REEL KISMI POZİTİF HARMONİK FONKSİYONLAR

AYDIN ÖZBEK

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL KISMI POZİTİF HARMONİK FONKSİYONLAR

AYDIN ÖZBEK

DOÇ. DR. METİN ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA, 2011

TEZ ONAYI

Aydın ÖZBEK tarafından hazırlanan "Reel Kısmı Pozitif Harmonik Fonksiyonlar" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK

Başkan : Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK
U. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Ahmet TEKCAN
U. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İlhan TAPAN
U. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Enstitü Müdürü

27 06
../../2011

U. Ü. Fen BİLİMLERİ Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/06/2011

Aydın ÖZBEK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REEL KISMI POZİTİF HARMONİK FONKSİYONLAR

Aydın ÖZBEK

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK

Bu çalışmada, reel kısmı pozitif harmonik fonksiyonların sınıfı ile bu sınıfın bazı alt sınıfları tanımlandı. Bu sınıflara ait fonksiyonların çeşitli özellikleri incelendi.

Çalışmanın birinci bölümünde, ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlere temel oluşturacak kavramlar verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfının topolojisi ve temel sonuçları verilmiştir. Ayrıca sabordinasyon prensibi ve domine edilmiş seri tanımlanarak, katsayı ve distorsiyon sonuçları elde edilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfının temel özellikleri üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölüm ise çalışmanın ana kısmını oluşturmaktadır. Birim daireyi sağ yarı düzlem içine ve üzerine dönüştüren, yalınkat olmak zorunda olmayan kompleks değerli harmonik fonksiyonların sınıfı ile bu sınıfın bazı alt sınıfları incelenmiştir. Bu fonksiyonlar analitik olmadığından, reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlar ile aralarındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca, birim daireyi sağ yarı düzlem üzerine dönüştüren harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı tanıtılıp, bu sınıfa ait fonksiyonların katsayı eşitsizlikleri ve distorsiyon özellikleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlar, harmonik yalınkat fonksiyonlar, reel kısmı pozitif harmonik fonksiyonlar.

2011, vii + 51 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

HARMONİC FUNCTİONS WİTH REAL PART

Aydın ÖZBEK

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK

In this work, the class of harmonic functions with positive real part and some subclasses are defined. Various properties of these functions that belonging to these classes are examined.

At the first section of this work, we give some basic concepts which we use at the second,third and fourth sections.

In the second part of the work, the basic results and topology of analytic functions with real part positive are given. In addition, by defining the subordination principle and dominated series, coefficient and the distortion results are obtained.

The third section devoted to main features of the class of univalent harmonic functions.

The fourth section is the main part of the study. We investigate the complex valued harmonic functions that maps the unit disc to inside and boundary of right half plane. We point out that these types of functions is not necessary of being univalent. Nevertheless, we examine subclasses of the questioned functions.

This types of functions are not analytic. Hence there exists some relationships between of them. We give some conclusions. In addition, we identify the class of harmonic univalent functions which maps unit disc to right half plane. Moreover we derive coefficient inequalities and distortion properties of these functions that belonging to this class.

Key Words: Harmonic functions, harmonic functions with positive real part.

2011, vii + 51 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam esnasında her türlü bilgi ve deneyimini benden esirgemeyen ve her zaman bana destek olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca matematik öğrenimime katkısı olan tüm hocalarım ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Aydın ÖZBEK
27/06/2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathring{A}$	A kümesinin iç noktalarının kümesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
∂A	A kümesinin sınır noktalarının kümesi
E_A	A kümesinin uç (ekstrem) noktalarının kümesi
$\overline{co}A$	A kümesinin kapalı konveks zarfı
$\mathbb{D}$	Birim daire
$C^1(B)$	B bölgesinde 1. mertebeden sürekli kısmi türeve sahip fonksiyonların sınıfı
$\wp$	Birim çember üzerinde olasılık ölçümlerinin kümesi
$A(G)$	G kümesinde tanımlı analitik fonksiyonlarının kümesi
$C(G)$	G kümesinde tanımlı sürekli fonksiyonlarının kümesi
$f << F$	f fonksiyonu F ile domine edilmiştir
$\operatorname{Re} f$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f$	f fonksiyonunun imajiner kısmı
$f'(z_0)$	f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi
f_z	f fonksiyonunun z ye göre kısmi türevi
J_f	f fonksiyonunun Jakobiyeni
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna sabordine olması
$\overline{f}$	f fonksiyonunun eşleniği
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
P_H	Reel kısmı pozitif harmonik fonksiyonların sınıfı

