= -r(u)^2 \tau(u)^2 \cos v \sin v, \\
\langle X_{uv}, X_v \rangle &= r(u)r'(u)
\end{aligned} \tag{3.6.10}$$

elde edilir. Böylece (3.6.10) deki eşitlikler (3.6.4) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 3.6.8: M yüzeyi (3.6.3) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun.

Bu takdirde M nin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}
4\|\bar{H}\|^2 &= \frac{\langle X_{uu}, X_{uu} \rangle}{E^2} + \frac{2\langle X_{uu}, X_{vv} \rangle}{EG} + \frac{\langle X_{vv}, X_{vv} \rangle}{G^2} + \frac{\langle X_{uv}, X_v \rangle}{EG^2} (2\langle X_{vv}, X_u \rangle + \langle X_{uv}, X_v \rangle) \\
&+ \frac{\langle X_{uv}, X_u \rangle}{E^2G} (2\langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_{uv}, X_u \rangle) - \frac{2}{E^2G} \langle X_{uu}, X_u \rangle \langle X_{vv}, X_u \rangle - \frac{\langle X_{uu}, X_u \rangle^2}{E^3}
\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

dir.

İspat. $F = 0$ olduğundan (2.2.31) eşitliğinden

$$4\|\bar{H}\|^2 = \frac{\|h(X_u, X_u)\|^2}{E^2} + \frac{\|h(X_v, X_v)\|^2}{G^2} + \frac{2\langle h(X_u, X_u), h(X_v, X_v) \rangle}{EG}$$

dır. Ayrıca (2.2.15) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\|h(X_u, X_u)\|^2 &= \langle X_{uu}, X_{uu} \rangle - \frac{1}{E} \langle X_{uu}, X_u \rangle^2 + \frac{2}{G} \langle X_{uv}, X_u \rangle \langle X_{uu}, X_v \rangle + \frac{1}{G} \langle X_{uv}, X_u \rangle^2 \\
\|h(X_v, X_v)\|^2 &= \langle X_{vv}, X_{vv} \rangle + \frac{2}{E} \langle X_{uv}, X_v \rangle \langle X_{vv}, X_u \rangle + \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_v \rangle^2
\end{aligned} \tag{3.6.12}$$

elde edilir. Buradan (3.6.8) ve (3.6.12) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6.9: M yüzeyi (3.6.3) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun.

Bu takdirde M nin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}
\|\tilde{H}\|^2 &= \frac{1}{4r(u)^2 E^2} \left\{ \frac{-r(u)^2}{E} \left((r(u)\tau(u))' \cos^2 v + r'(u)r''(u) \right)^2 \right. \\
&\quad + r(u)^2 \cos^2 v \{ k(u)^2 r(u)^2 \tau(u)^2 + (((r(u)\tau(u))' + r'(u)\tau(u))^2 - r(u)^2 \tau(u)^4 \\
&\quad + 4\tau(u)^2 + 3(r'(u))^2 \tau(u)^2 - 2r(u)r''(u)\tau(u)^2 + 2r'(u)\tau(u)((r(u)\tau(u))') \} \\
&\quad + 4r(u)^4 \tau(u)^4 \cos^4 v - 2k(u)r(u)^2 \cos v (((r(u)\tau(u))' + r'(u)\tau(u)) \\
&\quad \left. + k(u)^2 r(u)^2 - 2r(u)r''(u) + 1 + (r'(u))^2 \right\} \quad (3.6.13)
\end{aligned}$$

dir.

İspat. (3.6.5) ve (3.6.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\langle X_{uu}, X_{uu} \rangle &= (r(u)^2 \tau(u)^2 k(u)^2 + (r''(u) - r(u)\tau(u)^2)^2 - (r''(u))^2) \cos^2 v \\
&\quad + (k(u) - (r(u)\tau(u))' \cos v - r'(u)\tau(u) \cos v)^2 + (r''(u))^2, \\
\langle X_{vv}, X_{vv} \rangle &= r(u)^2, \\
\langle X_{uu}, X_v \rangle &= r(u)^2 \tau(u)^2 \cos v \sin v, \\
\langle X_{uu}, X_u \rangle &= r(u)\tau(u)(r(u)\tau(u))' \cos^2 v + r'(u)r''(u)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (3.6.10) ve yukarıdaki eşitlikler Önerme (3.6.8) deki denklemde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6.10: M yüzeyi (3.6.3) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eğer γ düz bir doğru ise M nin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{-r''(u)}{r(u)(1 + (r'(u))^2)^2}$$

ve

$$\|\tilde{H}\|^2 = - \frac{\{r(u)^2 (r'(u))^2 (r''(u))^2 + (1 + (r'(u))^2)(2r(u)r''(u) - 1)\}}{4r(u)^2 (1 + (r'(u))^2)^3}$$

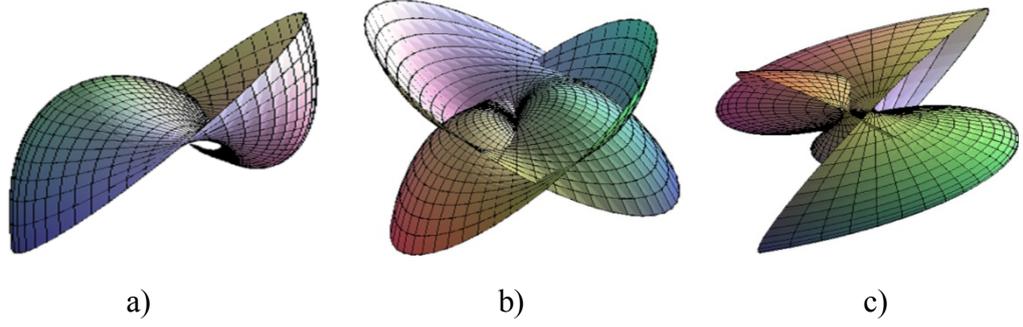
dir.

İspat. γ düz bir doğru ise bu takdirde eğrilikleri $\kappa(u) = \tau(u) = 0$ dır. Böylece bu değerler (3.6.9) ve (3.6.13) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 3.6.11: γ eğrisi helis olmak üzere

$$\text{a) } r(u) = e^{u/3}, \quad \text{b) } r(u) = u^3, \quad \text{c) } r(u) = 3u + 5$$

fonksiyonları için yüzeylerin E^3 deki izdüşümleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.

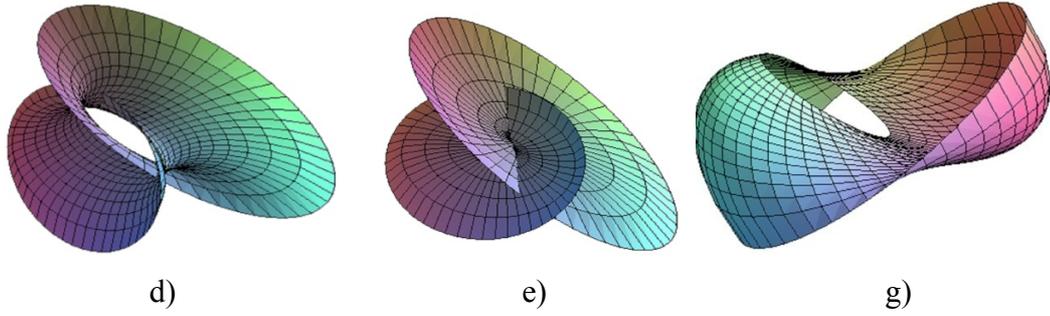


Şekil 3.6.1. Helis eğrisinin kanal yüzeyinin E^3 deki izdüşümleri

Örnek 3.6.12: γ eğrisi genel helis olmak üzere

$$d) r(u) = e^{u^2}, \quad e) r(u) = 5u^2, \quad f) r(u) = 3u + 5$$

fonksiyonları için yüzeylerin E^3 deki izdüşümleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.

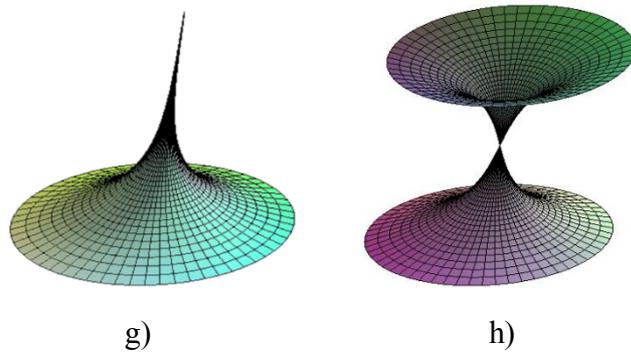


Şekil 3.6.2. Genel helis eğrisinin kanal yüzeyinin E^3 deki izdüşümleri

Örnek 3.6.13: γ eğrisi düz bir doğru olmak üzere

$$g) r(u) = e^u, \quad h) r(u) = \sinh u$$

fonksiyonları için yüzeylerin E^3 deki izdüşümleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 3.6.3. Düz doğru üzerine kurulan kanal yüzeyinin E^3 deki izdüşümleri

3.7. Meridyen Yüzeyleri

E^4 ün standart ortonormal çatısı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olmak üzere $\{e_1, e_2, e_3\}$ tarafından gerilen orijin merkezli birim küre $S^2(1)$ olsun. Bu takdirde $S^2(1)$ birim küresi üzerinde birim hızlı $\gamma = \gamma(v), v \in J \subset R$ eğrisi verilsin. $T = \gamma'$ olmak üzere γ eğrisinin çatısı $\{T(v), N(v), \gamma(v)\}$ ile verilir ve

$$\begin{aligned}\gamma'(v) &= T(v), \\ T'(v) &= \kappa(v)N(v) - \gamma(v), \\ N'(v) &= -\kappa(v)T(v)\end{aligned}\tag{3.7.1}$$

denklemleri sağlanır. Burada, $\kappa(v)$ γ eğrisinin küresel eğriliğidir ve $\kappa_\alpha(u)$ da $\alpha : \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u))$ meridyen eğrisinin eğriliği olup

$$\kappa_\alpha = \alpha'_1(u)\alpha''_2(u) - \alpha''_1(u)\alpha'_2(u) = \frac{-\alpha''_1(u)}{\sqrt{1 - (\alpha'_1(u))^2}}\tag{3.7.2}$$

dır.

Tanım 3.7.1: $\alpha : \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u))$ eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde

$$M^2 : X(u, v) = \alpha_1(u)\gamma(v) + \alpha_2(u)e_4\tag{3.7.3}$$

parametrelendirmesiyle verilen M^2 yüzeyi α meridyen eğrisinin E^4 de Oe_4 ekseninde etrafında döndürülmesiyle elde edilen $M^3 \subset E^4$ rotasyonel hiperyüzeyinde yatan bir yüzeydir. Böylece M^2 yüzeyi M^3 ün meridyenlerinden oluştuğundan *meridyen yüzeyi* adı verilir (Ganchev ve Milousheva 2010). Burada $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ reel değerli türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece $\gamma = \gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v), \gamma_3(v))$ olmak üzere (3.7.3) parametrelendirilmesiyle verilen meridyen yüzeyi

$$M^2 : X(u, v) = (\alpha_1(u)\gamma_1(v), \alpha_1(u)\gamma_2(v), \alpha_1(u)\gamma_3(v), \alpha_2(u))\tag{3.7.4}$$

yamasıyla ifade edilir.

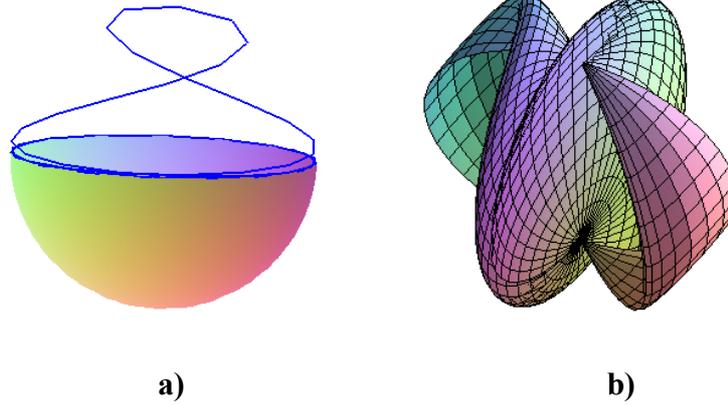
Örnek 3.7.2. E^3 de birim hızlı, küresel bir eğri

$$\gamma(v) = \left(-\sqrt{1 - \tanh^2(v+3)}, -\cos(v) \tanh(v+3), -\sin(v) \tanh(v+3) \right)$$

olmak üzere (Şekil 3.7.1 a)), $\gamma(v)$ nin oluşturduğu meridyen yüzey yaması

$$X(u, v) = \left(-\sqrt{1 - \tanh^2(v+3)} \cos u, -\cos v \tanh(v+3) \cos u, -\sin v \tanh(v+3) \cos u, \sin u \right)$$

şeklinde seçilirse bu yüzeyin E^3 deki izdüşümü Şekil 3.7.1 b) deki gibidir.



Şekil 3.7.1. Küresel eğri ve meridyen yüzeyi

Önerme 3.7.3: M yüzeyi (3.7.3) parametrelendirmesi ile verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{\kappa_\alpha(u)\alpha_2'(u)}{\alpha_1(u)} \quad (3.7.5)$$

dır.

İspat: M yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= X_u(u, v) = \alpha_1'(u)\gamma(v) + \alpha_2'(u)e_4, \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= X_v(u, v) = \alpha_1(u)T(v) \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece M nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = (\alpha_1(u))^2 \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

dir. Böylece $W^2 = EG - F^2 = (\alpha_1(u))^2$ dir.

Ayrıca M nin ikinci kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= \alpha_1''(u)\gamma(v) + \alpha_2''(u)e_4, \\ X_{uv}(u, v) &= \alpha_1'(u)T(v), \\ X_{vv}(u, v) &= \alpha_1(u)\kappa(v)N(v) - \alpha_1(u)\gamma(v) \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

dir. Bununla birlikte M yüzeyinin normal uzayı

$$\begin{aligned} N_1(u, v) &= N(v), \\ N_2(u, v) &= -\alpha_2'(u)\gamma(v) + \alpha_1'(u)e_4 \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

vektör alanları ile gerilir.

Böylece ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= \langle X_{uu}(u, v), N_1(u, v) \rangle = 0, \\ c_{12}^1 &= \langle X_{uv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = 0, \\ c_{22}^1 &= \langle X_{vv}(u, v), N_1(u, v) \rangle = \alpha_1(u)\kappa(v), \\ c_{11}^2 &= \langle X_{uu}(u, v), N_2(u, v) \rangle = \alpha_1'(u)\alpha_2''(u) - \alpha_1''(u)\alpha_2'(u) = \kappa_\alpha(u), \\ c_{12}^2 &= \langle X_{uv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = 0, \\ c_{22}^2 &= \langle X_{vv}(u, v), N_2(u, v) \rangle = \alpha_1(u)\alpha_2'(u) \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

dir. Böylece (2.2.16) yardımıyla

$$K = \frac{c_{11}^2 c_{22}^2}{G} \quad (3.7.11)$$

elde edilir. Böylece (3.7.7) ve (3.7.10) daki eşitlikler (3.7.11) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 3.7.4: M yüzeyi (3.7.3) parametrelendirmesi ile verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Bu takdirde M yüzeyinin düz bir yüzey olması için gerek ve yeter şart $\alpha(u)$ eğrisinin $\alpha(u) = (\alpha_1(u), c)$ biçiminde bir eğri ya da M yüzeyinin açılabilir bir regle yüzeyi olmasıdır.

İspat: (3.7.5) eşitliğinden $K = \frac{\kappa_\alpha(u)\alpha_2'(u)}{\alpha_1(u)}$ olduğundan $\kappa_\alpha(u) = 0$ ya da $\alpha_2'(u) = 0$ dir.

Eğer $\alpha_2'(u) = 0$ ise α meridyen eğrisi $\alpha(u) = (\alpha_1(u), c)$ biçimindedir. Eğer $\kappa_\alpha(u) = 0$ ise (3.7.2) eşitliğinden $\alpha_1''(u) = 0$ olur. Böylece α meridyen eğrisi düz bir doğrudur ve $K = 0$ olduğundan meridyen yüzeyi açılabilir regle yüzeydir. \square

Önerme 3.7.5: M yüzeyi (3.7.3) parametrelendirmesi ile verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Bu takdirde M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{\kappa(v)}{2\alpha_1(u)} N_1(u, v) + \frac{\kappa_\alpha(u)\alpha_1(u) + \alpha_2'(u)}{2\alpha_1(u)} N_2(u, v) \quad (3.7.12)$$

dir.

İspat. (3.7.7) ve (3.7.10) eşitlikleri (2.2.17) de yerine yazılırsa

$$\vec{H} = \frac{c_{22}^1}{2G} N_1(u, v) + \frac{Gc_{11}^2 + c_{22}^2}{2G} N_2(u, v)$$

bulunur. Son eşitlik yeniden düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir. \square

Önerme 3.7.6: M yüzeyi (3.7.3) parametrelendirmesi ile verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Bu takdirde M yüzeyinin normal eğriliği $K_N = 0$ dır.

İspat. (3.7.7) ve (3.7.10) eşitlikleri (2.2.47) de yerine yazılırsa $K_N = 0$ bulunur. \square

Sonuç 3.7.7: M yüzeyi (3.7.3) parametrelendirmesiyle verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin Wintgen ideal yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_\alpha(u) = \frac{\alpha_2'(u)}{\alpha_1(u)} \quad \text{ve} \quad \kappa(v) = 0 \quad (3.7.13)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. (3.7.5) ve (3.7.12) eşitlikleri yardımıyla

$$\kappa^2 + (\kappa_\alpha \alpha_1 - \alpha_2')^2 = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklem yardımıyla da (3.7.13) eşitliği bulunur.

4. E^4 DE 1-TİPİNDE GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP OLAN YÜZEYLER

4.0. Giriş

Bu bölümde, bir önceki bölümde ele alınan Vranceanu yüzeyleri, tensör çarpım yüzeyleri, meridyen yüzeyleri ve Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeylerinin 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip olmaları için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir.

4.1. E^4 de Bir Yüzeyin Gauss Dönüşümü

Tanım 4.1.1: M yüzeyi $X : U \subset E^2 \rightarrow E^n$ yaması ile verilsin. M üzerinde tanımlı herhangi bir türevlenebilir ψ fonksiyonu için ψ nin *Laplası*

$$\Delta\psi = -\left(\tilde{\nabla}_{x_i}\tilde{\nabla}_{x_i}\psi - \tilde{\nabla}_{\nabla_{x_i}x_i}\psi\right) \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanır (Chen 1973).