P_H^0	Reel kısmı pozitif harmonik fonksiyonların alt sınıfı
$P_H(\beta,\alpha)$	Reel kısmı pozitif harmonik fonksiyonların bir alt sınıfı
PR_H	Reel kısmı pozitif ve reel katsayılı harmonik fonksiyonların sınıfı
$PR_H(\beta,\alpha)$	Reel kısmı pozitif ve reel katsayılı harmonik fonksiyonların bir alt sınıfı
Δu	u fonksiyonunun Laplasyeni
S_H	Yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı
S_H^0	Yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların alt sınıfı
$S_H(D,\Omega)$	D den Ω üzerine yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların alt sınıfı
$D^*(z_0,r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı delinmiş açık daire
$\overline{D}(z_0,r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı daire
$C_r=\partial D(z_0,r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık dairenin sınırı
$D_r=D(z_0,r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık daire
$\theta(z,w)$	z den w ye yönlendirilmiş açı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu bölümde, gelecek bölümlerde kullanılacak temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu kavramlarla ilgili ayrıntılı bilgiler (Palka 1991) ve (Conway 1973) kaynaklarında bulunabilir.

1.1 Tanım. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{ z : |z - z_0| \le r \}$$

$$D^*(z_0, r) = \{ z : 0 < |z - z_0| < r \}$$

$$\partial D(z_0, r) = \{ z : |z - z_0| = r \}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli r yarıçaplı *açık daire*, *kapalı daire*, *delinmiş açık daire* ve *çember* denir. Kısalık olsun diye $D(0, r)$ açık dairesi D_r ile ve D_1 birim dairesi de $\mathbb{D}$ ile gösterilir.

1.2 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_0, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir *iç noktası* denir. Eğer A kümesinin bütün noktaları iç nokta ise A ya *açık küme* ve tümleyeni açık olan kümeye de *kapalı küme* adı verilir. Bir A kümesini bulunduran kapalı kümelerin en darına (kesişimine) A kümesinin *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. A kümesinin bulundurduğu en geniş açık kümeye, başka bir deyişle A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* denir ve A kümesinin içi $\overset{o}{A}$ ile gösterilir.

1.3 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere her $D(z, r)$ dairesi ile hem A hem de A nın tümleyeni olan A' kümesinin kesişimi boş kümeden farklı ise z noktasına A kümesinin bir *sınır noktası* denir. A kümesinin sınır noktalarının kümesi ∂A ile gösterilir. Gerçekte $\partial A = \overline{A} - \overset{o}{A}$ dır.

1.4 Tanım. (z_n) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün *n* doğal sayıları için $z_n \in D(z_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (z_n) dizisine z_0 noktasına *yakınsaktır* denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ veya $z_n \to z_0$ biçiminde gösterilir.

1.5 Teorem. $z_0 \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ olacak şekilde *A* da bir (z_n) dizisinin mevcut olmasıdır (Conway 1973).

1.6 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$f[A \cap D(z_0, \delta)] \subset D(f(z_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa *f* fonksiyonuna z_0 noktasında *süreklidir* denir. Eğer her $z \in A$ noktası için

$$f[A \cap D(z, \delta)] \subset D(f(z), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna A kümesinde *düzgün süreklidir* denir. Eğer $\lim z_n = z_0$ özelliğinde her bir (z_n) dizisi için $\lim f(z_n) = f(z_0)$ ise *f* fonksiyonuna z_0 noktasında *dizisel süreklidir* denir. $\mathbb{C}$ de dizisel süreklilik ile süreklilik bir birini gerektirir.

1.7 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $z \in A$ için $|z| \leq M < \infty$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa *A* kümesine *sınırlıdır* denir. A kümesinde alınan her dizinin yığılma noktası yine *A* kümesine aitse *A* kümesine *kompakt* veya *dizisel kompakt* denir.

1.8 Teorem. $A \subset \mathbb{C}$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır (Palka 1991).

1.9 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme, U ve V $\mathbb{C}$ de ayrık açık iki küme olsun. Eğer $A \cap U \neq \phi$, $A \cap V \neq \phi$ ve $A \subset U \cup V$ ise A kümesine *bağlantısızdır* denir. Bağlantısız olmayan kümeye *bağlantılıdır* denir. Açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* adı verilir.