Tanım 4.1.2: E^n nin ortonormal çatısı e_1, e_2, \dots, e_n olmak üzere e_1, e_2 vektör alanları M yüzeyine teğet ve e_3, \dots, e_n vektör alanları da normal olsun. Bu takdirde M nin *Gauss dönüşümü*

$$G(p) = (e_1 \wedge e_2)(p) \quad (4.1.2)$$

biçiminde tanımlanır. Burada \wedge dış çarpımı belirtir.

Eğer M yüzeyinin Gauss dönüşümü

$$\Delta G = f(G + \vec{C}) \quad (4.1.3)$$

şartını sağlarsa M yüzeyi *noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme* sahiptir denir. Burada f fonksiyonu M üzerinde sıfırdan farklı türevlenebilir bir fonksiyon ve \vec{C} sabit bir vektördür (Baikoussis ve Blair 1992), (Baikoussis ve ark. 1993), (Baikoussis ve Verstraelen 1993) ve (Kim ve Yoon 2000a).

Eğer f fonksiyonu sabit değil ise M ye *has 1-tipinde Gauss dönüşüme* sahiptir denir.

Ayrıca $\vec{C} = \vec{0}$ (ya da $\vec{C} \neq \vec{0}$) M yüzeyi 1. çeşit (yada 2. çeşit) 1-tipinde Gauss dönüşüme sahiptir denir (Chen ve ark. 2005), (Choi ve Kim 2001), (Kim ve Yoon 2000b) ve (Kim ve Yoon 2005).

4.2. E^4 de 1-tipinde Gauss Dönüşümüne Sahip Olan Yüzeyler

4.2.1. Vranceanu Yüzeyi

Bu kısımda Bölüm 3.2 de

$$X(u, v) = (r(v) \cos v \cos u, r(v) \cos v \sin u, r(v) \sin v \cos u, r(v) \sin v \sin u) \quad (4.2.1.1)$$

yamasıyla verilen Vranceanu yüzeyinin 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

M bir Vranceanu yüzeyi olmak üzere M nin p noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$

$\{X_1, X_2\}$ ve p noktasındaki normal uzayı $T_p^\perp(M)$ ise $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları ile

gerilsin. Bu vektörler sırasıyla

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{r(v)} \frac{\partial}{\partial u} = (-\cos v \sin u, \cos v \cos u, -\sin v \sin u, \sin v \cos u), \\ X_2 &= \frac{1}{A(v)} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{A(v)} (B(v) \cos u, B(v) \sin u, C(v) \cos u, C(v) \sin u), \\ N_1 &= \frac{1}{A(v)} = (-C(v) \cos u, -C(v) \sin u, B(v) \cos u, B(v) \sin u), \\ N_2 &= (-\sin v \sin u, \sin v \cos u, \cos v \sin u, -\cos v \cos u) \end{aligned}$$

biçiminde oluşturulur. Burada

$$\begin{aligned} A(v) &= \sqrt{(r(v))^2 + (r'(v))^2}, \\ B(v) &= r'(v) \cos v - r(v) \sin v, \\ C(v) &= r'(v) \sin v + r(v) \cos v \end{aligned} \quad (4.2.1.2)$$

dır.

Bununla birlikte Gauss ve Weingarten denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_1} X_1 &= -\lambda(v)k(v)X_2 + \lambda(v)N_1 \\ \tilde{\nabla}_{X_2} X_2 &= \mu(v)N_1 \\ \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 &= -\lambda(v)N_2 \\ \tilde{\nabla}_{X_1} X_2 &= \lambda(v)k(v)X_1 - \lambda(v)N_2 \\ \tilde{\nabla}_{X_1} N_1 &= -\lambda(v)X_1 - \lambda(v)k(v)N_2 \\ \tilde{\nabla}_{X_1} N_2 &= \lambda(v)X_2 + \lambda(v)k(v)N_1 \\ \tilde{\nabla}_{X_2} N_1 &= -\mu(v)X_2 \\ \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 &= \lambda(v)X_1 \end{aligned} \quad (4.2.1.3)$$

elde edilir (Mihai 2004, Rouxel 1980). Burada

$$\begin{aligned}\lambda(v) &= \frac{1}{A(v)} = \frac{1}{\sqrt{(r(v))^2 + (r'(v))^2}}, \\ k(v) &= \frac{r'(v)}{r(v)}, \\ \mu(v) &= \frac{2(r'(v))^2 - r(v)r''(v) + r^2(v)}{\left((r(v))^2 + (r'(v))^2\right)^{3/2}},\end{aligned}\tag{4.2.1.4}$$

dır. Böylece (4.2.1.3) deki denklemlerin teğet ve normal bileşenleri

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1} X_1 &= -\lambda(v)k(v)X_2, & A_{N_1} X_1 &= \lambda(v)X_1, \\ \nabla_{X_2} X_2 &= 0, & A_{N_1} X_2 &= \mu(v)X_2, \\ \nabla_{X_1} X_2 &= \lambda(v)k(v)X_1, & A_{N_2} X_1 &= -\lambda(v)X_2, \\ \nabla_{X_2} X_1 &= 0, & A_{N_2} X_2 &= -\lambda(v)X_1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}h(X_1, X_1) &= \lambda(v)N_1, & D_{X_1} N_1 &= -\lambda(v)k(v)N_2, \\ h(X_1, X_2) &= -\lambda(v)N_2, & D_{X_1} N_2 &= \lambda(v)k(v)N_1, \\ h(X_2, X_2) &= \mu(v)N_1 & D_{X_2} N_1 &= D_{X_2} N_2 = 0,\end{aligned}\tag{4.2.1.5}$$

dir.

Ayrıca (3.1.9),(2.2.33) ve (4.2.1.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}h_{11}^1 &= \lambda, h_{12}^1 = 0, h_{22}^1 = \mu, \\ h_{11}^2 &= 0, h_{12}^2 = -\lambda, h_{22}^2 = 0\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \lambda(\mu - \lambda) = \frac{(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^2}\tag{4.2.1.6}$$

ve

$$\|H\| = \frac{1}{2}(\mu + \lambda)\tag{4.2.1.7}$$

dir.

M nin Gauss dönüşümü (4.1.2) yardımıyla $G = (X_1 \wedge X_2)$ dir. Böylece G nin Laplası (4.1.1) eşitliğinden

$$-\Delta G = \tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} G + \tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} G - \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} G - \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} G\tag{4.2.1.8}$$

ile hesaplanır. Böylece kovaryant türevlerden

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X_1} G &= \tilde{\nabla}_{X_1} (X_1 \wedge X_2) \\ &= (\tilde{\nabla}_{X_1} X_1) \wedge X_2 + X_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_1} X_2) \\ &= -\lambda(v)X_2 \wedge N_1 - \lambda(v)X_1 \wedge N_2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X_2} G &= \tilde{\nabla}_{X_2} (X_1 \wedge X_2) \\ &= (\tilde{\nabla}_{X_2} X_1) \wedge X_2 + X_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_2} X_2) \\ &= \lambda(v)X_2 \wedge N_2 + \mu(v)X_1 \wedge N_1\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.2.1.3) yardımıyla

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} G &= \tilde{\nabla}_{X_1} (-\lambda(v)X_2 \wedge N_1 - \lambda(v)X_1 \wedge N_2) \\ &= -\lambda(v)(\tilde{\nabla}_{X_1} X_2 \wedge N_1 + X_2 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_1) - \lambda(v)(\tilde{\nabla}_{X_1} X_1 \wedge N_2 + X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_2) \quad (4.2.1.9) \\ &= -2\lambda^2(v)X_1 \wedge X_2 - 2\lambda^2(v)k(v)X_1 \wedge N_1 - 2\lambda^2(v)N_1 \wedge N_2 \\ &\quad + 2\lambda^2(v)k(v)X_2 \wedge N_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} G &= \tilde{\nabla}_{X_2} (\lambda(v)X_2 \wedge N_2 + \mu(v)X_1 \wedge N_1) \\ &= X_2[\lambda(v)]X_2 \wedge N_2 + \lambda(v)\tilde{\nabla}_{X_2} X_2 \wedge N_2 + \lambda(v)X_2 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 \\ &\quad + X_2[\mu(v)]X_1 \wedge N_1 + \mu(v)\tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_1 + \mu(v)X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_1 \quad (4.2.1.10) \\ &= -(\lambda^2(v) + \mu^2(v))X_1 \wedge X_2 + X_2[\mu(v)]X_1 \wedge N_1 \\ &\quad + X_2[\lambda(v)]X_2 \wedge N_2 + 2\lambda(v)\mu(v)N_1 \wedge N_2,\end{aligned}$$

benzer şekilde

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} G &= \tilde{\nabla}_{-\lambda(v)k(v)X_2} G = -\lambda(v)k(v)\tilde{\nabla}_{X_2} G \\ &= -\lambda^2(v)k(v)X_2 \wedge N_2 - \lambda(v)k(v)\mu(v)X_1 \wedge N_1 \quad (4.2.1.11)\end{aligned}$$

$$\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} G = 0 \quad (4.2.1.12)$$

dir. Böylece (4.2.1.9)- (4.2.1.12) eşitlikleri (4.2.1.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}-\Delta G &= (X_2[\mu(v)] - 2\lambda^2(v)k(v) + \lambda(v)k(v)\mu(v))X_1 \wedge N_1 \\ &\quad + (3\lambda^2(v)k(v) + X_2[\lambda(v)])X_2 \wedge N_2 \quad (4.2.1.13) \\ &\quad - (3\lambda^2(v) + \mu^2(v))X_1 \wedge X_2 - 2\lambda(v)(\lambda(v) - \mu(v))N_1 \wedge N_2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}X_2[\lambda(v)] &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial v} \lambda(v) \\ X_2[\mu(v)] &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial v} \mu(v)\end{aligned}$$

dır. Farz edelim ki Vranceanu yüzeyinin Gauss dönüşümü harmonik (yani $\Delta G = \vec{0}$) olsun. Böylece (4.1.3) eşitliğinden $f(G + \vec{C}) = 0$ dır. Eğer $f \neq 0$ ise $G = -\vec{C}$ için M yüzeyi bir düzlem parçası belirtir, fakat düzlem bir Vranceanu yüzeyi değildir. İkinci olarak $f = 0$ olsun. Bu takdirde (4.2.1.13) den

$$3\lambda^2(v) + \mu^2(v) = 0$$

dır. Bu da bize $\lambda = \mu = 0$ sonucunu verir. Bu bir çelişki oluşturacağından bu durum söz konusu olamaz.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.1.1: Harmonik Gauss dönüşümüne sahip Vranceanu yüzeyi yoktur (Arslan ve ark. 2011b).

Farz edelim ki (4.2.1.1) yamasıyla verilen Vranceanu yüzeyi noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip (Yani $\Delta G = f(G + \vec{C})$) olsun. Bu takdirde (4.1.3) ve (4.2.1.13) yardımıyla

$$\begin{aligned} f + f\langle \vec{C}, X_1 \wedge X_2 \rangle &= 3\lambda^2(v) + \mu^2(v), \\ f\langle \vec{C}, X_1 \wedge N_1 \rangle &= -X_2[\mu(v)] + 2\lambda^2(v)k(v) - \lambda(v)k(v)\mu(v), \\ f\langle \vec{C}, X_2 \wedge N_2 \rangle &= -3\lambda^2(v)k(v) - X_2[\lambda(v)], \\ f\langle \vec{C}, N_1 \wedge N_2 \rangle &= 2\lambda(v)(\lambda(v) - \mu(v)) \end{aligned} \quad (4.2.1.14)$$

dir. Burada $f \neq 0$ olup türevlenebilir bir fonksiyondur. Ayrıca λ fonksiyonu M nin her noktasında sıfırdan farklı bir fonksiyondur. Böylece (4.2.1.13) yardımıyla

$$\begin{aligned} \langle \vec{C}, X_1 \wedge N_2 \rangle &= 0, \\ \langle \vec{C}, X_2 \wedge N_1 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.1.15)$$

dır. (4.2.1.15) eşitliklerinin sırasıyla X_1 ve X_2 ye göre kovaryant türevleri alınırsa (4.2.1.3) ve (4.2.1.14) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} &\langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_1} X_1 \wedge N_2 \rangle + \langle \vec{C}, X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_2 \rangle = 0 \\ &-\lambda(v)k(v)(3\lambda^2(v)k(v) + X_2[\lambda(v)]) + \lambda(v)(-2\lambda^2(v) + 2\lambda(v)\mu(v)) - \\ &-\lambda(v)(3\lambda^2(v) + \mu^2(v) + f) + \lambda(v)k(v)(X_2[\mu(v)] - 2\lambda^2(v)k(v) + \lambda(v)k(v)\mu(v)) = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_1} X_2 \wedge N_1 \rangle + \langle \vec{C}, X_2 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_1 \rangle = 0 \\ &\lambda(v)k(v)(X_2[\mu(v)] - 2\lambda^2(v)k(v) + \lambda(v)k(v)\mu(v)) + \lambda(v)(-2\lambda^2(v) + 2\lambda(v)\mu(v)) - \\ &-\lambda(v)(3\lambda^2(v) + \mu^2(v) + f) - \lambda(v)k(v)(3\lambda^2(v)k(v) + X_2[\lambda(v)]) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerden f yi çekersek

$$\begin{aligned} f &= 5\lambda^2(v)(k^2(v) + 1) - \lambda(v)\mu(v)(k^2(v) + 2) \\ &+ k(v)(X_2[\lambda(v)] - X_2[\mu(v)]) + \mu^2(v) \end{aligned} \quad (4.2.1.16)$$

bulunur. Ayrıca (2.2.8) ve (2.2.41) Codazzi ve Gauss denklemlerinden sırasıyla

$$X_2[\lambda(v)] = -2\lambda^2(v)k(v) + \lambda(v)\mu(v)k(v) \quad (4.2.1.17)$$

ve

$$X_2[\lambda(v)]k(v) + X_2[k(v)]\lambda(v) + \lambda^2(v)k^2(v) = \lambda^2(v) - \lambda(v)\mu(v) \quad (4.2.1.18)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (4.2.1.17) eşitliği (4.2.1.18) de yerine yazılırsa

$$(\lambda(v) - \mu(v))(k^2(v) + 1) - X_2[k(v)] = 0 \quad (4.2.1.19)$$

denklemini elde edilir.

Aşağıdaki durumlar incelenebilir;

I. Durum: $\vec{C} = \vec{0}$ hali:

Vranceanu yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 1-tipinde olsun. Bu takdirde (4.2.1.14) denkleminin son eşitliğinden $\lambda(v) - \mu(v) = 0$ dır. Böylece (4.2.1.6) denkleminde $K = 0$ bulunur. Buradan Sonuç 3.2.3 den $r(v) = ae^{bv}$; $a, b \in R$ dır. O halde (4.2.1.4) yardımıyla $k(v) = b = sbt.$ bulunur. Buradan $\lambda(v) - \mu(v) = 0$ eşitliği (4.2.1.17) de yerine yazılırsa $X_2[\lambda(v)] = k(v)\lambda^2(v)$ dir. Böylece $\lambda'(v) = k\lambda(v)$ elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden $\lambda(v) = e^{kv+c}$, $k, c \in R$ elde edilir. Böylece $k(v) = sbt.$ ve $\lambda(v) - \mu(v) = 0$ ifadeleri (4.2.1.16) da yazılırsa

$$f = 4e^{2(bv+c)}(b^2 + 1) \quad (4.2.1.20)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.2: M yüzeyi düz bir Vranceanu yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 1-tipinde ise $f = 4e^{2(bv+c)}(b^2 + 1)$ dir.

Açıklama 4.2.1.3: M yüzeyi 1. çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olsun. Bu takdirde $\lambda(v) = \mu(v)$ olduğundan (4.2.1.6) eşitliği yardımıyla $K = 0$ bulunur. Eğer $a=1$ ve $b=0$ alınırsa $r(v)=1$ elde edilir. Bu durumda Açıklama 3.2.4 den yüzey Clifford tor yüzeyi olur (Yoon 2003).

II. Durum: Vranceanu yüzeyinin Gauss dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde olsun. Yani $\vec{C} \neq \vec{0}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar söz konusudur.

II-(a) Durumu: Vranceanu yüzeyinin düz olması hali.

Vranceanu yüzeyi düz bir yüzey (yani $\lambda(v) = \mu(v)$) olsun. Bu takdirde (4.2.1.14) eşitliğinden $\vec{C} = \vec{0}$ bulunur. Bu da bir çelişki oluşturur. Bu nedenle bu durum söz konusu olamaz.

II-(b) Durumu: Vranceanu yüzeyinin düz olmaması hali.

Farzedelim ki $M_0 = \{p \in M | K(p) \neq 0\}$ kümesi boş kümeden farklı olsun. Bu takdirde M_0 üzerindeki her noktada $\lambda(v) \neq \mu(v)$ dir. Böylece (4.2.1.4) eşitliği (4.2.1.19) da yazılırsa M_0 üzerinde

$$(rr'' - (r')^2)(1 - (r^2 + (r')^2)^{1/2}) = 0 \quad (4.2.1.21)$$

dir. Ayrıca (4.2.1.6) denkleminde $(r')^2 - rr'' \neq 0$ olduğundan

$$r^2 + (r')^2 = 1 \quad (4.2.1.22)$$

dir. Böylece (4.2.1.22) eşitliğinin türevi alınırsa M_0 üzerinde $r'(r + r'') = 0$ elde edilir.

Farz edelim ki $p \in M_0$ noktasında $r + r'' \neq 0$ olsun. M_0 alt kümesinde p noktasını içeren bir bileşen $Q = \{p \in M_0 | r' = 0\}$ olsun. Böylece Q üzerinde $k(v) = 0$ dir. Buradan (4.2.1.19) eşitliğinde $k = 0$ alınırsa $\lambda(v) = \mu(v)$ elde edilir ki bu da varsayımımız ile çelişir. Böylece M_0 üzerinde

$$r + r'' = 0 \quad (4.2.1.23)$$

olmalıdır. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$r(v) = c_1 \cos(v + v_0) + c_2 \sin(v + v_0) \quad (4.2.1.24)$$

bulunur (bkz. Ek6). Burada $c_1^2 + c_2^2 = 1$ ve v_0 sabitlerdir. Böylece M bağlantılı ve K sürekli olduğundan $M = M_0$ dir. Yani, M yüzeyi düz noktalara sahip değildir.

Böylece aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.1.4: M yüzeyi düz olmayan bir Vranceanu yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyinin Gauss dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde ise bu takdirde M yüzeyi

$$X(u, v) = (c_1 \cos(v + v_0) + c_2 \sin(v + v_0))(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v \cos u, \sin v \sin u).$$

yamasıyla verilen bir yüzeydir.

Ayrıca (4.2.1.16) ve (4.2.1.24) eşitliklerinden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2.1.5: M yüzeyi düz olmayan bir Vranceanu yüzeyi olsun. M yüzeyinin Gauss

dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde ise bu takdirde $f = \frac{3}{r^2} + 2$ dir.