1.10 Tanım. $[a, b]$ kapalı aralığının $z = \varphi(t)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine $\mathbb{C}$ de bir *yol* veya *eğri* denir. Her $t \in [a,b]$ için $\varphi'(t)$ mevcut ve $\varphi'(t) \neq 0$ ise eğriye *düzgün eğri*, $[a,b]$ aralığının sonlu sayıda alt aralıklarında düzgün olan eğriye *parçalı düzgün eğri* adı verilir. Kendi kendini kesmeyen eğriye *basit eğri,* uç noktaları bitişik bir eğriye *kapalı eğri* ve sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. Jordan eğrisinin sınırladığı bölgeye *Jordan bölgesi* adı verilir.

1.11 Tanım. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde her basit kapalı eğri sadece B kümesinin noktalarını bulunduruyorsa, başka bir deyişle B da alınan her kapalı eğri içinde bölgeye ait herhangi bir noktaya büzülebiliyorsa bölgeye *basit bağlantılı bölge* denir.

1.12 Tanım. f bir B bölgesinde kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in B$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *differansiyellenebilir* veya *türevlenebilir* denir. Limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* adı verilir ve $f'(z_0)$ biçiminde gösterilir. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğunda ki bütün noktalarda differansiyellenebiliyorsa f fonksiyonuna z_0 da *analitik* denir.

1.13 Tanım. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere, B bölgesinden $f(B)$ üzerine bire bir olan f fonksiyonuna B de *yalınkat* (*univalent*) *fonksiyon* denir. Buna göre B de yalınkat bir f fonksiyonu $z_1, z_2 \in B$ olmak üzere, $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiren bir fonksiyondur. Geometrik olarak, $f(B)$ görüntü bölgesinin katlı bölge olmaması demektir. Eğer f fonksiyonu B bölgesinin bir z_0 noktasının belli bir komşuluğunda yalınkat ise bu takdirde f fonksiyonuna z_0 noktasında *yerel* (*lokal*) *yalınkat fonksiyon* denir.

1.14 Teorem. f fonksiyonu bir B bölgesinde analitik olsun. Eğer $z_0 \in B$ için $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonunun yalınkat olduğu z_0 noktasının bir $D(z_0, r) \subset B$ komşuluğu vardır (Palka 1991).

1.15 Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ ve $f \in C^1(D)$ olsun. $z_0 \in D$ olmak üzere

$$J_f(z_0) = \begin{vmatrix} u_x(z_0) & v_x(z_0) \\ u_y(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} = u_x(z_0)\, v_y(z_0) - u_y(z_0)\, v_x(z_0)$$

sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasında *Jakobiyeni* denir.

1.16 Teorem. Bir $f = u + iv$ fonksiyonunun basit bağlantılı bir D bölgesindeki Jakobiyeni $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$ dir.

İspat. $f = u + iv$ olmak üzere

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$$

ve

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

olur. Buradan

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = u_x v_y - u_y v_x = J_f$$

elde edilir. ■

1.16 Teoreminden f fonksiyonunun analitik olması durumunda $J_f(z) = |f'(z)|^2$ olduğu görülür.

1.17 Tanım. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : B \to \mathbb{C}$ yalınkat bir fonksiyon ve $f \in C^1(B)$ olsun. Her $z \in B$ için $J_f(z) \neq 0$ ise f fonksiyonuna B de bir *diffeomorfizm* denir. Eğer $f : B \to \mathbb{C}$ bir diffeomorfizm ve $J_f(z) > 0$ ise f fonksiyonuna B de *yön koruyan*, $J_f(z) < 0$ ise f ye *yönü ters çeviren* adı verilir.

$J_{\bar{f}} = -J_f$ olduğundan f yön koruyan ise $\bar{f}$ eşlenik fonksiyonu yönü ters çevirendir.

1.18 Tanım. $z,\ w \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere $\theta(z,w) = \mathrm{Arg}(w/z)$ değerine z den w ye *yönlendirilmiş açı* denir. $\theta(z,w)$, z ile w arasındaki en küçük açının ölçüsünü olup bu değer $(-\pi, \pi]$ aralığındadır. Eğer açının yönü saat yönünün tersi ise $\theta(z,w) > 0$, saat yönünde ise $\theta(z,w) < 0$ dır. Buna göre $\theta(z,w) = \pi$ durumu hariç $\theta(z,w) = -\theta(w,z)$ ve $\theta(\bar{z},\bar{w}) = -\theta(z,w)$ olduğu açıktır.