4.2.2. Tensör Çarpım Yüzeyi

Bu kısımda Bölüm 3.5 de

$$M : X(u, v) = (\alpha(v) \cos u, \beta(v) \cos u, \alpha(v) \sin u, \beta(v) \sin u)$$

yamasıyla tanımlanan tensör çarpım yüzeyinin 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

M bir tensör çarpım yüzeyi olmak üzere M nin p noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$

$\{X_1, X_2\}$ ve p noktasındaki normal uzayı $T_p^\perp(M)$ ise $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları ile gerilsin. Bu vektörler sırasıyla

$$X_1 = \frac{1}{\|c_2(v)\|} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha(v))^2 + (\beta(v))^2}} (-\alpha(v) \sin u, -\beta(v) \sin u, \alpha(v) \cos u, \beta(v) \cos u),$$

$$X_2 = \frac{1}{\|c_2'(v)\|} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha'(v))^2 + (\beta'(v))^2}} (\alpha'(v) \cos u, \beta'(v) \cos u, \alpha'(v) \sin u, \beta'(v) \sin u),$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{(\alpha'(v))^2 + (\beta'(v))^2}} (-\beta'(v) \cos u, \alpha'(v) \cos u, -\beta'(v) \sin u, \alpha'(v) \sin u),$$

$$N_2(u, v) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha(v))^2 + (\beta(v))^2}} (-\beta(v) \sin u, \alpha(v) \sin u, \beta(v) \cos u, -\alpha(v) \cos u)$$

biçiminde oluşturulur. Bununla birlikte Gauss ve Weingarten denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} X_1 &= -a(v)X_2 + b(v)N_1 \\
\tilde{\nabla}_{X_2} X_2 &= c(v)N_1 \\
\tilde{\nabla}_{X_2} X_1 &= b(v)N_2 \\
\tilde{\nabla}_{X_1} X_2 &= a(v)X_1 - b(v)N_2 \\
\tilde{\nabla}_{X_1} N_1 &= -b(v)X_1 - a(v)N_2 \\
\tilde{\nabla}_{X_1} N_2 &= b(v)X_2 + a(v)N_1 \\
\tilde{\nabla}_{X_2} N_1 &= -c(v)X_2 \\
\tilde{\nabla}_{X_2} N_2 &= b(v)X_1
\end{aligned} \tag{4.2.2.1}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
a(v) &= \frac{\alpha(v)\alpha'(v) + \beta(v)\beta'(v)}{\left((\alpha(v))^2 + (\beta(v))^2\right)\sqrt{(\alpha'(v))^2 + (\beta'(v))^2}}, \\
b(v) &= \frac{\alpha(v)\beta'(v) - \alpha'(v)\beta(v)}{\left((\alpha(v))^2 + (\beta(v))^2\right)\sqrt{(\alpha'(v))^2 + (\beta'(v))^2}}, \\
c(v) &= \frac{\alpha'(v)\beta''(v) - \alpha''(v)\beta'(v)}{\left((\alpha'(v))^2 + (\beta'(v))^2\right)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{4.2.2.2}$$

dir. Böylece (4.2.2.1) deki denklemlerin teğet bileşenleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1} X_1 &= -a(v)X_2, \\
\nabla_{X_2} X_2 &= 0, \\
\nabla_{X_1} X_2 &= a(v)X_1, \\
\nabla_{X_2} X_1 &= 0,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
A_{N_1} X_1 &= b(v)X_1, \\
A_{N_1} X_2 &= c(v)X_2, \\
A_{N_2} X_1 &= -b(v)X_2, \\
A_{N_2} X_2 &= -b(v)X_1
\end{aligned} \tag{4.2.2.3}$$

dır. Benzer şekilde normal bileşenleri

$$\begin{aligned}
h(X_1, X_1) &= b(v)N_1, & D_{X_1} N_1 &= -a(v)N_2, \\
h(X_1, X_2) &= -b(v)N_2, & D_{X_1} N_2 &= a(v)N_1, \\
h(X_2, X_2) &= c(v)N_1 & D_{X_2} N_1 &= D_{X_2} N_2 = 0
\end{aligned}$$

dir. Böylece (4.2.2.3) denkleminde M nin şekil operatörü matrisleri

$$A_{N_1} = \begin{pmatrix} b(v) & 0 \\ 0 & c(v) \end{pmatrix}, \quad A_{N_2} = \begin{pmatrix} 0 & -b(v) \\ -b(v) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.2.4)$$

biçimindedir.

M nin Gauss dönüşümü (4.1.2) yardımıyla $G = (X_1 \wedge X_2)$ dir. Böylece G nin Laplası (4.1.1) eşitliğinden

$$-\Delta G = \tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} G + \tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} G - \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} G - \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} G \quad (4.2.2.5)$$

ile hesaplanır. Böylece kovaryant türevlerden

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_1} G &= \tilde{\nabla}_{X_1} (X_1 \wedge X_2) \\ &= (\tilde{\nabla}_{X_1} X_1) \wedge X_2 + X_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_1} X_2) \\ &= -b(v)X_2 \wedge N_1 - b(v)X_1 \wedge N_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_2} G &= \tilde{\nabla}_{X_2} (X_1 \wedge X_2) \\ &= (\tilde{\nabla}_{X_2} X_1) \wedge X_2 + X_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_2} X_2) \\ &= b(v)X_2 \wedge N_2 + c(v)X_1 \wedge N_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.2.2.5) ve (4.2.2.1) yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} G &= \tilde{\nabla}_{X_1} (-b(v)X_2 \wedge N_1 - b(v)X_1 \wedge N_2) \\ &= -b(v)(\tilde{\nabla}_{X_1} X_2 \wedge N_1 + X_2 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_1) \\ &\quad - b(v)(\tilde{\nabla}_{X_1} X_1 \wedge N_2 + X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_2) \\ &= -2b^2(v)X_1 \wedge X_2 - 2a(v)b(v)X_1 \wedge N_1 - 2b^2(v)N_1 \wedge N_2 \\ &\quad + 2a(v)b(v)X_2 \wedge N_2 \end{aligned} \quad (4.2.2.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} G &= \tilde{\nabla}_{X_2} (b(v)X_2 \wedge N_2 + c(v)X_1 \wedge N_1) \\ &= X_2 [b(v)]X_2 \wedge N_2 + b(v)\tilde{\nabla}_{X_2} X_2 \wedge N_2 + b(v)X_2 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 \\ &\quad + X_2 [c(v)]X_1 \wedge N_1 + c(v)\tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_1 + c(v)X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_1 \\ &= -(b^2(v) + c^2(v))X_1 \wedge X_2 + X_2 [c(v)]X_1 \wedge N_1 \\ &\quad + X_2 [b(v)]X_2 \wedge N_2 + 2b(v)c(v)N_1 \wedge N_2 \end{aligned} \quad (4.2.2.7)$$

benzer şekilde

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} G &= \tilde{\nabla}_{-a(v)X_2} G = -a(v)\tilde{\nabla}_{X_2} G \\ &= -a(v)b(v)X_2 \wedge N_2 - a(v)c(v)X_1 \wedge N_1 \end{aligned} \quad (4.2.2.8)$$

$$\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} G = 0 \quad (4.2.2.9)$$

dir. Böylece (4.2.2.6)- (4.2.2.9) eşitlikleri (4.2.2.5) de yerine yazılırsa

$$-\Delta G = -(3b^2(v) + c^2(v))X_1 \wedge X_2 + (X_2[c(v)] + a(v)c(v) - 2a(v)b(v))X_1 \wedge N_1 + 2b(v)(c(v) - b(v))N_1 \wedge N_2 + (X_2[b(v)] + 3a(v)b(v))X_2 \wedge N_2 \quad (4.2.2.10)$$

elde edilir. Burada

$$X_2[c(v)] = \frac{1}{\|c'_2\|} \frac{\partial}{\partial v} c(v)$$

$$X_2[b(v)] = \frac{1}{\|c'_2\|} \frac{\partial}{\partial v} b(v)$$

dır.

Farz edelim ki tensör çarpım yüzeyinin Gauss dönüşümü harmonik olsun, yani $\Delta G = \vec{0}$ olsun. Böylece (4.2.2.10) denkleminde

$$3b^2(v) + c^2(v) = 0,$$

$$b(v)c(v) - b^2(v) = 0, \quad (4.2.2.11)$$

$$X_2[b(v)] + 3a(v)b(v) = 0,$$

$$X_2[c(v)] + a(v)c(v) - 2a(v)b(v) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. (4.2.2.11) in ilk eşitliğinden $b(v) = 0$ ve $c(v) = 0$ bulunur.

Böylece (4.2.2.4) eşitliğinden M nin E^4 de toplam geodezik bir yüzey olduğu sonucuna varılır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.2.1: (3.5.2) yamasıyla verilen tensör çarpım yüzeyi harmonik Gauss dönüşümüne sahip ise bir düzlem parçasıdır (Arslan ve ark. 2011c).

Farz edelim ki (3.5.2) yamasıyla verilen tensör çarpım yüzeyi noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip olsun. Bu takdirde (4.1.3) ve (4.2.2.10) yardımıyla

$$f + f \langle \vec{C}, X_1 \wedge X_2 \rangle = 3b^2(v) + c^2(v),$$

$$f \langle \vec{C}, X_1 \wedge N_1 \rangle = -X_2[c(v)] - a(v)c(v) + 2a(v)b(v), \quad (4.2.2.12)$$

$$f \langle \vec{C}, X_2 \wedge N_2 \rangle = -X_2[b(v)] - 3a(v)b(v),$$

$$f \langle \vec{C}, N_1 \wedge N_2 \rangle = -2b(v)(c(v) - b(v))$$

dir. Burada $f \neq 0$ olup türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece (4.2.2.10) yardımıyla

$$\langle \vec{C}, X_1 \wedge N_2 \rangle = 0,$$

$$\langle \vec{C}, X_2 \wedge N_1 \rangle = 0 \quad (4.2.2.13)$$

dır. (4.2.2.13) eşitliklerinin X_1 ve X_2 ye göre kovaryant türevleri alınırsa (4.2.2.1) ve (4.2.2.12) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} & \langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_1} X_1 \wedge N_2 \rangle + \langle \vec{C}, X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_2 \rangle = 0 \\ & -a(v)(X_2[b(v)] + 3a(v)b(v)) + 2b^2(v)(c(v) - b(v)) \\ & -b(v)(3b^2(v) + c^2(v) + f) + a(v)(X_2[c(v)] + a(v)c(v) - 2a(v)b(v)) = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_1} X_2 \wedge N_1 \rangle + \langle \vec{C}, X_2 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_1 \rangle = 0 \\ & a(v)(X_2[c(v)] + a(v)c(v) - 2a(v)b(v)) + 2b^2(v)(c(v) - b(v)) \\ & -b(v)(3b^2(v) + c^2(v) + f) - a(v)(X_2[b(v)] + 3a(v)b(v)) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerden f yi çekersek

$$f = \frac{a(X_2[c(v)] - X_2[b(v)] - 5ab + ac) + b(2bc - 4b^2 - c^2)}{b} \quad (4.2.2.14)$$

elde edilir. Ayrıca (2.2.8) ve (2.2.41) Codazzi ve Gauss denklemlerinden sırasıyla

$$X_2[b(v)] = -2a(v)b(v) + a(v)c(v) \quad (4.2.2.15)$$

ve

$$X_2[a(v)] + a^2(v) = b^2(v) - b(v)c(v) \quad (4.2.2.16)$$

eşitlikleri elde edilir.

Aşağıdaki durumlar incelenebilir;

I. Durum: $\vec{C} = \vec{0}$ hali:

Tensör çarpım yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 1-tipinde olsun. Bu takdirde (4.2.2.12) denkleminin son eşitliğinden

$$b(v)(c(v) - b(v)) = 0 \quad (4.2.2.17)$$

olur. Böylece (3.5.3) denkleminde $K = 0$ bulunur.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.2.2.2: M yüzeyi (3.5.2) yamasıyla verilen bir tensör çarpım yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 1-tipinde ise bu takdirde M düz bir yüzeydir (Arslan ve ark. 2011c).

(4.2.2.17) eşitliğinden aşağıdaki alt durumlar söz konusudur;

I (a) $b(v) = c(v) = 0$ olsun

Bu durumda (4.2.2.4) denkleminde tensör çarpım yüzeyi bir düzlem belirtir.

Örnek 4.2.2.3: $\alpha(v) = \lambda v$ ve $\beta(v) = \sqrt{1 - \lambda^2} v$ alındığında yüzey yaması

$$M : X(u, v) = (\lambda v \cos u, \sqrt{1 - \lambda^2} v \cos u, \lambda v \sin u, \sqrt{1 - \lambda^2} v \sin u)$$

biçimine dönüşür. Buradan $b(v) = c(v) = 0$ eşitliği sağlandığından tensör çarpım yüzeyi düzdür. Ayrıca $H = 0$ olduğundan yüzey minimaldir.

I (b) $b(v) = 0$ ve $b(v) \neq c(v)$ olsun.

Farzedelim ki $M_0 = \{p \in M \mid b(v) \neq c(v)\}$ kümesi boş kümeden farklı olsun. Bu takdirde (4.2.2.17) eşitliğinden M_0 üzerindeki her noktada $b(v) = 0$ dır. Böylece (4.2.2.15) eşitliğinden $a(v)c(v) = 0$ elde edilir. Eğer bazı $v_0 \in M_0$ için $a(v_0) \neq 0$ ise bu durumda $c(v_0) = 0$ elde edilir ki bu da bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla $a(v) = 0$ dır. Böylece (4.2.2.2) den $\alpha(v) = sbt$ ve $\beta(v) = sbt$ bulunur. Buradan $c_2(v)$ düzlemsel eğrisi sabit olamayacağından bu durum söz konusu olamaz. Sonuç olarak $b(v) = 0$ hali söz konusu değildir.

I (c) $b(v) = c(v)$ ve $b(v) \neq 0$ olsun

Böylece (4.2.2.16) eşitliğinden

$$X_2[a(v)] + a^2(v) = 0$$

bulunur. Buradan

$$a'(v) + \|c_2'(v)\| a^2(v) = 0$$

eşitliği elde edilir.

Eğer $c_2(v)$ birim hızlı eğri ise bu takdirde

$$a'(v) + a^2(v) = 0 \tag{4.2.2.18}$$

bulunur. Böylece (4.2.2.18) denkleminin aşikar çözümü $a(v) \equiv 0$ veya aşikar olmayan çözümü

$$a(v) = \frac{1}{v + v_0} \tag{4.2.2.19}$$

dir. Bununla birlikte (4.2.2.2) ve (4.2.2.19) eşitliklerinin ortak çözümünden

$$\frac{((\alpha(v))^2 + (\beta(v))^2)'}{2((\alpha(v))^2 + (\beta(v))^2)} = \frac{1}{v + v_0} \quad (4.2.2.20)$$

bulunur. Denklemin çözümünden

$$(\alpha(v))^2 + (\beta(v))^2 = \mu(v + v_0)^2$$

elde edilir. Ayrıca $c_2(v)$ birim hızlı olduğundan bazı $\theta(v)$ fonksiyonu için

$$\alpha'(v) = \cos(\theta(v)), \quad \beta'(v) = \sin(\theta(v)) \quad (4.2.2.21)$$

eşitlikleri sağlanır. Bununla birlikte (4.2.2.2) eşitliğinden

$$c(v) = \alpha'(v)\beta''(v) - \alpha''(v)\beta'(v) = \theta'(v) \quad (4.2.2.22)$$

bulunur. Ayrıca, (4.2.2.15) eşitliğinde $b(v) = c(v)$ alınıp (4.2.2.19) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$b'(v) = -\frac{b(v)}{v + v_0}$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$b(v) = -\frac{\lambda}{v + v_0}, \quad \lambda \in R \quad (4.2.2.23)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (4.2.2.22), (4.2.2.23) eşitlikleri ve $b(v) = c(v)$ yardımıyla

$$\theta(v) = \lambda \ln|v + v_0|$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.2.2.21) de yerine yazılırsa

$$\alpha(v) = \int \cos(\lambda \ln|v + v_0|)dv, \quad \beta(v) = \int \sin(\lambda \ln|v + v_0|)dv \quad (4.2.2.24)$$

bulunur. Benzer şekilde tersi de doğrudur.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur;

Teorem 4.2.2.4: M yüzeyi (3.5.2) yamasıyla verilen bir tensör çarpım yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 1-tipinde ise M yüzeyi ya düzlemdir ya da

$$M : X(u, v) = \left(\int \cos(\lambda \ln|v + v_0|)dv \cos u, \int \sin(\lambda \ln|v + v_0|)dv \cos u, \int \cos(\lambda \ln|v + v_0|)dv \sin u, \int \sin(\lambda \ln|v + v_0|)dv \sin u \right)$$

parametrelendirmesine sahip bir yüzeydir (Arslan ve ark. 2011c).

Açıklama: Yukarıdaki teoremden $c_2(v)$ eğrisi birim hızlı bir eğri olarak düşünülmüştür.

Örnek 4.2.2.5: $c_2(v)$ eğrisi bir çember, yani $\alpha(v) = \cos v, \beta(v) = \sin v$ alındığında tensör çarpım yüzeyi

$$M : X(u, v) = (\cos v \cos u, \sin v \cos u, \cos v \sin u, \sin v \sin u)$$

parametrelendirmesiyle ifade edilen bir çeşit Clifford tor yüzeyidir. Bu da düz bir yüzeydir. Fakat $H = 1$ olduğundan minimal değildir.

II. Durum: Tensör çarpım yüzeyinin Gauss dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde olsun. Yani $C \neq \bar{0}$ olsun. Bu durumda yüzey düz olmayan bir yüzeydir. Farz edelim ki $M_0 = \{p \in M \mid K(p) \neq 0\}$ kümesi boş kümeden farklı olsun. Bu takdirde $b(v) \neq c(v)$ ve $b(v) \neq 0$ dır. Böylece $c_2(v)$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere (4.2.2.2) deki eşitlikler (4.2.1.5) ve (4.2.1.6) da yerine yazılırsa M_0 üzerinde

$$\alpha\beta'' - \beta\alpha'' - (\alpha\alpha' + \beta\beta')(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = 0 \quad (4.2.2.25)$$

ve

$$(1 + \alpha\alpha'' + \beta\beta'')(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha\beta' - \beta\alpha')(\alpha\beta'' - \beta\alpha' - (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(\alpha^2 + \beta^2)) - (\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 = 0 \quad (4.2.2.26)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir.

Aşağıdaki örneklerde parametrik denklemlerle verilen düzlemsel eğriler birim hızlıdır ve (4.2.2.25) ile (4.2.2.26) denklemlerini sağlarlar (bkz. Ek10).