1.19 Tanım. $B \subset \mathbb{C}$ de bir bölge ve $f : B \to \mathbb{C}$ bir diffeomorfizm olsun. B de z_0 köşe noktasına sahip eğrisel bir açının kenarları α ve β olmak üzere

$$|\theta(\alpha,\beta)| = |\theta(f(\alpha), f(\beta)|$$

ise f fonksiyonuna $z_0 \in B$ noktasında *açı koruyan* denir. Eğer z_0 noktasında $J_f(z_0) > 0$ ve $\theta(\alpha,\beta) = \theta[f(\alpha), f(\beta)]$ ise f fonksiyonuna $z_0 \in B$ noktasında *konform,* $J_f(z_0) < 0$ ve $\theta(\alpha,\beta) = \theta[f(\beta), f(\alpha)]$ ise f fonksiyonuna $z_0 \in B$ noktasında *ters konform* denir. Kısaca; açı ölçüsünü ve yönünü koruyan bir diffeomorfizme konform dönüşüm, açı ölçüsünü koruyan fakat yönünü ters çeviren diffeomorfizme de ters konform dönüşüm adı verilir. Eğer her $z \in B$ noktası için *f* konform ise *f* ye *B* de *konform dönüşüm* denir.

Örneğin; $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, dönüşümü $\mathbb{C}$ den $\mathbb{C}$ ye bir konform dönüşüm iken $f(z) = \bar{z}$ dönüşümü $\mathbb{C}$ de bir ters konform dönüşümdür.

1.20 Teorem. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : B \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun B de konform olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun B de analitik ve yalınkat olmasıdır (Palka 1991).

1.21 Uyarı. Bazı yazarlar konform dönüşüm tanımını, $f : B \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu ve her $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ bağıntısıyla verirler. Ancak $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ fonksiyonu için $f'(z) \neq 0$ olmasına rağmen yalınkatlık yoktur. Bu çalışmada her $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ şartı sağlayan f fonksiyonu D de *yerel konform* olarak adlandırılacak. Gerçekten 1.14 Teoremi gereği $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonunun z_0 noktasının bir komşuluğunda analitik ünivalent olduğu biliniyor. Bu durumda f fonksiyonunun bu komşuluğa kısıtlanışı konform olur.

Yalınkat fonksiyon teorisinin en önemli sonuçlarından biri de Riemann dönüşüm teoremidir.

1.22 Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). B, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin basit bağlantılı bir öz alt bölgesi olsun. B bölgesini $\mathbb{D}$ birim dairesi üzerine bire bir ve analitik (konform) olarak resmeden $z_0 \in B$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde bir tek f fonksiyonu vardır (Palka 1991).

Riemann dönüşüm teoremi gereği basit bağlantılı bir bölgede yalınkatlıkla ilgili bir çok problemi çözmek için bu bölge yerine $\mathbb{D}$ birim dairesini almak uygundur. O halde bundan böyle çalışmalarımızı birim daire üzerinde yoğunlaştıracağız.

Eğer B bir Jordon bölgesi ise Riemann dönüşüm teoremi sürekli olarak B bölgesinin sınırına genişletilebilir ve genişletilmiş fonksiyon sınır eğrisini bire bir olarak birim çember üzerine dönüştürür. Caratheodary ye ait olan bu sonucu aşağıdaki teoremde ifade edebiliriz.

1.23 Teorem (Caratheodary Genişleme Teoremi)**.** B bir γ Jordon eğrisi ile sınırlanmış bir bölge ve f B bölgesini $\mathbb{D}$ birim dairesi üzerine konform olarak döndürsün. Bu takdirde f fonksiyonu $\overline{B}$ bölgesinden $\overline{\mathbb{D}}$ üzerine bir homomorfizme genişletilebilir.

1.24 Teorem (Schwarz Lemma). f fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim dairesinde $f(0)=0$ ve $|f(z)|<1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\mathbb{D}$ dairesinde $|f'(0)|\le 1$ ve $|f(z)|\le|z|$ dir. Eşitlik $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.25 Teorem (Schwarz-Pick Lemma). $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve her $z\in\mathbb{D}$ için $|f(z)|<1$ ise bu takdirde

$$|f'(z)|\le\frac{|1-|f(z)||^2}{(1-|z|^2)}$$

dir.