Örnek 4.2.2.6: $c_2(v)$ eğrisi

$$\alpha(v) = \lambda v + \mu, \beta(v) = \sqrt{1 - \lambda^2} v \quad (4.2.2.27)$$

alındığında tensör çarpım yüzeyi

$$M : X(u, v) = ((\lambda v + \mu) \cos u, \sqrt{1 - \lambda^2} \cos u, (\lambda v + \mu) \sin u, \sqrt{1 - \lambda^2} \sin u)$$

parametrelendirmesiyle ifade edilen Gauss dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde olan bir yüzeydir (bkz. Ek7).

Örnek 4.2.2.7: $c_2(v)$ eğrisi

$$\alpha(v) = \ln v, \beta(v) = \sqrt{v^2 - 1} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}\right) \quad (4.2.2.28)$$

alındığında tensör çarpım yüzeyi

$$M : X(u, v) = \left((\ln v \cos u, \sqrt{v^2 - 1} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}\right) \cos u, \right. \\ \left. \ln v \sin u, \sqrt{v^2 - 1} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}\right) \sin u \right)$$

parametrelendirmesiyle ifade edilen Gauss dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde olan bir yüzeydir (bkz. Ek8). \square

Örnek 4.2.2.8: $c_2(v)$ eğrisi

$$\alpha(v) = e^v, \beta(v) = \sqrt{1 - e^{2v}} - \arctan h\left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^{2v}}}\right) \quad (4.2.2.29)$$

alındığında tensör çarpım yüzeyi

$$M : X(u, v) = \left(e^v \cos u, \sqrt{1 - e^{2v}} - \arctan h\left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^{2v}}}\right) \cos u, \right. \\ \left. e^v \sin u, \sqrt{1 - e^{2v}} - \arctan h\left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^{2v}}}\right) \sin u \right)$$

parametrelendirmesiyle ifade edilen Gauss dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde olan bir yüzeydir (bkz. Ek9). \square

4.2.3. Meridyen Yüzeyi

Bu kısımda Bölüm 3.7 de

$$M^2 : X(u, v) = (\alpha_1(u)\gamma_1(v), \alpha_1(u)\gamma_2(v), \alpha_1(u)\gamma_3(v), \alpha_2(u))$$

yamasıyla tanımlanan meridyen yüzeyinin 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir. M bir meridyen yüzeyi olmak üzere M nin p noktasındaki teğet uzayı $T_p(M) \{X_1, X_2\}$ ve p noktasındaki normal uzayı $T_p^\perp(M)$ ise $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları ile gerilsin. Bu vektörler sırasıyla

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{X_u}{\|X_u\|} = \alpha'_1(u)\gamma(v) + \alpha'_2(u)e_4, \\
X_2 &= \frac{X_v}{\|X_v\|} = T(v), \\
N_1 &= N(v), \\
N_2 &= -\alpha'_2(u)\gamma(v) + \alpha'_1(u)e_4
\end{aligned}$$

biçiminde oluşturulur. Bununla birlikte Gauss ve Weingarten denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} X_1 &= \kappa_\alpha(u)N_2 \\
\tilde{\nabla}_{X_2} X_2 &= -\frac{\alpha'_1(u)}{\alpha_1(u)}X_1 + \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)}N_1 + \frac{\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)}N_2 \\
\tilde{\nabla}_{X_2} X_1 &= \frac{\alpha'_1(u)}{\alpha_1(u)}X_2 \\
\tilde{\nabla}_{X_1} X_2 &= 0 \\
\tilde{\nabla}_{X_1} N_1 &= 0 \\
\tilde{\nabla}_{X_1} N_2 &= -\kappa_\alpha(u)X_1 \\
\tilde{\nabla}_{X_2} N_1 &= -\frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)}X_2 \\
\tilde{\nabla}_{X_2} N_2 &= -\frac{\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)}X_2
\end{aligned} \tag{4.2.3.1}$$

elde edilir. Burada $\kappa(v)$, γ eğrisinin küresel eğriliğidir ve $\kappa_\alpha(u)$ da $\alpha : \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u))$ meridyen eğrisinin eğriliği olup (3.7.2) eşitliğinde verilmiştir.

Böylece (4.2.3.1) deki denklemlerin teğet bileşenleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1} X_1 &= 0, & A_{N_1} X_1 &= 0, \\
\nabla_{X_2} X_2 &= -\frac{\alpha'_1(u)}{\alpha_1(u)}X_1, & A_{N_1} X_2 &= \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)}X_2, \\
\nabla_{X_1} X_2 &= 0, & A_{N_2} X_1 &= \kappa_\alpha(u)X_1, \\
\nabla_{X_2} X_1 &= \frac{\alpha'_1(u)}{\alpha_1(u)}X_2, & A_{N_2} X_2 &= \frac{\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)}X_2
\end{aligned} \tag{4.2.3.2}$$

dır. Benzer şekilde normal bileşenleri

$$\begin{aligned}
h(X_1, X_1) &= \kappa_\alpha(u)N_2, & D_{X_1} N_1 &= 0, \\
h(X_1, X_2) &= 0, & D_{X_1} N_2 &= 0, \\
h(X_2, X_2) &= \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)}N_1 + \frac{\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)}N_2 & D_{X_2} N_1 &= D_{X_2} N_2 = 0
\end{aligned}$$

dir. Böylece (4.2.3.2) denklemlerinden M nin şekil operatörü matrisleri

$$A_{N_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} \end{pmatrix}, \quad A_{N_2} = \begin{pmatrix} \kappa_\alpha(u) & 0 \\ 0 & \frac{\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)} \end{pmatrix} \quad (4.2.3.3)$$

biçimindedir.

M nin Gauss dönüşümü (4.1.2) yardımıyla $G = (X_1 \wedge X_2)$ dir. Böylece G nin Laplası (4.1.1) eşitliğinden

$$-\Delta G = \tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} G + \tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} G - \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} G - \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} G \quad (4.2.3.4)$$

ile hesaplanır. Böylece kovaryant türevlerden

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_1} G &= \tilde{\nabla}_{X_1} (X_1 \wedge X_2) \\ &= (\tilde{\nabla}_{X_1} X_1) \wedge X_2 + X_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_1} X_2) \\ &= -\kappa_\alpha(u) X_2 \wedge N_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_2} G &= \tilde{\nabla}_{X_2} (X_1 \wedge X_2) \\ &= (\tilde{\nabla}_{X_2} X_1) \wedge X_2 + X_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_2} X_2) \\ &= \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} X_1 \wedge N_1 + \frac{\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)} X_1 \wedge N_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.2.3.4) ve (4.2.3.1) yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} G &= \tilde{\nabla}_{X_1} (-\kappa_\alpha(u) X_2 \wedge N_2) \\ &= -(\kappa'_\alpha(u) X_2 \wedge N_2 + \kappa_\alpha(u) \tilde{\nabla}_{X_1} X_2 \wedge N_2) - \kappa_\alpha(u) X_2 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_2 \\ &= -\kappa'_\alpha(u) X_2 \wedge N_2 - (\kappa_\alpha(u))^2 X_1 \wedge X_2 \end{aligned} \quad (4.2.3.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} G &= \tilde{\nabla}_{X_2} \left(\frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} X_1 \wedge N_1 + \frac{\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)} X_1 \wedge N_2 \right) \\ &= X_2 \left[\frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} X_1 \wedge N_1 + \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_1 + \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)} \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_2 + \frac{\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)} X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 \right] \\ &= - \left(\frac{\kappa^2(v) + (\alpha'_2(u))^2}{(\alpha_1(u))^2} \right) X_1 \wedge X_2 + X_2 \left[\frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} X_1 \wedge N_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa(v)\alpha'_1(u)}{(\alpha_1(u))^2} X_2 \wedge N_1 + \frac{\alpha'_1(u)\alpha'_2(u)}{(\alpha_1(u))^2} X_2 \wedge N_2 \right] \end{aligned} \quad (4.2.3.6)$$

benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} G = 0 \quad (4.2.3.7)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} G &= \tilde{\nabla}_{-\frac{\alpha'_1(u)}{\alpha_1(u)} X_1} G = -\frac{\alpha'_1(u)}{\alpha_1(u)} \tilde{\nabla}_{X_2} G \\ &= \frac{\alpha'_1(u) \kappa_\alpha(u)}{\alpha_1(u)} X_2 \wedge N_2\end{aligned}\quad (4.2.3.8)$$

dir. Böylece (4.2.3.5)- (4.2.3.8) eşitlikleri (4.2.3.4) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta G &= \left(\frac{\kappa^2(v) + (\alpha'_2(u))^2 + (\alpha_1(u))^2 (\kappa_\alpha(u))^2}{(\alpha_1(u))^2} \right) X_1 \wedge X_2 - X_2 \left[\frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} \right] X_1 \wedge N_1 \\ &\quad - \frac{\kappa(v) \alpha'_1(u)}{(\alpha_1(u))^2} X_2 \wedge N_1 - \left(\frac{\alpha'_1(u) \alpha'_2(u)}{(\alpha_1(u))^2} - \frac{\alpha'_1(u) \kappa_\alpha(u)}{\alpha_1(u)} - \kappa'_\alpha(u) \right) X_2 \wedge N_2\end{aligned}\quad (4.2.3.9)$$

elde edilir.

Farz edelim ki (3.7.4) yamasıyla verilen meridyen yüzeyi noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip olsun. Bu takdirde (4.1.3) ve (4.2.3.9) yardımıyla

$$\begin{aligned}f + f \langle \vec{C}, X_1 \wedge X_2 \rangle &= \frac{\kappa^2(v) + (\alpha'_2(u))^2 + (\alpha_1(u))^2 (\kappa_\alpha(u))^2}{(\alpha_1(u))^2}, \\ f \langle \vec{C}, X_1 \wedge N_1 \rangle &= -X_2 \left[\frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} \right], \\ f \langle \vec{C}, X_2 \wedge N_2 \rangle &= -\frac{\alpha'_1(u) \alpha'_2(u)}{(\alpha_1(u))^2} + \frac{\alpha'_1(u) \kappa_\alpha(u)}{\alpha_1(u)} + \kappa'_\alpha(u), \\ f \langle \vec{C}, X_2 \wedge N_1 \rangle &= -\frac{\kappa(v) \alpha'_1(u)}{(\alpha_1(u))^2}\end{aligned}\quad (4.2.3.10)$$

dir. Burada $f \neq 0$ olup türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece (4.2.3.9) yardımıyla

$$\begin{aligned}\langle \vec{C}, X_1 \wedge N_2 \rangle &= 0, \\ \langle \vec{C}, N_1 \wedge N_2 \rangle &= 0\end{aligned}\quad (4.2.3.11)$$

dır.

Ayrıca, Gauss ve Codazzi denklemlerinden sırasıyla

$$\kappa_\alpha = -\frac{\alpha_1''(u)}{\alpha_2'(u)}, \quad \alpha_2'(u) \neq 0 \quad (4.2.3.12)$$

ve

$$\kappa_\alpha = \frac{\alpha_2''(u)}{\alpha_1'(u)}, \quad \alpha_1''(u) \neq 0 \quad (4.2.3.13)$$

elde edilir.

(4.2.3.11) eşitliklerinin X_1 ve X_2 ye göre kovaryant türevleri alınırsa (4.2.3.1) ve (4.2.3.10) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_2 \rangle + \langle \vec{C}, X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 \rangle &= 0 \\ \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} \left(-\frac{\alpha'_1 \alpha'_2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha'_1 \kappa_\alpha}{\alpha_1} + \kappa'_\alpha \right) - \frac{\alpha'_2}{\alpha_1} \left(\frac{\kappa^2 + (\alpha'_2)^2 + \alpha_1^2 \kappa_\alpha^2}{\alpha_1^2} - f \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.3.14)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_1} N_1 \wedge N_2 \rangle + \langle \vec{C}, N_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_2 \rangle &= 0 \\ \kappa_\alpha X_2 \left[\frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.3.15)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_2 \rangle + \langle \vec{C}, X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 \rangle &= 0 \\ \frac{\kappa}{\alpha_1} \left(-\frac{\alpha'_1 \alpha'_2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha'_1 \kappa_\alpha}{\alpha_1} + \kappa'_\alpha \right) + \frac{\alpha'_2}{\alpha_1} \left(\frac{\kappa \alpha'_1}{\alpha_1^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.3.16)$$

elde edilir. Böylece (4.2.3.14) eşitliğinden f yi çekersek

$$f = -\frac{\alpha'_1 \left(\frac{\alpha'_1 \alpha'_2}{\alpha_1^2} - \frac{\alpha'_1 \kappa_\alpha}{\alpha_1} - \kappa'_\alpha \right) + \alpha'_2 \left(\frac{\kappa^2 + (\alpha'_2)^2 + \alpha_1^2 \kappa_\alpha^2}{\alpha_1^2} \right)}{\alpha'_2}, \quad \alpha'_2 \neq 0 \quad (4.2.3.17)$$

bulunur.

I. Durum: $\vec{C} = \vec{0}$ hali:

Meridyen yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 1-tipinde olsun. Bu takdirde (4.2.3.10) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} f &= \frac{\kappa^2(v) + (\alpha'_2(u))^2 + (\alpha_1(u))^2 (\kappa_\alpha(u))^2}{(\alpha_1(u))^2}, \\ 0 &= \kappa'(v), \\ 0 &= -\frac{\alpha'_1(u) \alpha'_2(u)}{(\alpha_1(u))^2} + \frac{\alpha'_1(u) \kappa_\alpha(u)}{\alpha_1(u)} + \kappa'_\alpha(u), \\ 0 &= -\frac{\kappa(v) \alpha'_1(u)}{(\alpha_1(u))^2} \end{aligned} \quad (4.2.3.18)$$

bulunur. Son eşitlikten iki durum söz konusudur;

I-(a): $\kappa(v) = 0$, $\alpha'_1(u) \neq 0$ hali,

I-(b): $\kappa(v) \neq 0$ (sabit), $\alpha'_1(u) = 0$ hali.

Bu durumları sırasıyla ele alalım;

I-(a): $\kappa(v) = 0$ ve $\alpha'_1(u) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\gamma(v)$ eğrisi $S^2(1)$ üzerindeki büyük çemberdir. Böylece M yüzeyi $\{X_1, X_2, N_2\}$ ile gerilen 3-boyutlu uzayda yatan bir yüzeydir. Eğer $\kappa_\alpha = 0$ ise α eğrisi düz bir doğru olup M yüzeyi açılabilir bir yüzeydir (Ganchev ve Milousheva 2010).

I-(b): $\kappa(v) \neq 0$ (sabit) ve $\alpha'_1(u) = 0$ olsun. Bu durumda (4.2.3.12) denkleminde $\kappa_\alpha = 0$ dir. Bu durumda α eğrisi düz bir doğrudur. Buradan yüzeyin Gauss eğriliği $K = 0$ dir. M yüzeyi açılabilir bir regle yüzeydir. Ayrıca $\kappa(v)$ sabit olduğundan $\gamma(v)$ eğrisi $S^2(1)$ üzerinde bir çemberdir. M yüzeyi 3-boyutlu uzayda açılabilir bir regle yüzeydir (Ganchev ve Milousheva 2010).

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir;

Teorem 4.2.3.1: M yüzeyi bir meridyen yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 1-tipinde ise M yüzeyi E^3 de yatan açılabilir bir yüzeydir. $\kappa_\alpha = 0$ durumunda M bir açılabilir regle yüzeyidir.

II. Durum: $\vec{C} \neq \vec{0}$ hali:

Meridyen yüzeyinin Gauss dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde olsun. Bu takdirde (4.2.3.15) eşitliğinden

$$\kappa_\alpha \kappa'(v) = 0 \quad (4.2.3.19)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur;

II-(a): $\kappa_\alpha(u) = 0$, $\kappa(v) \neq \text{sabit}$ hali,

II-(b): $\kappa(v) \neq 0$ (sabit), $\kappa_\alpha(u) \neq 0$ hali.

Bu durumları sırasıyla ele alalım;

II-(a): $\kappa_\alpha(u) = 0$ ve $\kappa(v) \neq \text{sabit}$ olsun. Bu durumda α eğrisi düz bir doğru ve $\gamma(v)$ eğrisi $S^2(1)$ üzerinde bir çember değildir. Böylece $M \subset E^4$ yüzeyi açılabilir regle yüzeydir (Ganchev ve Milousheva 2010).

II-(b): $\kappa(v) \neq 0$ (sabit), $\kappa_\alpha(u) \neq 0$ olsun. Bu durumda α eğrisi düz bir doğru değildir. Ayrıca $\gamma(v)$ eğrisi $S^2(1)$ üzerinde sıfırdan farklı sabit küresel eğriliğe sahip bir çemberdir.

$\kappa(v) \neq 0$ (sabit) olduğundan (4.2.3.16) eşitliğinden

$$\kappa_\alpha \alpha'_1 + \alpha_1 \kappa'_\alpha = 0 \quad (4.2.3.20)$$

elde edilir. Böylece (4.2.3.19) ve (4.2.3.12) denklemlerinden

$$\frac{\alpha_1 \alpha''_1}{\sqrt{1 - (\alpha'_1)^2}} = \lambda; \quad \lambda \in R \quad (4.2.3.21)$$

diferensiyel denklemi oluşturulur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.3.2: M yüzeyi bir meridyen yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyinin Gauss dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde ise $M \subset E^4$ yüzeyi açılabilir regle yüzey ya da meridyen eğrisi

$$\alpha_1 \alpha''_1 = \lambda \sqrt{1 - (\alpha'_1)^2}, \quad (\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 = 1 \quad (4.2.3.22)$$

şartlarını sağlayan bir yüzeydir.

4.2.4. Ganchev-Milousheva Rotasyon Yüzeyi

Bu kısımda Bölüm 3. 4 de

$$M : X(u, v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u) \cos v, f_3(u) \sin v)$$

yamasıyla tanımlanan Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

M bir tensör çarpım yüzeyi olmak üzere M nin p noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$

$\{X_1, X_2\}$ ve p noktasındaki normal uzayı $T_p(M)$ ise $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları ile

gerilsin. Bu vektörler sırasıyla

$$X_1 = (f'_1(u), f'_2(u), f'_3(u) \cos v, f'_3(u) \sin v),$$

$$X_2 = (0, 0, -\sin v, \cos v), u$$

$$N_1(u, v) = \frac{1}{\kappa} (f''_1(u), f''_2(u), f''_3(u) \cos v, f''_3(u) \sin v),$$

$$N_2(u, v) = \frac{1}{\kappa} (f'_2 f'_3 - f''_2 f_3, f'_3 f''_1 - f''_3 f_1, (f'_1 f''_1 - f''_1 f'_1) \cos v, (f'_1 f''_1 - f''_1 f'_1) \sin v)$$

biçiminde oluşturulur. Burada

$$\kappa = \sqrt{(f_1'')^2 + (f_2'')^2 + (f_3'')^2}, \quad (4.2.4.1)$$

$\alpha(u)$ döngü eğrisinin eğriliğidir. Burada

$$\kappa_1 = f_1'f_2'' - f_2'f_1'', \quad (4.2.4.2)$$

$\alpha(u)$ eğrisinin Oe_1e_2 düzlemine izdüşümünün eğriliğidir.

Bununla birlikte Gauss ve Weingarten denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_1} X_1 &= \kappa N_1 & \tilde{\nabla}_{X_1} N_1 &= -\kappa X_1 + \tau N_2 \\ \tilde{\nabla}_{X_2} X_2 &= -\frac{f_3'}{f_3} X_1 - \frac{f_3''}{\kappa f_3} N_1 - \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} N_2 & \tilde{\nabla}_{X_1} N_2 &= -\tau N_1 \\ \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 &= \frac{f_3'}{f_3} X_2 & \tilde{\nabla}_{X_2} N_1 &= \frac{f_3''}{\kappa f_3} X_2 \\ \tilde{\nabla}_{X_1} X_2 &= 0 & \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 &= \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} X_2 \end{aligned} \quad (4.2.4.3)$$

elde edilir.

Böylece (4.2.4.3) deki denklemlerin teğet bileşenleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} X_1 &= 0, & A_{N_1} X_1 &= \kappa X_1, \\ \nabla_{X_2} X_2 &= -\frac{f_3'}{f_3} X_1, & A_{N_1} X_2 &= -\frac{f_3''}{\kappa f_3} X_2, \\ \nabla_{X_1} X_2 &= 0, & A_{N_2} X_1 &= 0, \\ \nabla_{X_2} X_1 &= \frac{f_3'}{f_3} X_2, & A_{N_2} X_2 &= -\frac{\kappa_1}{\kappa f_3} X_2 \end{aligned} \quad (4.2.4.4)$$

dır. Benzer şekilde normal bileşenleri

$$\begin{aligned} h(X_1, X_1) &= \kappa N_1, & D_{X_1} N_1 &= \tau N_2, \\ h(X_1, X_2) &= 0, & D_{X_1} N_2 &= -\tau N_1, \\ h(X_2, X_2) &= -\frac{f_3''}{\kappa f_3} N_1 - \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} N_2, & D_{X_2} N_1 &= D_{X_2} N_2 = 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece (4.2.4.4) denklemlerinden M nin şekil operatörü matrisleri

$$A_{N_1} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\frac{f_3''}{\kappa f_3} \end{pmatrix}, \quad A_{N_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa_1}{\kappa f_3} \end{pmatrix} \quad (4.2.4.5)$$

biçimindedir.

M nin Gauss dönüşümü (4.1.2) yardımıyla $G = (X_1 \wedge X_2)$ dir. Böylece G nin Laplası (4.1.1) eşitliğinden

$$-\Delta G = \tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} G + \tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} G - \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} G - \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} G \quad (4.2.4.6)$$

ile hesaplanır. Böylece kovaryant türevlerden

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X_1} G &= \tilde{\nabla}_{X_1} (X_1 \wedge X_2) \\ &= (\tilde{\nabla}_{X_1} X_1) \wedge X_2 + X_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_1} X_2) \\ &= -\kappa X_2 \wedge N_1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X_2} G &= \tilde{\nabla}_{X_2} (X_1 \wedge X_2) \\ &= (\tilde{\nabla}_{X_2} X_1) \wedge X_2 + X_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_2} X_2) \\ &= -\frac{f_3''}{\kappa f_3} X_1 \wedge N_1 - \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} X_1 \wedge N_2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.2.4.6) ve (4.2.4.3) yardımıyla

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} G &= \tilde{\nabla}_{X_1} (-\kappa X_2 \wedge N_1) \\ &= -X_1[\kappa] X_2 \wedge N_1 - \kappa \tilde{\nabla}_{X_1} X_2 \wedge N_1 - \kappa X_2 \wedge \tilde{\nabla}_{X_1} N_1 \\ &= -X_1[\kappa] X_2 \wedge N_1 - \kappa^2 X_1 \wedge X_2 - \kappa \tau X_2 \wedge N_2\end{aligned}\tag{4.2.4.7}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} G &= \tilde{\nabla}_{X_2} \left(-\frac{f_3''}{\kappa f_3} X_1 \wedge N_1 - \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} X_1 \wedge N_2 \right) \\ &= -\frac{f_3''}{\kappa f_3} \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_1 - \frac{f_3''}{\kappa f_3} X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_1 - \\ &\quad - \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_2 - \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 \\ &= -\left(\frac{\kappa_1^2 + (f_3'')^2}{\kappa^2 f_3^2} \right) X_1 \wedge X_2 - \frac{f_3'' f_3'}{\kappa f_3^2} X_2 \wedge N_1 - \frac{\kappa_1 f_3'}{\kappa f_3^2} X_2 \wedge N_2\end{aligned}\tag{4.2.4.8}$$

benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} G = 0\tag{4.2.4.9}$$

$$\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} G = \tilde{\nabla}_{-\frac{f_3'}{f_3} X_1} G = -\frac{f_3'}{f_3} \tilde{\nabla}_{X_1} G = \frac{\kappa f_3'}{f_3} X_2 \wedge N_1\tag{4.2.4.10}$$

dir. Böylece (4.2.4.7)- (4.2.4.10) eşitlikleri (4.2.4.6) da yerine yazılırsa

$$-\Delta G = a(u) X_1 \wedge X_2 + b(u) X_2 \wedge N_1 + c(u) X_2 \wedge N_2\tag{4.2.4.11}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
a(u) &= -\left(\kappa^2 + \frac{\kappa_1^2 + (f_3'')^2}{\kappa^2 f_3^2}\right), \quad \kappa \neq 0, f_3 > 0; \\
b(u) &= -\left(X_1[\kappa] + \frac{f_3'' f_3'}{\kappa f_3^2} + \frac{\kappa f_3'}{f_3}\right), \\
c(u) &= -\left(\kappa\tau + \frac{\kappa_1 f_3'}{\kappa f_3^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.2.4.12}$$

dir (Arslan ve ark. 2010).

Teorem 4.2.4.1: Gauss dönüşümü harmonik olan Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi yoktur (Arslan ve ark. 2010).

İspat. Farz edelim ki küresel çarpım yüzeyinin Gauss dönüşümü harmonik olsun, yani $\Delta G = \vec{0}$ olsun. Böylece (4.2.4.11) denkleminde $a(u) = b(u) = c(u) = 0$ olmalıdır. Fakat $a(u) < 0$ olduğundan çelişki elde edilir. Bu nedenle $\Delta G \neq \vec{0}$ dir. \square

Farz edelim ki (3.4.14) yamasıyla verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip olsun. Bu takdirde (4.1.3) ve (4.2.4.11) yardımıyla

$$\begin{aligned}
f + f\langle \vec{C}, X_1 \wedge X_2 \rangle &= -a(u), \\
f\langle \vec{C}, X_2 \wedge N_1 \rangle &= -b(u), \\
f\langle \vec{C}, X_2 \wedge N_2 \rangle &= -c(u)
\end{aligned} \tag{4.2.4.13}$$

dir. Burada $f \neq 0$ olup türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece (4.2.4.11) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\langle \vec{C}, X_1 \wedge N_1 \rangle &= 0, \\
\langle \vec{C}, X_1 \wedge N_2 \rangle &= 0, \\
\langle \vec{C}, N_1 \wedge N_2 \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{4.2.4.14}$$

dir. (4.2.4.14) eşitliklerinin X_1 ve X_2 ye göre kovaryant türevleri alınıp (4.2.4.3) ve (4.2.4.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_1 \rangle + \langle \vec{C}, X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_1 \rangle &= 0 \\
-\frac{f_3'}{f_3} b(u) - \frac{f_3''}{\kappa f_3} (a(u) + f) &= 0
\end{aligned} \tag{4.2.4.15}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 \wedge N_2 \rangle + \langle \vec{C}, X_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 \rangle &= 0 \\ \frac{f_3'}{f_3} c(u) - \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} (a(u) + f) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.4.16)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{C}, \tilde{\nabla}_{X_2} N_1 \wedge N_2 \rangle + \langle \vec{C}, N_1 \wedge \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 \rangle &= 0 \\ -\frac{f_3''}{\kappa f_3} c(u) + \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} b(u) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.4.17)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (4.2.4.15) ve (4.2.4.16) eşitliklerinden f fonksiyonu çekilirse

$$f = -\frac{\kappa f_3'}{f_3''} b(u) - a(u) \quad (4.2.4.18)$$

ve

$$f = -\frac{\kappa f_3'}{\kappa_1} c(u) - a(u) \quad (4.2.4.19)$$

bulunur. Buradan bu denklemler birbirine eşitlendiği takdirde

$$b(u)\kappa_1 = c(u)f_3'' \quad (4.2.4.20)$$

elde edilir.

I. Durum: $\vec{C} = \vec{0}$ hali:

Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 1-tipinde olsun. Bu takdirde (4.2.4.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} f &= -a(u), \\ b(u) &= 0, \\ c(u) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.4.21)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.4.2: M yüzeyi bir Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 1-tipinde ise

$$\begin{aligned} f &= \kappa^2 + \frac{\kappa_1^2 + (f_3'')^2}{\kappa^2 f_3'^2}, \quad \kappa \neq 0, f_3'; \\ \kappa' + \frac{f_3'' f_3'}{\kappa f_3'^2} + \frac{\kappa f_3'}{f_3} &= 0, \\ \kappa \tau + \frac{\kappa_1 f_3'}{\kappa f_3'^2} &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

II. Durum: $\vec{C} \neq \vec{0}$ hali:

Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin Gauss dönüşümü 1. çeşit noktasal 2-tipinde olsun. Ayrıca M yüzeyi düz bir yüzey olsun. Böylece (3.4.15) eşitliğinden $f_3''(u) = 0$ olup $f_3(u) = au + b$, $a, b \in R$ dir. Bu takdirde (4.2.4.15)- (4.2.4.17) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} f_3'(u)b(u) &= 0, \\ f_3'(u)c(u) + \frac{\kappa_1}{\kappa}(a(u) + f) &= 0, \\ \kappa_1 b(u) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.4.22)$$

elde edilir. (4.2.4.22) eşitliklerinden birincisi ele alınırsa $f_3'(u) = a \neq 0$ olduğundan $b(u) = 0$ olmalıdır. Böylece (4.2.4.12) eşitliğinden

$$\kappa' + \frac{\kappa f_3'(u)}{f_3(u)} = 0 \quad (4.2.4.23)$$

bulunur. $f_3'(u) = a$, $f_3(u) = au + b$ değerleri (4.2.4.23) de yerine yazılırsa $\frac{\kappa'}{\kappa} = -\frac{a}{au + b}$

diferansiyel denklemi elde edilir. Böylece eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int \frac{\kappa'}{\kappa} du = -\int \frac{a}{au + b} du \Rightarrow \ln|\kappa| = -\lambda \ln|au + b|$$

olup buradan

$$\kappa = \frac{\lambda}{au + b}, \quad 0 \neq \lambda \in R \quad (4.2.4.24)$$

bulunur. Ayrıca yüzeyin döngü eğrisi $\alpha(u)$ birim hızlı olduğundan $(f_1')^2 + (f_2')^2 = 1 - a^2$ dir. Buradan $\theta(u)$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1' &= \mu \cos \theta(u), \\ f_2' &= \mu \sin \theta(u) \end{aligned} \quad (4.2.4.25)$$

yazılabilir. Burada $\mu^2 = 1 - a^2$ dir.

Böylece $f_3(u) = au + b$, (4.2.4.24) ve (4.2.4.25) eşitlikleri (4.2.4.1) de yerine yazılırsa $\kappa = \theta'(u)\mu$ elde edilir. Buradan

$$\theta'(u) = \frac{\lambda}{\mu(au + b)}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Böylece eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int \theta'(u) du = \int \frac{\lambda}{\mu(au + b)} du$$

olup buradan

$$\theta(u) = \frac{\lambda}{a\mu} \ln|au + b|$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.2.4.25) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f_1'(u) &= \mu \cos\left(\frac{\lambda}{a\mu} \ln|au + b|\right), \\ f_2'(u) &= \mu \sin\left(\frac{\lambda}{a\mu} \ln|au + b|\right) \end{aligned} \quad (4.2.4.26)$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.4.3: M yüzeyi bir Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyinin Gauss dönüşümü 2. çeşit noktasal 1-tipinde ise yüzeyin döngü eğrisi

$$\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$$

$$\begin{aligned} f_1(u) &= \int \mu \cos\left(\frac{\lambda}{a\mu} \ln|au + b|\right) du, \\ f_2(u) &= \int \mu \sin\left(\frac{\lambda}{a\mu} \ln|au + b|\right) du, \\ f_3(u) &= au + b \end{aligned} \quad (4.2.4.27)$$

parametrelendirmesi ile verilir (Arslan ve ark. 2010).

Açıklama 4.2.4.4: Yukarıdaki teoremde (4.2.4.27) parametrelendirmesiyle verilen eğri için

$$c(u) = -\left(\frac{\lambda^2 \tau + \kappa_1 a}{\lambda(au + b)}\right)$$

değeri sıfırdan farklı olmak zorundadır. Eğer $c(u) = 0$ olursa Teorem 4.2.4.2 gereği yüzey 1.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip olacaktır.

5. E^4 DEKİ YÜZEYLERİN EĞRİLİK ELİPSLERİ

5.0. Giriş

Bu bölümde 3. Bölümde ele alınan bazı yüzeylerin eğrilik elipsleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

5.1. Yüzeylerin Eğrilik Elipsleri

$M \subset E^4$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bir $p \in M$ noktasındaki $T_p(M)$ teğet uzayında $\theta \in [0, 2\pi]$ açısı ile verilen bir çember alınsın. Böylece $T_p^\perp(M)$ normal düzlem ile $X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ doğrultu vektörünün oluşturduğu doğrunun direk toplamı olan $p \in M$ noktasındaki hiper düzlem ile M nin arakesit eğrisi γ_θ ile gösterilsin. Burada X_1, X_2 vektörleri $T_p(M)$ nin ortonormal bir bazıdır. Bu eğriye M nin p noktasında ve X yönünde *normal kesit eğrisi* adı verilir. Ayrıca γ_θ nin η_θ normal eğrilik vektörü $T_p^\perp(M)$ de yatan bir vektördür. Ayrıca θ açısı 0 dan 2π ye değiştiğinde bu vektör $T_p^\perp(M)$ de bir elips oluşturur. Bu elipse M nin p noktasındaki *eğrilik elipsi* denir. Böylece

$$\gamma'_\theta = X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2 \quad (5.1.1)$$

vektörü normal kesit eğrisinin birim vektörü olsun. Bu takdirde $\|\eta_\theta\|$ normal eğrilik elipsi N_1, N_2 çatısında

$$\begin{aligned} x &= \frac{h_{11}^1 + h_{22}^1}{2} + \frac{h_{11}^1 - h_{22}^1}{2} \cos 2\theta + h_{12}^1 \sin 2\theta, \\ y &= \frac{h_{11}^2 + h_{22}^2}{2} + \frac{h_{11}^2 - h_{22}^2}{2} \cos 2\theta + h_{12}^2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

ile verilir. Böylece M nin p noktasındaki eğrilik elipsi

$$E(p) = \{h(X, X) : X \in T_p(M), \|X\| = 1\} \quad (5.1.2)$$

ile gösterilir. Burada h ifadesi $X(u, v)$ yamasının ikinci temel formudur. Bunun bir elips belirttiğini görmek için $X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ yardımıyla

$$h(X, X) = \vec{H} + \cos 2\theta \vec{B} + \sin 2\theta \vec{C} \quad (5.1.3)$$

formülüne bakmak yeterlidir. Burada

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{2}(h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)), \\ \vec{C} &= h(X_1, X_2) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

normal vektörler ve \vec{H} ortalama eğrilik vektörüdür. Bu bize X in birim çember etrafında bir tur attığında $h(X, X)$ vektörünün \vec{H} merkezli elips etrafında iki tur attığını gösterir. Bu elips p noktasında $X(u, v)$ nin $E(p)$ elipsidir. Açık olarak $E(p)$ elipsi bir nokta ya da bir doğruya dejenere olabilir. E^4 deki yüzeylerin eğrilik elipsleri genel anlamda Wong tarafından çalışılmıştır (Wong 1946). Daha genel bilgi için (bkz. Little 1969, Mochida ve ark. 1995, Rouxel 1980).

Önerme 5.1.1: $\vec{B} = \frac{1}{2}(h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2))$, $\vec{C} = h(X_1, X_2)$ vektörleri $E(p)$ nin yarı eksenleri olmak üzere $\tilde{N}_1 = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$, $\tilde{N}_2 = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|}$ pozitif yönlendirme seçilsin. Bu takdirde M nin normal eğriliği

$$K_N = \|h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)\| \|h(X_1, X_2)\|, \quad (5.1.5)$$

dir (Godalupe ve Rodriguez 1983).

İspat. a, b, c vektörleri $T_p^\perp(M)$ normal uzayının elemanları olmak üzere

$$(a \wedge b)(c) = \langle b, c \rangle a - \langle a, c \rangle b \quad (5.1.6)$$

endomorfizmi ve (2.2.39) yardımıyla

$$R^\perp(X_1, X_2) = (h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)) \wedge h(X_1, X_2) \quad (5.1.7)$$

olduğu görülür. Böylece (5.1.6) yardımıyla

$$\begin{aligned} K_N &= \langle R^\perp(X_1, X_2) \tilde{N}_2, \tilde{N}_1 \rangle \\ &= \left\langle ((h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)) \wedge h(X_1, X_2)) \frac{h(X_1, X_2)}{\|h(X_1, X_2)\|}, \frac{(h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2))}{\|(h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2))\|} \right\rangle \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$K_N = \frac{\langle h(X_1, X_2), h(X_1, X_2) \rangle \langle h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2), h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2) \rangle}{\|h(X_1, X_2)\| \|h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)\|} - \frac{\langle h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2), h(X_1, X_2) \rangle^2}{\|h(X_1, X_2)\| \|h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)\|}$$

bulunur. Ayrıca \vec{B} ile \vec{C} birbirine dik olduklarından

$$\langle h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2), h(X_1, X_2) \rangle = 0$$

dir. Böylece bu eşitlik bir önceki denklemde yerine yazılırsa (5.1.5) elde edilir. \square

Sonuç 5.1.2: $\vec{B} = \frac{1}{2}(h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2))$, $\vec{C} = h(X_1, X_2)$ vektörleri $E(p)$ nin yarı eksenleri olmak üzere $N_1 = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$, $N_2 = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|}$ pozitif yönlendirme seçilsin. Bu takdirde M nin normal eğriliği

$$K_N = \left(\left((h_{11}^1 - h_{22}^1)^2 + (h_{11}^2 - h_{22}^2)^2 \right) \left((h_{12}^1)^2 + (h_{12}^2)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.1.8)$$

dir.