1.26 Teorem (Helly Seçme Teoremi). (μ_n), $[a,b]$ aralığında $\mu_n(a)=0$ ve $\mu_n(b)=1$ özelliğinde azalmayan bir fonksiyon dizisi olsun. Bu takdirde $[a,b]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonuna yakınsayan (μ_n) dizisinin bir (μ_{n_k}) alt dizisi vardır. Üstelik $[a,b]$ aralığında sürekli her φ fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b\varphi(t)d\mu_{n_k}(t)=\int_a^b\varphi(t)d\mu(t)$$

dir (Duren 1983).

1.27 Teorem (Hurwitz Teoremi). (f_n), bir D bölgesinde sıfırı olmayan analitik fonksiyonların bir dizisi ve D bölgesinin kompakt alt kümelerinde $f_n\to f$ yakınsaması düzgün olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun D bölgesinde ya hiç sıfırı yoktur yada f özdeş olarak sıfırdır (Duren 1983).

2. REEL KISMI POZİTİF ANALİTİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde $\mathbb{D}$ birim dairesini herhangi bir yarı düzlem üzerine dönüştüren analitik fonksiyonlar üzerinde durulacak. Ancak keyfi bir yarı düzlem yerine sağ yarı düzlemi almak genelliği bozmayacağından, $\mathbb{D}$ dairesini sağ yarı düzlem üzerine resmeden analitik fonksiyonların sınıfı incelenecektir.

2.1. *P* Sınıfının Topolojisi ve Elementer Özellikleri

$G \subset \mathbb{C}$ açık bir küme olmak üzere G de tanımlı kompleks değerli analitik fonksiyonların kümesi $A(G)$ ile, G de tanımlı kompleks değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C(G)$ de gösterilsin. $A(G) \subset C(G)$ olduğu açıktır. $C(G)$ fonksiyon fonksiyon toplama ve çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Dolayısıyla $A(G)$ de alt vektör uzayı olur.

$$d : C(G) \times C(G) \to \mathbb{R},$$

$$d(f,g) = \sup_{z \in G} |f(z) - g(z)| \tag{1.1}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonu iyi tanımlı olması durumunda başka bir deyişle G üzerinde bu supremumun olması halinde bir metrik olup $(C(G), d)$ bir metrik uzay ve $(A(G), d)$ de alt metrik uzay olur. Ancak (1.1) de verilen supremum her bir $G \subset \mathbb{C}$ açık alt kümesi için mevcut olmayabilir. O halde bütün bu kümeler için de geçerli olacak bir metrik tanımlamamız gerekir.

$G \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $\{K_n\}$, $K_n \subset K_{n+1}$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G$ özelliğinde G kümesinin kompakt alt kümelerinin bir dizisi olsun.

$$K_n = \{z : |z| \leq n\} \cap \{z : d(z, \mathbb{C} - G) \geq \tfrac{1}{n}\}$$

bu özellikte kompakt kümelerin bir dizisini gösterir. Geometrik olarak $\{K_n\}$, kompakt kümelerle G kümesinin bir tükenişi demektir. Buna göre $K_n = \{z : |z| \leq \frac{n-1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim dairesinin bu özellikte bir tükenişini gösterir.

2.1.1 Tanım. $\{K_n\}$ kompakt kümelerinin bir dizisi $G \subset \mathbb{C}$ kümesinin bir tükenişini göstersin.

$$d : C(G) \times C(G) \to \mathbb{R},$$

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf\left(1, \sup_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|\right)$$

veya

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{z \in K_n} \frac{|f(z) - g(z)|}{1 + |f(z) - g(z)|}$$

yada $d_n(f,g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K_n\}$ olmak üzere

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}$$

fonksiyonları bir metrik olup $(C(G), d)$ dolayısıyla da $(A(G), d)$ metrik uzay olur. O halde $(C(G), d)$ uzayının topolojisi bu metriğin ürettiği topolojidir. Bu topolojiye *lokal düzgün yakınsaklık topolojisi* veya *kompakt kümenin düzgün yakınsaklık topolojisi* denir. Çalışmamızda kullanılan topoloji bu topolojidir.

2.1.2 Tanım. $\mathbb{D}$ de analitik, $f(0) = 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}\{f(z)\} > 0$ özelliğindeki

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

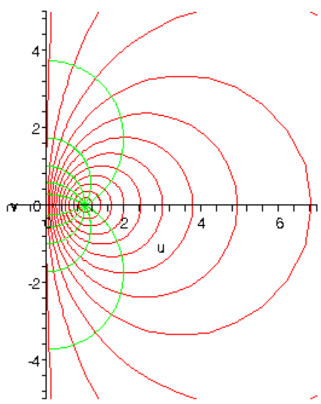
fonksiyonuna $\mathbb{D}$ de *reel kısmı pozitif fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir.