İspat. (2.2.21) ve (2.2.32) eşitlikleri (5.1.5) de yerine yazılırsa (5.1.8) elde edilir. \square

Sonuç 5.1.3: \vec{B} ve \vec{C} vektörleri $E(p)$ nin yarı eksenleri olmak üzere $E(p)$ eğrilik elipsinin alanı

$$\begin{aligned} A &= \pi \|\vec{B}\| \|\vec{C}\| \\ &= \frac{\pi}{2} K_N \end{aligned}$$

dır (Godalupe ve Rodriguez 1983).

İspat. (5.1.4) ve (5.1.5) eşitlikleri yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. \square

Önerme 5.1.4: $M \subset E^4$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin \vec{B} ve \vec{C} vektörleri $E(p)$ eğrilik elipsinin nin yarı eksenleri olmak üzere

$$\|H\|^2 \geq K + |K_N| \quad (5.1.9)$$

dir (Guadalupe ve Rodriguez 1983).

İspat:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\|h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)\| - 2\|h(X_1, X_2)\| \right)^2 \\ &= \|h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)\|^2 + 4\|h(X_1, X_2)\|^2 \\ &\quad - 4\|h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)\| \|h(X_1, X_2)\| \\ &= \langle h(X_1, X_1), h(X_1, X_1) \rangle + \langle h(X_2, X_2), h(X_2, X_2) \rangle \\ &\quad - 2\langle h(X_1, X_2), h(X_1, X_2) \rangle \\ &\quad - 4\|h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)\| \|h(X_1, X_2)\| \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} 4H^2 &= \langle h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2), h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2) \rangle \\ &= \langle h(X_1, X_1), h(X_1, X_1) \rangle + \langle h(X_2, X_2), h(X_2, X_2) \rangle \\ &\quad + 2\langle h(X_1, X_2), h(X_1, X_2) \rangle \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

olduğundan

$$0 \leq 4H^2 - 4\langle h(X_1, X_2), h(X_1, X_2) \rangle - 4\|h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)\| \|h(X_1, X_2)\| \quad (5.1.12)$$

elde edilir. Ayrıca (2.2.22) ve (5.1.5) eşitlikleri (5.1.12) de yerine yazılırsa (5.1.9) elde edilir. \square

Önerme 5.1.5: $M \subset E^4$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i) $E(p)$ eğrilik elipsi bir doğru ya da bir noktaya dejenere olur.
- ii) \vec{B} ile \vec{C} lineer bağımlıdır.
- iii) $R^\perp = 0$ dır.
- iv) Eğer $\{N_i\}$ ortonormal normal çatı ise A_{N_i} matrisleri ($1 \leq i \leq 2$) köşegenleştirilebilirdir (Guadalupe ve Rodriguez 1983).

Tanım 5.1.6: $M \subset E^4$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u, v)$ nin $E(p)$ eğrilik elipsi bir çember yani, $\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle = 0$ ve $\|\vec{B}\| = \|\vec{C}\|$ eşitlikleri sağlanırsa M ye *süperkonformal yüzey* adı verilir. (Godalupe ve Rodriguez 1983).

Açıklama 5.1.7: (5.1.9) denkleminin eşitliği durumunda eğrilik elipsi bir çember belirtir. Yani eğrilik elipsinin bir çember belirtmesi için gerek ve yeter şart

$$\|H\|^2 - K - |K_N| = 0$$

olmasıdır. Süperkonformal yüzeyler aynı zamanda *Wintgen ideal yüzey* olarak da adlandırılır (Wintgen 1979).

5.2. Yüzeylerin Eğrilik Elipsleri ile İlgili Temel Sonuçlar

5.2.0. Giriş

$M \subset E^4$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde M nin ikinci temel form katsayıları yardımıyla $\Delta(p)$ determinantı ve $A(p)$ matrisi sırasıyla

$$\Delta(p) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} h_{11}^1 & 2h_{12}^1 & h_{22}^1 & 0 \\ h_{11}^2 & 2h_{12}^2 & h_{22}^2 & 0 \\ 0 & h_{11}^1 & 2h_{12}^1 & h_{22}^1 \\ 0 & h_{11}^2 & 2h_{12}^2 & h_{22}^2 \end{vmatrix} (p) \quad (5.2.0.1)$$

ve

$$A(p) = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & h_{22}^1 \\ h_{11}^2 & h_{12}^2 & h_{22}^2 \end{bmatrix} (p) \quad (5.2.0.2)$$

biçiminde tanımlanır (Mochida ve ark. 1995).

Açıklama 5.2.0.1: $c_{ij}^k = 0$, $1 \leq i, j, k \leq n - 2$ ise M yüzeyi *toplama (total) geodezik* olarak adlandırılır. Bu durumda yüzey 2-düzlem içinde yatar. Eğer c_{ij}^k lardan en az bir tanesi sıfırdan farklı ise $rank(A(p)) = 1$ olup $h(X_u, X_u)$, $h(X_u, X_v)$ ve $h(X_v, X_v)$ kolineerdir. $T_p^\perp(M)$ nin orijini p noktası olarak alındığında aşağıdaki sınıflandırmalar verilebilir (Mochida ve ark. 1995):

a) $\Delta(p) > 0$ ise p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin dışındadır. Bu noktaya M nin *hiperbolik noktası* adı verilir.

b) $\Delta(p) = 0$ ise p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin üzerindedir. Bu noktaya M nin *parabolik noktası* adı verilir.

i) $\Delta(p) = 0$ ve $K(p) > 0$ ise p noktası sanal tipinde büküm noktasıdır.

ii) $\Delta(p) = 0$ ve $K(p) < 0$ ise

$rank(A(p)) = 2$ için p noktası bozulmamıştır.

$rank(A(p)) = 1$ için p noktası reel tipinde büküm noktasıdır.

iii) $\Delta(p) = 0$ ve $K(p) = 0$ ise p noktası düz tipinde büküm noktasıdır.

c) $\Delta(p) < 0$ ise p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin içindedir. Bu noktaya M nin *eliptik noktası* adı verilir.

5.2.1. Vranceanu Yüzeyleri

Bu kısımda Vranceanu yüzeyleri için eğrilik elipsleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

$M \subset E^4$ bir Vranceanu yüzeyi olmak üzere (2.2.33) ve (3.2.3) eşitlikleri yardımıyla

$$h_{11}^1 = \frac{1}{\sqrt{(r(v))^2 + (r'(v))^2}},$$

$$h_{22}^1 = \frac{-r(v)r''(v) + 2(r'(v))^2 + (r(v))^2}{\left((r(v))^2 + (r'(v))^2\right)^{3/2}}, \quad (5.2.1.1)$$

$$h_{12}^2 = -\frac{1}{\sqrt{(r(v))^2 + (r'(v))^2}},$$

$$h_{11}^2 = h_{12}^1 = h_{22}^2 = 0$$

bulunur. Böylece (5.2.1.1) eşitlikleri (5.2.0.1) de yerine yazılırsa

$$\Delta(p) = -h_{11}^1 h_{22}^1 (h_{12}^2)^2 = \frac{r(v)r''(v) - 2(r'(v))^2 - (r(v))^2}{\left((r(v))^2 + (r'(v))^2\right)^3} \quad (5.2.1.2)$$

bulunur.

Önerme 5.2.1.1: Vranceanu yüzeyinin bir p noktasının eğrilik elipsinin üzerinde bulunması (parabolik nokta olması) için gerek ve yeter şart

$$r(v)r''(v) - 2(r'(v))^2 - (r(v))^2 = 0 \quad (5.2.1.3)$$

olmasıdır.

İspat: Açıklama 5.2.0.1 den p noktasının parabolik nokta olması için $\Delta(p) = 0$ olmalıdır. Böylece (5.2.1.2) eşitliğinin sıfıra eşitlenmesiyle (5.2.1.3) elde edilir.

Sonuç 5.2.1.2: Vranceanu yüzeyinin bir p noktasının eğrilik elipsinin üzerinde bulunması (parabolik nokta olması) için gerek ve yeter şart

$$r(v) = \frac{1}{a \sin(v) - b \cos(v)}; \quad a, b \in R \quad (5.2.1.4)$$

olmasıdır.

İspat: (5.2.1.3) diferensiyel denkleminin Maple ile çözümünden istenilen sonuç elde edilir (bkz. Ek11). \square

5.2.2. Regle Yüzeyler

Bu kısımda regle yüzeylerinin eğrilik elipsleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Önerme 5.2.2.1: $M \subset E^4$ yüzeyi (3.3.3) parametrelendirilmesiyle verilen bir regle yüzey olsun. $\vec{B} = \frac{1}{2}(h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2))$, $\vec{C} = h(X_1, X_2)$ vektörleri $E(p)$ nin yarı

eksenleri olmak üzere $N_1 = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$, $N_2 = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|}$ pozitif yönlendirme seçilsin. Bu takdirde M

nin normal eğriliği

$$K_N = \frac{1}{E(\sqrt{E})} \|h(X_u, X_u)\| \|h(X_u, X_v)\| \quad (5.2.2.1)$$

dır.

İspat. (2.2.21) eşitliğinde $F = 0$ ve $h(X_v, X_v) = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} h(X_1, X_1) &= \frac{1}{E} h(X_u, X_u) \\ h(X_1, X_2) &= \frac{1}{W} h(X_u, X_v) \\ h(X_2, X_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.2.2)$$

bulunur. Böylece (5.2.2.2) deki eşitlikler (5.1.5) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

Önerme 5.2.2.2: $M \subset E^4$ yüzeyi (3.3.3) parametrelendirilmesiyle verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde $T_p^\perp(M)$ nin orijini olan p noktası non-dejenere olup $E(p)$ eğrilik elipsinin üzerinde yatar.

İspat: $h(X_v, X_v) = 0$ olduğundan (2.2.13) yardımıyla $c_{22}^1 = c_{22}^2 = 0$ dır. Böylece (2.2.33) yardımıyla (5.2.0.1) eşitliğinden $\Delta(p) = 0$ bulunur. Buradan $p \in M$ noktasının $E(p)$ eğrilik elipsi üzerinde (parabolik nokta) olduğu görülür. Ayrıca $K(p) < 0$ ve $rank(A(p)) = 2$ olduğundan $E(p)$ eğrilik elipsi non-dejenere olur. \square

Teorem 5.2.2.3: $M \subset E^4$ yüzeyi (3.3.3) parametrelendirilmesiyle verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde M nin süperkonformal olması için gerek ve yeter şart

$$\langle h(X_u, X_u), h(X_u, X_v) \rangle = 0 \text{ ve } \|h(X_u, X_v)\| = \left\| \frac{1}{2\sqrt{E}} h(X_u, X_u) \right\| \quad (5.2.2.3)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: (2.2.19) eşitliği, $F=0$ ve $h(X_v, X_v) = 0$ yardımıyla

$$\vec{B} = \frac{1}{2E} h(X_u, X_u) \text{ ve } \vec{C} = \frac{1}{\sqrt{E}} h(X_u, X_v)$$

elde edilir. M süperkonformal olduğundan Tanım 5.1.6 dan

$$\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle = 0 \text{ ve } \|\vec{B}\| = \|\vec{C}\|$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Bu da bize istenilen sonucu verir.

Tersine, (5.2.2.3) eşitlikleri sağlanırsa M yüzeyinin süperkonformal olduğu görülür. \square

5.2.3. Ganchev-Milousheva Rotasyon Yüzeyleri

Bu kısımda Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyleri için eğrilik elipsleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

$M \subset E^4$ bir Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olmak üzere (2.2.33), (3.4.17) ve (3.4.19) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
h_{11}^1 &= \kappa, \\
h_{22}^1 &= -\frac{f_3''}{f_3 \kappa}, \\
h_{22}^2 &= -\frac{\kappa_1}{f_3 \kappa}, \\
h_{12}^1 &= h_{11}^2 = h_{12}^2 = 0
\end{aligned} \tag{5.2.3.1}$$

bulunur. Böylece (5.2.3.1) eşitlikleri (5.2.0.1) de yerine yazılırsa

$$\Delta(p) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} h_{11}^1 & 0 & h_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22}^2 & 0 \\ 0 & h_{11}^1 & 0 & h_{22}^1 \\ 0 & 0 & 0 & h_{22}^2 \end{vmatrix} (p) = -\frac{(h_{11}^1)^2 (h_{22}^2)^2}{4} = -\frac{\kappa_1^2}{4f_3^2} \tag{5.2.3.2}$$

bulunur.

Önerme 5.2.3.1: Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin bir p noktası eliptik bir noktadır.

İspat: Açıklama 5.2.0.1 den p noktasının parabolik nokta olması için $\Delta(p) < 0$ olmalıdır. Böylece (5.2.3.2) eşitliğinden $\Delta(p) < 0$ sağlandığından p noktası eliptik bir noktadır.

Önerme 5.2.3.2: Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin bir p noktası düz tipinde bir büküm noktası

ise yüzeyin döngü eğrisi

$$\alpha(u) = \left(c_2, \pm\sqrt{1-a^2}u + c_1, a \right)$$

ya da

$$\alpha(u) = \left(c_2 v + c_3, \pm\sqrt{1-a^2-c_2^2}u + c_4, a \right)$$

parametrelendirmeleri ile verilir.

İspat: $\Delta(p) = 0$ ve $K(p) = 0$ olsun. Bu takdirde (5.2.3.2) ve (3.4.15) eşitliklerinden sırasıyla $\kappa_1 = 0$ ve $f_3'' = 0$ elde edilir. Böylece (3.4.20) ve $(f_1')^2 + (f_2')^2 + (f_3')^2 = 1$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} (f_1')^2 + (f_2')^2 &= 1 - a^2, \\ f_1'f_2'' - f_2'f_1'' &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.3.3)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümden istenilen sonuca ulaşılır (bkz. Ek12). \square

5.2.4. Tensör Çarpım Yüzeyleri

Bu kısımda tensör çarpım yüzeyleri için eğrilik elipsleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

$M \subset E^4$ bir tensör çarpım yüzeyi olmak üzere (2.2.33), (3.5.6) ve (3.5.9) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} h_{11}^1 &= \frac{\alpha(v)\beta'(v) - \alpha'(v)\beta(v)}{\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}(\alpha^2 + \beta^2)}, \\ h_{22}^1 &= \frac{\alpha'(v)\beta''(v) - \alpha''(v)\beta'(v)}{\left((\alpha')^2 + (\beta')^2\right)^{3/2}}, \\ h_{12}^2 &= \frac{\alpha'(v)\beta(v) - \alpha(v)\beta'(v)}{\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}(\alpha^2 + \beta^2)}, \\ h_{22}^2 &= h_{11}^2 = h_{12}^1 = 0 \end{aligned} \quad (5.2.4.1)$$

bulunur. Böylece (5.2.4.1) eşitlikleri (5.2.0.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= -h_{11}^1 h_{22}^1 (h_{12}^2)^2 \\ &= -\frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^3 (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')}{(\alpha^2 + \beta^2)^3 \left((\alpha')^2 + (\beta')^2\right)^3} \end{aligned} \quad (5.2.4.2)$$

bulunur.

Önerme 5.2.4.1: Tensör çarpım yüzeyinin bir p noktasının eğrilik elipsinin üzerinde bulunması (parabolik nokta olması) için gerek ve yeter şart

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = 0 \quad (5.2.4.3)$$

olmasıdır.

İspat: Açıklama 5.2.0.1 den p noktasının parabolik nokta olması için $\Delta(p) = 0$ olmalıdır. Böylece (5.2.4.2) eşitliğinden (5.2.4.3) elde edilir.

Sonuç 5.2.4.2: $c_2(v) = (\alpha(v), \beta(v))$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere oluşturulan tensör çarpım yüzeyinin bir p noktası eğrilik elipsi üzerinde (parabolik nokta) ise

$$c_2(v) = (\alpha(v), \lambda\alpha(v)) \text{ yada } c_2(v) = (c_1v + c_2, c_3v + c_4)$$

dır.

İspat. $c_2(v) = (\alpha(v), \beta(v))$ eğrisi birim hızlı olduğundan (5.2.4.3) ile ortak çözümden istenilen sonuç elde edilir (bkz. Ek13). \square

5.2.5. Meridyen Yüzeyleri

Bu kısımda meridyen yüzeyleri için eğrilik elipsleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

$M \subset E^4$ bir meridyen yüzeyi olmak üzere (2.2.31), (3.7.7) ve (3.7.10) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} h_{22}^1 &= \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)}, \\ h_{11}^2 &= \kappa_\alpha(u), \\ h_{22}^2 &= \frac{\alpha_2'(u)}{\alpha_1(u)}, \\ h_{11}^1 &= h_{12}^2 = h_{12}^1 = 0 \end{aligned} \tag{5.2.5.1}$$

bulunur. Böylece (5.2.4.1) eşitlikleri (5.2.0.1) de yerine yazılırsa

$$\Delta(p) = -\frac{(h_{11}^2)^2 (h_{22}^1)^2}{4} = -\frac{\kappa_\alpha^2 \kappa^2}{4\alpha_1^2} \tag{5.2.5.2}$$

bulunur.

Önerme 5.2.5.1: Meridyen yüzeyinin her bir noktası parabolik noktadır.

İspat: Açıklama 5.2.0.1 den p noktasının parabolik nokta olması için $\Delta(p) < 0$ olmalıdır. Böylece (5.2.5.1) eşitliğinden $\Delta(p) < 0$ sağlandığından p noktası parabolik bir noktadır.

6. E^4 DEKİ YÜZEYLERİN GANCHEV-MILOUSHEVA DEĞİŞMEZLERİ

6.0. Giriş

Bu bölümde, 3. Bölümde ele alınan Vranceanu yüzeyleri, Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyleri, meridyen yüzeyleri ve tensör çarpım yüzeylerinin Ganchev-Milousheva değişmezleri incelenmiştir.

6.1. Ganchev-Milousheva Değişmezleri

M yüzeyi $X : U \subset E^2 \rightarrow E^4$ yaması ile verilsin. M nin $p \in X(u, v)$ noktasındaki 1. ve 2. temel form katsayıları sırasıyla E, F, G ve $c_{11}^1, \dots, c_{22}^2$ olmak üzere

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}, \quad (6.1.1)$$

$$L(u, v) = \frac{2\Delta_1}{W}, M(u, v) = \frac{\Delta_2}{W}, N(u, v) = \frac{2\Delta_3}{W}; W = \sqrt{EG - F^2} \quad (6.1.2)$$

ve

$$\gamma_1^1 = \frac{FM - GL}{EG - F^2}, \gamma_1^2 = \frac{FL - EM}{EG - F^2}, \gamma_2^1 = \frac{FN - GM}{EG - F^2}, \gamma_2^2 = \frac{FM - EN}{EG - F^2} \quad (6.1.3)$$

fonksiyonları tanımlanır (Ganchev ve Milousheva 2008b).