P sınıfındaki fonksiyonların yalınkat olması gerekmez. Örneğin $n \geq 2$ tamsayısı için $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen $\mathbb{D}$ de yalınkat değildir.

2.1.3 Örnek. $\mathbb{D}$ de analitik

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \cdots = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \tag{2.2}$$

fonksiyonu P sınıfına ait olup, $\mathbb{D}$ dairesini $\Omega = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$ üzerine bire bir ve analitik (konform) olarak resmeder. $p(z)$ fonksiyonu P sınıfındaki bu özellikteki tek fonksiyon değildir. Ancak bu fonksiyon P sınıfına ait fonksiyonlar içinde önemli bir yere sahiptir. Şekil 2.1 de $p(z)$ fonksiyonu altında birim dairenin resmi gösterilmiştir.



Şekil 2.1

Aşağıda P sınıfına ait fonksiyonların bazı önemli özellikleri verilecektir.

2.1.4 Teorem. f, f_1 ve f_2 P sınıfına ait fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ için $g(z) = f(e^{i\alpha} z)$,

(ii) $-1 \leq t \leq 1$ için $g(z) = [f(z)]^t$ veya $g(z) = f(tz)$,

(iii) $g(z) = 1/f(z)$,

(iv) $t_1, t_2 > 0$ ve $t_1 + t_2 \le 1$ için $g(z) = [f_1(z)]^{t_1}\,[f_2(z)]^{t_2}$,

(v) $f(\lambda) = a + ib,\ \lambda \in \mathbb{D}$ ise $g(z) = (1/a)[f(z + \lambda(1+\lambda z)) - bi]$,

(vi) $b \in \mathbb{R}$ için $g(z) = [f(z) + ibf(z)]$

eşitlikleri ile verilen $g(z)$ fonksiyonu da P sınıfına aittir.

İspat. Bir fikir vermesi açısından sadece (ii) ve (vi) nin ispatını verelim. Diğerlerinin ispatı benzer şekilde yapılır.

(ii) $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) \in P$ olduğundan $f(z) = re^{i\alpha}$ olacak şekilde $r > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, sayıları vardır. Böylece

$$\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re}[f(z)]^t = \operatorname{Re}(r^t e^{i\alpha t}) = r^t \cos(\alpha t)$$

bulunur. $-1 \le t \le 1$ için $t\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ve $r^t > 0$ olduğundan $\operatorname{Re} g(z) > 0$ elde edilir. Ayrıca $g(0) = 1$ olup, $g(z) \in P$ dir.

(vi) $b \in \mathbb{R}$ için $\varphi(w) = (w + ib)/(1 + ibw)$ dönüşümü Ω sağ yarı düzlemini yine kendisi üzerine konform olarak resmeder. $w = f(z)$ denirse $g(z) = \varphi(f(z))$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesini Ω içine resmeder. Üstelik $g(0) = \varphi(f(0)) = \varphi(1) = 1$ normalizasyonunu sağlar. O halde $g \in P$ dir. ■

2.1.5 Teorem. P sınıfı konvekstir.

İspat. $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olsun. $f_1, f_2 \in P$ ve $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere,

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \qquad (2.3)$$

fonksiyonu için $\operatorname{Re} f(z) > 0$ ve $f(0) = 1$ olduğundan $f \in P$ dir. Dolayısıyla P sınıfı konvekstir. ■

(2.3) ifadesi daha genel olarak sonlu toplama, daha sonrada her k için $\mu_k \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = 1$ olmak üzere,

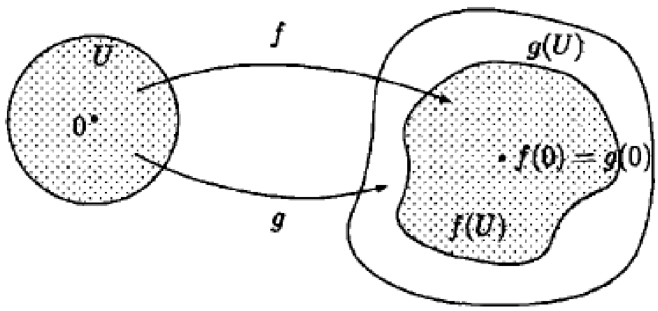
$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z) \tag{2.4}$$

şeklinde sonsuz toplama genişletilebilir.