Tanım 6.1.1: M yüzeyi $X : U \subset E^2 \rightarrow E^n$ regüler yaması ile verilsin. M nin p noktasındaki teğet vektörleri X_u ve X_v olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma(X_u) &= \gamma_1^1 X_u + \gamma_1^2 X_v \\ \gamma(X_v) &= \gamma_2^1 X_u + \gamma_2^2 X_v \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\gamma : T_p M \rightarrow T_p M$ lineer dönüşümünün matris temsilcisi

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 \end{pmatrix} \quad (6.1.4)$$

dir. Böylece

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

için

$$\gamma = -hg^{-1}$$

bulunur. Bununla birlikte

$$k = \det \gamma = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \tau = \frac{1}{2} iz\gamma = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \quad (6.1.5)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara sırasıyla M yüzeyinin 1. ve 2. *değişmezleri* adı verilir (Ganchev ve Milousheva 2008b). Bu çalışmada k ve τ fonksiyonları M yüzeyinin 1. ve 2. *Ganchev-Milousheva değişmezleri* olarak adlandırılmıştır.

Teorem 6.1.1: $M \subset E^4$ yüzeyinin 2. değişmezi τ ve normal eğriliği K_N olmak üzere

$$\tau = K_N$$

dir.

İspat. (6.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{12}^1 c_{11}^2, \\ \Delta_2 &= c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{22}^1 c_{11}^2, \\ \Delta_3 &= c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{22}^1 c_{12}^2 \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

elde edilir. Bu eşitlikler (6.1.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \frac{2(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{12}^1 c_{11}^2)}{W}, \\ M(u, v) &= \frac{(c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{22}^1 c_{11}^2)}{W}, \\ N(u, v) &= \frac{2(c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{22}^1 c_{12}^2)}{W} \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

bulunur. Böylece (6.1.7) deki fonksiyonların eşitlikleri (6.1.5) deki τ nun eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{E(c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{22}^1 c_{12}^2) - F(c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{22}^1 c_{11}^2) + G(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{12}^1 c_{11}^2)}{W^3} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.2.46) eşitliği yardımıyla yukarıdaki ifadenin K_N normal eğriliğine eşit olduğu görülür. \square

Teorem 6.1.2: $M \subset E^4$ yüzeyinin 1. değişmezi k olmak üzere $k = 4\Delta$ dir.

İspat. (5.2.0.1) determinantının değeri hesaplanırsa

$$\Delta = \frac{4(h_{11}^1 h_{12}^2 - h_{11}^2 h_{12}^1)(h_{12}^1 h_{22}^2 - h_{12}^2 h_{22}^1) - (h_{11}^2 h_{22}^1 - h_{11}^1 h_{22}^2)^2}{4} \quad (6.1.8)$$

elde edilir. Böylece (2.2.33) denklemindeki h_{ij}^k değerleri (6.1.8) de yerine yazılırsa

$$\Delta = \frac{4(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{11}^2 c_{12}^1)(c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{12}^2 c_{22}^1) - (c_{11}^2 c_{22}^1 - c_{11}^1 c_{22}^2)^2}{4W^4}$$

elde edilir. Benzer şekilde (6.1.7) deki fonksiyonların eşitlikleri (6.1.5) deki k nın eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} k &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{4(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{11}^2 c_{12}^1)(c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{12}^2 c_{22}^1) - (c_{11}^2 c_{22}^1 - c_{11}^1 c_{22}^2)^2}{W^4} \\ &= 4\Delta \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 6.1.3: $\tau^2 - k \geq 0$ dir.

İspat. (6.1.3) ve (6.1.5) eşitliklerinden

$$4(\tau^2 - k) = (\gamma_1^1 - \gamma_2^2 + 2\frac{F}{E}\gamma_1^2)^2 + 4\frac{EG - F^2}{E^2}(\gamma_1^2)^2 \geq 0$$

elde edilir.

Teorem 6.1.4: $M \subset E^4$ yüzeyinde $F = 0$ olmak üzere M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\tau^2 - k = 0 \quad (6.1.9)$$

olmasıdır (Ganchev ve Milousheva 2008b).

İspat: $F = 0$ ve $\vec{H} = 0$ olsun. Bu takdirde (2.2.18) denkleminde

$$\begin{aligned} Ec_{22}^1 + Gc_{11}^1 &= 0, \\ Ec_{22}^2 + Gc_{11}^2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} c_{22}^1 &= -\frac{G}{E}c_{11}^1 = \rho c_{11}^1, \\ c_{22}^2 &= -\frac{G}{E}c_{11}^2 = \rho c_{11}^2 \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

elde edilir. Böylece (6.1.10) eşitlikleri (6.1.1) de yerine yazılırsa $\Delta_2 = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde $\frac{\Delta_3}{G} = \frac{\Delta_1}{E}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} L &= \rho E, \\ M &= 0, \\ N &= \rho G \end{aligned}$$

bulunur ve (6.1.5) de yerine yazılırsa $\tau = \rho$ ve $k = \rho^2$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Sonuç 6.1.5. $M \subset E^4$ yüzeyinin açılabilir bir regle yüzeyi olması için gerek ve yeter şart $k = 0$, $\tau = 0$ ve $K = 0$ olmasıdır (Ganchev ve Milousheva 2008b).

Önerme 6.1.6: $M \subset E^4$ yüzeyinin değişmezleri olan k ve τ nın işaretlerine göre M nin noktaları aşağıdaki gibi dört farklı tipte incelenebilir (Ganchev ve Milousheva 2008b); verilen bir $p \in M$ noktası için;

- i) $k = \tau = 0$ ise p noktası düzlemseldir,
- ii) $k < 0$ ise p noktası eliptiktir,
- iii) $k = 0, \tau \neq 0$ ise p noktası paraboliktir,
- iv) $k > 0$ ise p noktası hiperboliktir.

6.1.1. Vranceanu Yüzeyinin Değişmezleri

$M \subset E^4$ yüzeyi bir Vranceanu yüzeyi olsun. Bu takdirde (3.2.3) denklemindeki 2. temel form katsayılarının değerleri (6.1.1) ve (6.1.2) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\Delta_1 = -\frac{r^3}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = \frac{r(-rr'' + 2(r')^2 + r^2)}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}, \quad (6.1.1.1)$$

ve

$$L(u, v) = -\frac{2r^2}{r^2 + (r')^2}, M(u, v) = 0, N(u, v) = \frac{2(-rr'' + 2(r')^2 + r^2)}{r^2 + (r')^2} \quad (6.1.1.2)$$

elde edilir. Böylece (6.1.1.1) ve (6.1.1.2) denklemlerindeki ifadeler (6.1.5) de yerine yazılırsa Vranceanu yüzeyinin 1. ve 2. Ganchev-Milousheva değişmezleri sırasıyla

$$k = \frac{4(rr'' - 2(r')^2 - r^2)}{(r^2 + (r')^2)^3} \text{ ve } \tau = \frac{(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^2} \quad (6.1.1.3)$$

olarak hesaplanır.

Açıklama 6.1.1.1: $k = 0, \tau \neq 0$ halinde Önerme 5.1.1.1 ve Sonuç 5.2.1.2 deki sonuçlar elde edilir.

6.1.2. Ganchev-Milousheva Rotasyon Yüzeyinin Değişmezleri

$M \subset E^4$ yüzeyi Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde (3.4.19) denklemindeki 2. temel form katsayılarının değerleri (6.1.1) ve (6.1.2) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = -f_3 \kappa_1, \Delta_3 = 0, \quad (6.1.2.1)$$

ve

$$L(u, v) = 0, M(u, v) = -\kappa_1, N(u, v) = 0 \quad (6.1.2.2)$$

elde edilir. Böylece (6.1.2.1) ve (6.1.2.2) denklemlerindeki ifadeler (6.1.5) de yerine yazılırsa Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin Ganchev-Milousheva değişmezleri sırasıyla

$$k = -\frac{\kappa_1^2}{f_3^2} \text{ ve } \tau = 0 \quad (6.1.2.3)$$

olarak hesaplanır.

Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 6.1.2.1: $k < 0$ olduğundan Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin her bir $p \in M$ noktası eliptiktir (bkz. Önerme 5.2.3.1).

Sonuç 6.1.2.2: Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin bir $p \in M$ noktasının düzlemsel olması için $\alpha(u)$ döngü eğrisinin Oe_1e_2 düzlemine izdüşümü bir doğru olmalıdır.

İspat: p noktasının düzlemsel olması için $\tau = 0$ olduğundan $k = 0$ olmalıdır. Bu da $\kappa_1 = 0$ olmasını gerektirdiğinden ispat tamamlanmış olur. \square

6.1.3. Tensör Çarpım Yüzeyinin Değişmezleri

$M \subset E^4$ tensör çarpım yüzeyi olsun. Bu takdirde (3.5.9) denklemindeki 2. temel form katsayılarının değerleri (6.1.1) ve (6.1.2) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -\frac{(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}} \\ \Delta_2 &= 0 \\ \Delta_3 &= \frac{(\alpha\beta' - \beta\alpha')(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}}\end{aligned}\tag{6.1.3.1}$$

ve

$$\begin{aligned}L(u, v) &= -\frac{2(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}{(\alpha^2 + \beta^2)((\alpha')^2 + (\beta')^2)} \\ M(u, v) &= 0 \\ N(u, v) &= \frac{2(\alpha\beta' - \beta\alpha')(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')}{(\alpha^2 + \beta^2)((\alpha')^2 + (\beta')^2)}\end{aligned}\tag{6.1.3.2}$$

elde edilir.

Böylece (6.1.3.1) ve (6.1.3.2) denklemlerindeki ifadeler (6.1.5) de yerine yazılırsa tensör çarpım yüzeyinin Ganchev-Milousheva değişmezleri sırasıyla

$$k = -\frac{4(\alpha\beta' - \beta\alpha')^3(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')}{(\alpha^2 + \beta^2)^3((\alpha')^2 + (\beta')^2)^3}$$

ve

$$\tau = \frac{(\alpha\beta' - \beta\alpha')(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2((\alpha')^2 + (\beta')^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2((\alpha')^2 + (\beta')^2)^2}$$

olarak hesaplanır.

6.1.4. Meridyen Yüzeyinin Değişmezleri

$M \subset E^4$ meridyen yüzeyi olsun. Bu takdirde (3.7.10) denklemindeki 2. temel form katsayılarının değerleri (6.1.1) ve (6.1.2) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = -\alpha_1\kappa_\alpha\kappa, \Delta_3 = 0,\tag{6.1.4.1}$$

ve

$$L(u, v) = 0, M(u, v) = -\kappa_\alpha\kappa, N(u, v) = 0\tag{6.1.4.2}$$

elde edilir.

Böylece (6.1.4.1) ve (6.1.4.2) denklemlerindeki ifadeler (6.1.5) de yerine yazılırsa meridyen yüzeyinin Ganchev-Milousheva değişmezleri sırasıyla

$$k = -\frac{\kappa_\alpha^2\kappa^2}{\alpha_1^2} \text{ ve } \tau = 0\tag{6.1.4.3}$$

olarak hesaplanır.

Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 6.1.4.1: $k < 0$ olduğundan meridyen yüzeyinin her bir $p \in M$ noktası paraboliktir (bkz. Önerme 5.2.5.1).

Sonuç 6.14.2: Meridyen yüzeyinin $p \in M$ noktası düzlemsel ise M yüzeyi açılabilir regle yüzeydir.

İspat: p noktasının düzlemsel olması için $\tau = 0$ olduğundan $k = 0$ olmalıdır. Böylece $\kappa_\alpha = 0$ olduğundan α eğrisi düz bir doğru olacaktır. Aynı zamanda yüzeyin Gauss eğriliğı $K = 0$ olduğundan M yüzeyi açılabilir bir regle yüzey olur. \square

KAYNAKLAR

- AMINOV, Yu. A. 1994.** Surfaces in E^4 with a Gaussian curvature coinciding with a Gaussian torsion up to the sign. *Mathematical Notes*, 56(6): 1211-1215.
- AMINOV, Yu. A. 2001.** The Geometry of Submanifolds. Gordon and Breach Science Publishers, Singapore, 12 pp.
- ARSLAN, K., BAYRAM B.K., BULCA B., KIM Y.H., MURATHAN C., ÖZTÜRK G. 2010.** Rotational Embeddings in E^4 with pointwise 1-type Gauss map. *Turk. J. Math.*, 34: 1-7.
- ARSLAN, K., BAYRAM B.K., BULCA B., ÖZTÜRK G. 2011a.** Generalized Rotation Surfaces in E^4 . *Results. Math. Online First 2011 Springer Basel AG*, DOI 10.1007/s00025-011-0103-3.
- ARSLAN, K., BAYRAM B.K., BULCA B., KIM Y.H., MURATHAN C., ÖZTÜRK G. 2011b.** Vranceanu Surfaces in E^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 42(1): 41-51.
- ARSLAN, K., BAYRAM B.K., BULCA B., KIM Y.H., MURATHAN C., ÖZTÜRK G. 2011c.** Tensor Product Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Bull. Korean Math. Soc.*, 48: 601-609.
- BAIKOUSSIS, C., BLAIR D.E. 1992.** On the Gauss map of ruled surfaces. *Glasgow Math. J.*, 34: 355-359.
- BAIKOUSSIS, C., CHEN B.Y., VERSTRAELEN L. 1993.** Ruled surfaces and tubes with finite type Gauss map. *Tokyo J. Math.*, 16: 341-349.
- BAIKOUSSIS, C., VERSTRAELEN L. 1993.** On the Gauss map of helicoidal surfaces. *Rend. Sem. Mat. Messina ser. II*, 16: 31-42.
- BANCHOFF, T.F. 1978.** Computer Animation and the Geometry of Surfaces in 3 and 4-Space. International Congress of Mathematicians, Helsinki.
- BAYRAM, B.(K.), BULCA B., ARSLAN K., ÖZTÜRK G. 2009.** Superconformal Ruled Surfaces in E^4 . *Math. Commun.*, 14(2): 235-244.
- BORELLI, V., CHEN B.Y., MORVAN J.M. 1995.** Une caractérisation géométrique de la sphère de Whitney. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 321:1485–1490.
- CHEN, B.Y. 1973.** Geometry of Submanifolds. Dekker, New York.
- CHEN, B.Y. 1983.** On the Total Curvature of Immersed Submanifolds, VI: Submanifolds of Finite Type and Their Applications. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 11: 309-328.

- CHEN, B.Y., DEPRez J., VERHEYEN P. 1992.** Immersions with Geodesics of 2-type. *Geometry and Topology of Submanifolds IV*. Belgium, 87-110.
- CHEN, B.Y., CHOI M., KIM Y.H. 2005.** Surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map. *J. Korean Math. Soc.*, 42: 447-455.
- CHEN, B.Y. 2010.** Classification of Wintgen ideal surfaces in Euclidean 4-space with equal Gauss and normal curvatures, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 38:145–160
- CHOI, M., KIM Y.H. 2001.** Characterization of the helicoid as ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.*, 38: 753-761.
- DeSMET, D.J., DILLEN F., VERSTRAELEN L., VRANCKEN L. 1999.** A pointwise inequality in submanifold theory. *Arc. Mat. (Bruno)*, 115-128.
- EISENHART, L. P. 1912.** Minimal surfaces in Euclidean four space, *Amer. J. Math.*, 34:215-236.
- GAL, R.O., PAL L. 2009.** Some Notes on Drawing Twofolds in 4-dimensional Euclidean Space. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica*, 1,2: 125-134.
- GANCHEV, G., MILOUSHEVA V. 2008a.** Minimal Surfaces in The Four Dimensional Euclidean Space. ArXiv:0806.3334v1.
- GANCHEV, G., MILOUSHEVA V. 2008b.** On the Theory of Surfaces in the Four Dimensional Euclidean Space. *Kodai Math. J.*, 31: 183-198.
- GANCHEV, G., MILOUSHEVA V. 2010.** Invariants and Bonnet-type theorem for Surfaces in R^4 . *Cent. Eur. J. Math.*, 8(6): 993-1008.
- GONCHAROVA, O.A. 2006a.** Standard Ruled Surfaces in E^n . *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn Tekh. Nauki*, 3: 7-12 (Rusça).
- GONCHAROVA, O.A. 2006b.** Ruled Surfaces in E^n . *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 2(1): 40-61.
- GONCHAROVA, O.A. 2008.** Ruled Surfaces in E^4 with Constant Ratio of the Gaussian Curvature and Gaussian Torsion. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 4(3): 371-379.
- GEYSENS, F., VERHEYEN L., VERSTRAELEN L. 1983.** Characterization and Examples of Chen submanifolds. *Journal of Geometry*, 20: 47-62.
- GLUCK, H. 1966.** Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space. *Am. Math. Monthly*, 73: 243-249.
- GUADALUPE, I.V., RODRIGUEZ, L. 1983.** Normal curvature of surfaces in space forms. *Pacific J. Math.*, 106(1): 95-103.

- GUTIERREZ NUNEZ, J.M., ROMERO FUSTER, M.C., SANCHEZ-BRINGAS, F. 2008.** Codazzi Fields on Surfaces Immersed in Euclidean 4-space. *Osaka J. Math.*, 45: 877-894.
- GRAY, A. 1993.** Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. CRC Pres Inc., USA, 398 pp.
- JAKLIC, A., LEONARDIS A., SOLINA F. 2000.** Segmentation and Recovery Superquadrics. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- KIM, Y.H., LEE E.K. 1993.** Surfaces of Euclidean 4-Space Whose Geodesics are W-curves. *Nihonkai Math. J.*, 4: 221-232.
- KIM, Y.H., YOON D.W. 2000a.** Ruled surfaces with finite type Gauss map in Minkowski spaces. *Soochow J. Math.*, 26: 85-96.
- KIM, Y.H., YOON D.W. 2000b.** Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *J. Geom. Phys.*, 34: 191-205.
- KIM, Y.H., YOON D.W. 2005.** On the Gauss map of ruled surfaces in Minkowski space. *Rocky Mountain J. Math.*, 35: 1555-1581.
- KLEIN, F., LIE S. 1871.** Uber Diejenigen Ebenenen Kurven Welche Durch ein Geschlossenes System von Einfach Unendlich Vielen Vartauschbaren Linearen Transformationen in sich Uebergehen. *Math. Ann.*, 4: 50-84.
- KUIPER, N.H. 1970.** Minimal Total Absolute Curvature for Immersions. *Invent. Math.*, 10: 209-238.
- LAWSON Jr., H.B. 1970.** Complete Minimal Surfaces in S^3 . *Ann. of Math.*, 92: 335-374.
- LITTLE, J. A. 1969.** On singularities of submanifolds of a higher dimensional Euclidean space. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 83: 261-335.
- MELLO, L.F. 2003.** Mean directionally curved lines on surfaces immersed in R^4 . *Publ. Math.*, 47: 415-440.
- MELLO, L.F. 2009.** Orthogonal asymptotic lines on surfaces immersed in R^4 . *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 39(5): 1597-1612.
- MIHAI, A. 2004.** An Inequality For Totally Real Surfaces in Complex Space Forms. *Krejujevac J. Math.*, 26: 83-88.
- MIHAI, A., ROSCA R., VERSTRAELEN L.,VRANCKEN L. 1995.** Tensor product surfaces of Euclidean planar curves. *Rend. Sem. Mat. Messina*, 3:173-184.