2.2. Sabordinasyon Prensibi ve Domine Edilmiş Kuvvet Serileri

Bu kesimde sabordinasyon prensibi ve domine edilmiş kuvvet tanıtılacak. Bu kavramlarla ilgili özelliklerden faydalanarak P sınıfına ait fonksiyonlar ve türevlerinin modülü ile ilgili sınırlar verilecektir. Ayrıca P sınıfına ait fonksiyonların seri açılımındaki katsayılarıyla ilgili eşitsizlikler elde edilecektir.

2.2.1 Tanım. $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitik ve yalınkat olsun. $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ özelliğinde $\mathbb{D}$ de analitik $f(z)$ fonksiyonu mevcutsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna *sabordinedir* denir. Bu durum $f \prec g$ biçiminde gösterilir. f fonksiyonunun g fonksiyonuna sabordine oluşu Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2

Sabordine ile ilgili aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

2.2.2 Teorem. f ve g fonksiyonları $\mathbb{D}$ de analitik ve g, $\mathbb{D}$ de yalınkat olsun. $\mathbb{D}$ de $f \prec g$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = g(w(z))$$

olacak şekilde Schwarz Lemmasının şartlarını sağlayan bir $w(z)$ fonksiyonunun bulunmasıdır.

İspat. $f \prec g$ ve $g(\mathbb{D}) = B$ olsun. Bu takdirde g^{-1} ters fonksiyonu B de analitik $g^{-1}(B) = \mathbb{D}$ ve $g^{-1}(a_0) = 0$ dır. Böylece $w(z) = g^{-1}(f(z))$ bileşke fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesini kendi içine resmeden $w(0) = 0$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olup Schwarz Lemmasının şartlarını sağlar. Burada $f(z) = g(w(z))$ dir.

Tersine g, $\mathbb{D}$ de yalınkat ve $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde Schwarz Lemmasının şartlarını sağlayan $w(z)$ fonksiyonu mevcut olsun. Bu takdirde her $z \in \mathbb{D}$ için $|w(z)| \leq |z|$ ve $w(0) = 0$ dır. Buradan, $f(0) = g(w(0)) = g(0)$ ve $f(w(\mathbb{D})) \subset g(\mathbb{D})$ olur. Buradan $f \prec g$ elde edilir. ■

Dikkat edilirse $f \prec g$ ifadesinde $g(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır. Ancak 2.2.2 Teoremi referans alınarak sabordinasyon tanımı yalınkat olmayan fonksiyonlara da genişletilebilir.

2.2.3 Tanım. f ve g $\mathbb{D}$ de analitik iki fonksiyon olsun. Her $z \in \mathbb{D}$ için $w(0) = 0$, $f(z) = g(w(z))$ ve $|w(z)| < 1$ şartını sağlayan $\mathbb{D}$ de analitik bir $w(z)$ fonksiyonu mevcut ise f fonksiyonu g fonksiyonuna *sabordinedir* denir.

2.2.4 Teorem. $\mathbb{D}$ de $f \prec g$ olsun. Bu takdirde her bir $0 \leq r \leq 1$ için $f(D_r) \subset g(D_r)$ dir.

İspat. $f \prec g$ ise $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde Schwarz Lemmasının şartlarını sağlayan bir $w(z)$ analitik fonksiyonu vardır. Buradan $f(D_r) = g(w(D_r))$ dir. $w(D_r) \subset D_r$ olduğundan $f(D_r) = g(w(D_r)) \subset g(D_r)$ elde edilir. ■

2.2.5 Sonuç. $\mathbb{D}$ de $f \prec g$ ise $r \in (0,1)$ için

$$\max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|f'(z)| \le \max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|g'(z)|$$

dir.

İspat. $f \prec g$ olsun. $r \in (0,1)$ için

$$\max_{|z|\le r}|f(z)| \le \max_{|z|\le r}|g(z)|$$

olur. 1.25 Teoremi (Schwarz-Pick Lemması) gereği

$$\max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|f'(z)| \le \max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|g'(z)|$$

elde edilir.

2.2.6. Teorem. $f \in P$ olması için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbb{D}$ için

$$f(z) \prec \frac{1+z}{1-z} = p(z)$$

olmasıdır.

İspat. $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ olmak üzere $f \prec p$ ise

$$f(z) = p(w(z)) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

olacak şekilde Schwarz Lemmasının şartlarını sağlayan $\mathbb{D}$ de analitik bir $w(z)$ fonksiyonu vardır. O halde $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{\mathrm{Re}[(1+w(z))(1-\overline{w(z)})]}{|1-w(z)|^2} = \frac{1-|w(z)|^2}{|1-w(z)|^2} > 0,$$

$f(0)=1$ ve $f(z)$ $\mathbb{D}$ da analitik olduğundan $f \in P$ elde edilir.