- MOCHIDA, D. K. H., FUSTER M.D.C.R., RUAS M.A.S. 1995.** The Geometry of Surfaces in 4-Space From a Contact Viewpoint. *Geometriae Dedicata*, 54: 323-332.
- MONTERDE, J. 2007.** Curves with Constant Curvature Ratios. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 3a, 13(1): 177-186.
- MOORE, C. 1919.** Surfaces of Rotations in a Space of Four Dimensions. *Ann. Math.*, 21(2): 81-93.
- O'NEILL, B. 1997.** Elementary Differential Geometry. Academic Press, USA.
- OTSUIKI, T. 1966.** Surfaces in the Four Dimensional Euclidean Space Isometric to a Sphere. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 18: 101-115.
- ÖZTÜRK, G., ARSLAN K., HACISALİHOĞLU H.H. 2008.** A characterization of ccr-curves in R^m . *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 57(4): 217-224.
- PLASS, M.H. 1939.** Ruled Surfaces in Euclidean Four Space. *Ph.D. Thesis*, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Mathematics.
- ROUXEL, B. 1980.** Ruled A-submanifolds in Euclidean Space E^4 . *Soochow J. Math.*, 6: 117-121.
- TOMPKINS, C. 1941.** A flat Klein bottle isometrically embedded in Euclidean 4-space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 47: 508-.
- VRANCEANU, G. 1977.** Surfaces de Rotation dans E^4 . *Rev. Roum. Math. Pures Appl. XXII*, 6: 857-862.
- WINTGEN, P. 1979.** Sur l'inégalité de Chen-Willmore. *C. R. Acad. Sci. Paris* 288, 993-995.
- WONG, Y.C. 1946.** Contributions to the theory of surfaces in 4-space of constant curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 59: 467-507.
- YOON, D.W. 2003.** Some properties of the Clifford torus as rotation surfaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34: 857-862.

EKLER

EK0: Bu tezde E^4 de

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v), w(u, v))$$

regüler yaması ile verilen yüzeylerin E^3 deki izdüşümleri Maple 12 programında

$$\text{plot3d}([x, y, z + w], u = a..b, v = c..d)$$

komutu kullanılarak çizdirilmiştir.

EK1: (3.2.6) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden
> ode1:=diff(r(v),v,v)*r(v)-diff(r(v),v)^2=0;

$$\text{ode1} := \left(\frac{d^2}{dv^2} r(v) \right) r(v) - \left(\frac{d}{dv} r(v) \right)^2 = 0$$

> dsolve (ode1);

$$r(v) = e^{(-C1v)} _C2$$

elde edilir.

EK 2: (3.2.8) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden
> ode2:=diff(r(v),v,v)*r(v)-3*diff(r(v),v)^2-2*r(v)^2=0;

$$\text{ode2} := \left(\frac{d^2}{dv^2} r(v) \right) r(v) - 3 \left(\frac{d}{dv} r(v) \right)^2 - 2r(v)^2 = 0$$

> dsolve (ode2);

$$r(v) = \frac{1}{\sqrt{-C1\sin(2v) - C2\cos(2v)}}, r(v) = -\frac{1}{\sqrt{-C1\sin(2v) - C2\cos(2v)}}$$

elde edilir.

EK 3: (3.2.11) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden
> ode3:=8*(r(v)^2+(diff(r(v),v))^2)*((diff(r(v),v))^2-r(v)*diff(r(v),v,v))
-(3*(diff(r(v),v))^2+2*(r(v))^2-r(v)*diff(r(v),v,v))^2=0;

$$\text{ode3} := 8 \left(r(v)^2 + \left(\frac{d}{dv} r(v) \right)^2 \right) \left(\left(\frac{d}{dv} r(v) \right)^2 - \left(\frac{d^2}{dv^2} r(v) \right) r(v) \right) - \left(3 \left(\frac{d}{dv} r(v) \right)^2 + 2r(v)^2 - \left(\frac{d^2}{dv^2} r(v) \right) r(v) \right)^2 = 0$$

> dsolve (ode3);

$$r(v) = \sqrt{-C1\sin(2v) + C2\cos(2v)}, r(v) = -\sqrt{-C1\sin(2v) + C2\cos(2v)}$$

elde edilir. □

EK 4: (3.4.7) diferansiyel denklem sisteminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden

> sys_ode4 := f1(v)^2+f2(v)^2=1, f1(v)^2+diff(f1(v),v)^2+diff(f2(v),v)^2=1;

$$\text{sys_ode4} := f1(v)^2 + f2(v)^2 = 1, f1(v)^2 + \left(\frac{d}{dv} f1(v)\right)^2 + \left(\frac{d}{dv} f2(v)\right)^2 = 1$$

> dsolve([sys_ode4]);

[{f1(v) = 1}, {f2(v) = 0}], [{f1(v) = -1}, {f2(v) = 0}],

[{f1(v) = tanh(v + _C1)}, {f2(v) = \sqrt{-f1(v)^2 + 1}, f2(v) = -\sqrt{-f1(v)^2 + 1}],

[{f1(v) = -tanh(v + _C1)}, {f2(v) = \sqrt{-f1(v)^2 + 1}, f2(v) = -\sqrt{-f1(v)^2 + 1}],

elde edilir. □

EK 5: (3.4.24) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden

> ode5:=diff(f3(u),u,u)*diff(f3(u),u)-f3(u)*diff(f3(u),u,u)=0;

$$\text{ode5} := \left(\frac{d^2}{du^2} f3(u)\right) \left(\frac{d}{du} f3(u)\right) - f3(u) \left(\frac{d^3}{du^3} f3(u)\right) = 0$$

> dsolve (ode5);

$$f3(u) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-C3}{\left(e^{\left(\frac{u}{-C1}\right)}\right)^2 \left(e^{\left(\frac{-C2}{-C1}\right)}\right)^2} \left(\left(e^{\left(\frac{u}{-C1}\right)}\right)^2 \left(e^{\left(\frac{-C2}{-C1}\right)}\right)^2 + 1\right)},$$

$$f3(u) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-C3}{\left(e^{\left(\frac{u}{-C1}\right)}\right)^2 \left(e^{\left(\frac{-C2}{-C1}\right)}\right)^2} \left(\left(e^{\left(\frac{u}{-C1}\right)}\right)^2 \left(e^{\left(\frac{-C2}{-C1}\right)}\right)^2 + 1\right)}$$

elde edilir. □

EK 6: (4.2.1.23) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden

> ode6:=r(v)+diff(r(v),v,v)=0;

$$\text{ode6} := r(v) \left(\frac{d^2}{dv^2} r(v)\right) = 0$$

> dsolve (ode6);

$$r(v) = _C1 \sin(v) + _C2 \cos(v)$$

EK 7: Aşağıdaki Maple 12 programı (4.2.2.27) eşitliğinin (4.2.2.25) ve (4.2.2.26) denklemlerini sağladığını gösterir;

> x(t):=p*t+q;

$$x(t) := pt + q$$

> y(t):=sqrt(1-p^2)*t;

$$y(t) := \sqrt{1-p^2}t$$

> a:=diff(y(t),t,t)*x(t)-diff(x(t),t,t)*y(t):

> b:=diff(x(t),t)*x(t)+diff(y(t),t)*y(t):

> c:=diff(y(t),t,t)*diff(x(t),t)-diff(x(t),t,t)*diff(y(t),t):

> d:=1+diff(x(t),t,t)*x(t)+diff(y(t),t,t)*y(t):

> e:=x(t)^2+y(t)^2:

> f:=diff(y(t),t)*x(t)-diff(x(t),t)*y(t):

> A:= a-b*c:

> B:=d*e-b^2-f*(f-c*e):

> k:=simplify(A);

$$k := 0$$

> l:=simplify(B);

$$l := 0$$

EK 8: Aşağıdaki Maple 12 programı (4.2.2.28) eşitliğinin (4.2.2.25) ve (4.2.2.26) denklemlerini sağladığını gösterir;

> x(t):=ln(t);

$$x(t) := \ln(t)$$

> y(t):=sqrt(t^2-1)+arctan(1/sqrt(t^2-1));

$$y(t) := \sqrt{t^2-1} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)$$

> a:=diff(y(t),t,t)*x(t)-diff(x(t),t,t)*y(t):

> b:=diff(x(t),t)*x(t)+diff(y(t),t)*y(t):

> c:=diff(y(t),t,t)*diff(x(t),t)-diff(x(t),t,t)*diff(y(t),t):

> d:=1+diff(x(t),t,t)*x(t)+diff(y(t),t,t)*y(t):

> e:=x(t)^2+y(t)^2:

> f:=diff(y(t),t)*x(t)-diff(x(t),t)*y(t):

> A:= a-b*c:

> B:=d*e-b^2-f*(f-c*e):

> k:=simplify(A);

$$k := 0$$

> l:=simplify(B);

$$l := 0$$

EK 9: Aşağıdaki Maple 12 programı (4.2.2.29) eşitliğinin (4.2.2.25) ve (4.2.2.26) denklemlerini sağladığını gösterir;

> x(t):=exp(t);

$$x(t) := e^t$$

> y(t):=sqrt(1-exp(2*t))-arctanh(1/sqrt(1-exp(2*t)));

$$y(t) := \sqrt{1-e^{(2t)}} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^{(2t)}}}\right)$$

> a:=diff(y(t),t,t)*x(t)-diff(x(t),t,t)*y(t):

> b:=diff(x(t),t)*x(t)+diff(y(t),t)*y(t):

> c:=diff(y(t),t,t)*diff(x(t),t)-diff(x(t),t,t)*diff(y(t),t):

> d:=1+diff(x(t),t,t)*x(t)+diff(y(t),t,t)*y(t):
 > e:=x(t)^2+y(t)^2:
 > f:=diff(y(t),t)*x(t)-diff(x(t),t)*y(t):
 > A:= a-b*c:
 > B:=d*e-b^2-f*(f-c*e):
 > k:=simplify(A);

$$k := 0$$

> l:=simplify(B);

$$l := 0$$

EK 10: Aşağıdaki Maple 12 programları (4.2.2.27)- (4.2.2.29) de parametrik denklemleri verilen düzlemsel eğrilerin birim hızlı olduklarını göstermektedir.

> alpha1(v):=a*v+b;

$$\alpha 1(v) := av + b$$

> beta1(v):=int(sqrt(1-diff(alpha1(v),v)^2), v);

$$\beta 1(v) := \sqrt{1 - a^2} v$$

> alpha2(v):=ln(v);

$$\alpha 2(v) := \ln(v)$$

> beta2(v):=int(sqrt(1-diff(alpha2(v),v)^2), v);

$$\beta 2(v) := \frac{\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2}} v \left(\sqrt{v^2-1} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}\right) \right)}{\sqrt{v^2-1}}$$

> alpha3(v):=exp(v);

$$\alpha 3(v) := e^v$$

> beta3(v):=int(sqrt(1-diff(alpha3(v),v)^2), v);

$$\beta 3(v) := \sqrt{1 - (e^v)^2} - \arctan h \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (e^v)^2}} \right)$$

EK 11: (5.2.1.3) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden

> ode7:=r(v)*diff(r(v),v,v)-2*diff(r(v),v)^2-r(v)^2=0;

$$ode7 := r(v) \left(\frac{d^2}{dv^2} r(v) \right) - 2 \left(\frac{d}{dv} r(v) \right)^2 - r(v)^2 = 0$$

> dsolve(ode7);

$$r(v) = - \frac{1}{- _C1 \sin(2v) + _C2 \cos(2v)}$$

elde edilir.

EK 12: (5.2.3.3) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden

> sys_ode8:= diff(f1(v),v)^2+diff(f2(v),v)^2=1-a^2, diff(f1(v),v)*diff(f2(v),v,v)-diff(f2(v),v)*diff(f1(v),v,v)=0;

$$sys_ode8 := \left(\frac{d}{dv} f1(v) \right)^2 + \left(\frac{d}{dv} f2(v) \right)^2 = 1 - a^2,$$

$$\left(\frac{d}{dv} f1(v) \right) \left(\frac{d^2}{dv^2} f2(v) \right) - \left(\frac{d}{dv} f2(v) \right) \left(\frac{d^2}{dv^2} f1(v) \right) = 0$$

> dsolve([sys_ode8]);

$$\left[\left\{ f1(v) = _C2 \right\}, \left\{ f2(v) = -\sqrt{-(a-1)(a+1)}v + _C1 \right\}, \left\{ f2(v) = \sqrt{-(a-1)(a+1)}v + _C1 \right\} \right]$$

$$\left[\left\{ f1(v) = _C2v + _C3 \right\}, \left\{ f2(v) = \int \sqrt{-\left(\frac{d}{dv}f1(v)\right)^2 + 1 - a^2} dv + _C1 \right\} \right]$$

$$\left[\left\{ f2(v) = -\int \sqrt{-\left(\frac{d}{dv}f1(v)\right)^2 + 1 - a^2} dv + _C1 \right\} \right]$$

elde edilir.

EK 13: (5.2.4.3) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden

> sys_ode9 := diff(alpha(v),v)*diff(alpha(v),v,v)+diff(beta(v),v)*diff(beta(v),v,v)=0,
alpha(v)*diff(beta(v),v)-beta(v)*diff(alpha(v),v)=0;

$$sys_ode9 := \left(\frac{d}{dv} \alpha(v) \right) \left(\frac{d^2}{dv^2} \alpha(v) \right) + \left(\frac{d}{dv} \beta(v) \right) \left(\frac{d^2}{dv^2} \beta(v) \right) = 0,$$

$$\alpha(v) \left(\frac{d}{dv} \beta(v) \right) - \beta(v) \left(\frac{d}{dv} \alpha(v) \right) = 0$$

> dsolve([sys_ode9]);

$$\left[\left\{ \alpha(v) = 0 \right\}, \left\{ \beta(v) = _C1 \right\} \right], \left[\left\{ \alpha(v) = 0 \right\}, \left\{ \beta(v) = _C1v + _C2 \right\} \right],$$

$$\left[\left\{ \alpha(v) = _C2 \right\}, \left\{ \beta(v) = _C1 \right\} \right], \left[\left\{ \alpha(v) = _C2v + _C3 \right\}, \left\{ \beta(v) = _C1\alpha(v) \right\} \right],$$

$$\left[\left\{ \alpha(v) = \alpha(v) \right\}, \left\{ \beta(v) = -I\alpha(v), \beta(v) = \alpha(v)I \right\} \right]$$

ve benzer şekilde

> sys_ode10 := diff(alpha(v),v)*diff(alpha(v),v,v)+diff(beta(v),v)*diff(beta(v),v,v)=0,
diff(alpha(v),v)*diff(beta(v),v,v)-diff(beta(v),v)*diff(alpha(v),v,v)=0;

$$sys_ode10 := \left(\frac{d}{dv} \alpha(v) \right) \left(\frac{d^2}{dv^2} \alpha(v) \right) + \left(\frac{d}{dv} \beta(v) \right) \left(\frac{d^2}{dv^2} \beta(v) \right) = 0,$$

$$\alpha(v) \left(\frac{d^2}{dv^2} \beta(v) \right) - \beta(v) \left(\frac{d^2}{dv^2} \alpha(v) \right) = 0$$

> dsolve([sys_ode10]);

$$\left[\left\{ \alpha(v) = _C2 \right\}, \left\{ \beta(v) = _C1 \right\} \right], \left[\left\{ \alpha(v) = _C2v + _C3 \right\}, \left\{ \beta(v) = _C1 \right\} \right],$$

$$\left[\left\{ \alpha(v) = _C3v + _C4 \right\}, \left\{ \beta(v) = _C1v + _C2 \right\} \right],$$

$$\left[\left\{ \alpha(v) = \alpha(v) \right\}, \left\{ \beta(v) = -\alpha(v)I + _C1, \beta(v) = \alpha(v)I + _C1 \right\} \right]$$

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Betül BULCA
Doğum Yeri ve Tarihi : Bursa, 03/08/1984
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Bursa Milli Piyango Anadolu Lisesi, 1998-2002
Lisans : Eskişehir Anadolu Üniversitesi, 2002-2006
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi, 2006-2008

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Uludağ Üniversitesi 2009 – ...
İletişim (e-posta) : bbulca@uludag.edu.tr

Yayınları: :

BULCA, B., ARSLAN K., BAYRAM B.K., ÖZTÜRK G. 2012. Spherical Product Surfaces in E^4 . *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta-Seria Matematica*, 20(1):41-54.

ARSLAN, K., BAYRAM B.K., BULCA B., ÖZTÜRK G. 2012. Generalized Rotation Surfaces in E^4 . *Results. Math.*, 61(2):315-327.

ARSLAN, K., BULCA B., MILOUSHEVA V. 2012. Benz surfaces induced by rotational surfaces in E^4 . *Differential Geometry- Dynamical Systems*, 14:5-18.

AMINOV, YU., ARSLAN K., BULCA B., MURATHAN C., BAYRAM B.K., ÖZTÜRK G. 2011. On the Solution of the Monge-Ampere Equation $Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2 = f(x, y)$ with Quadratic Right Side. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 7(3):203-211.

ARSLAN, K., BAYRAM B., BULCA B., KIM Y.H., MURATHAN C., ÖZTÜRK G. 2011. Tensor Product Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 48(3):601-609.

ARSLAN, K., BAYRAM B.K., BULCA B., KIM Y.H., MURATHAN C., ÖZTÜRK G. 2011. Vranceanu Surfaces in E^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 42(1):41-51.

ARSLAN, K., BAYRAM B., BULCA B., KIM Y.H., MURATHAN C., ÖZTÜRK G. 2010. Rotational Embeddings in E^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Turkish Journal of Matjematics*, 34:1-7.

ÖZTÜRK, G., BULCA B., BAYRAM B., ARSLAN K. 2010. On Canal Surfaces in E^3 . *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 11(2):103-108.

BAYRAM, B., BULCA B., ARSLAN K., ÖZTÜRK G. 2009. Superconformal ruled surfaces in E^4 . *Mathematical Communications*, 14(2): 235-244.

ARSLAN, K., BULCA B., BAYRAM B., ÖZTÜRK G., UGAIL H. 2009. On Spherical Product Surfaces in E^3 . *IEEE Computer Society, International Conference on CYBERWORLDS*, 132-137.

ARSLAN, K., AKGÜL H., ERGÜL C., HÜSEYİN E., ÖZTÜRK G., BULCA B. 2009. A geometric description of the peritechia of the pseudonectria rousseliana (mont.) Wollenw. *Journal of Biological & Environmental Sciences*, 3(9):67-70.