Tersine, $f \in P$ olsun. $p(0)=f(0)=1$, $f(\mathbb{D}) \subset \Omega = p(\mathbb{D})$ ve p fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğundan $f \prec p$ dir. ■

2.2.7 Teorem. f, $\mathbb{D}$ de analitik olsun. $\mathrm{Re}\, f(z) \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, d\mu(t) + i\,\mathrm{Im}\, f(0) \tag{2.5}$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ aralığı üzerinde tanımlı $\mu(2\pi)-\mu(0)=\mathrm{Re}\, f(0)=1$ özelliğinde azalmayan bir μ fonksiyonu vardır.

İspat. Önce f fonksiyonunun (2.5) bağıntısını sağladığını kabul edelim. μ, $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon ve integrali alınan fonksiyonun reel kısmı pozitif olduğundan

$$\mathrm{Re}\, f(z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, d\mu(t) \geq 0$$

elde edilir.

Tersine, $\mathbb{D}$ de $\mathrm{Re}\, f(z) \geq 0$ olsun. $\mathrm{Re}\, f(z) > 0$ almak genelliği bozmayacaktır. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ olmak üzere $b_n = \mathrm{Re}\, a_n$ ve $c_n = \mathrm{Im}\, a_n$ olsun. $0<r<1$ ve $0 \leq t \leq 2\pi$ olmak üzere

$$\mu(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{Re}\, f(re^{i\theta})\, d\theta$$

biçiminde tanımlanırsa $\mu(r,.)$, $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan ve $\mu(r,2\pi)=b_0$ özelliğinde bir fonksiyondur. Üstelik basit bir hesaplamayla

$$\int_0^{2\pi} e^{-\text{int}} d\mu(r,t) = \begin{cases} a_n \dfrac{r^n}{2}, n = 1,2,... \\ b_0, \quad n = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür. Böylece

$$f(z) = \int_0^{2\pi} d\mu(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-\text{int}} d\mu(r,t)\, z^n + ic_0$$

olur. $|z| < r$ için integral içindeki seri düzgün yakınsak olduğundan bu fonksiyon

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-it} z}{r} \right)^n \right] d\mu(r,t) + i\, c_0$$

biçiminde yazabilir. Serinin toplamı dikkate alınırsa

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, d\mu(r,t) + i\, c_0 \tag{2.6}$$

olur.

Şimdi $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$ özelliğinde $(0,1)$ aralığında artan bir (ρ_n) dizini göz önüne alalım. $t \in [0,\ 2\pi]$ için $\mu_n(t) = \mu(\rho_n, t)$ olsun. Bu takdirde (μ_n), $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon dizisidir. 1.26 Teoremi (Helly Seçme Teoremi) gereği $k \to \infty$ iken $\mu_{n_k} \to \mu$ olacak şekilde (μ_n) dizisinin bir (μ_{n_k}) alt dizisi ve $[0, 2\pi]$ de azalmayan bir μ fonksiyonunu bulunbilir. Üstelik $[0, 2\pi]$ aralığında her bir sürekli h fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} h(t) d\mu_{n_k}(t) = \int_0^{2\pi} h(t) d\mu(t)$$

dir. O halde sabit z değeri ve $k \to \infty$ için

$$\frac{\rho_{n_k} e^{it} + z}{\rho_{n_k} e^{it} - z} \to \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

yakınsaması t ye göre düzgündür. Buradan

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_{n_k} e^{it} + z}{\rho_{n_k} e^{it} - z} \, d\mu_{n_k}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \, d\mu(t)$$

bulunur. Bu eşitlik ve (2.6) dan (2.5) bağıntısı elde edilir. ■

2.2.8 Tanım. $[0,2\pi]$ aralığında tanımlı $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ veya $\int_{|\eta|=1} d\mu(\eta) = 1$ özelliğinde azalmayan μ fonksiyonlarına $X = \{\eta : |\eta| = 1\}$ üzerinde bir *olasılık ölçümü* denir. X üzerindeki olasılık ölçümlerinin kümesi $\wp$ ile gösterilir.

P sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini veren ve Herglotz temsil teoremi olarak bilinen aşağıdaki sonuç, 2.2.7 Teoreminin doğrudan bir sonucudur.

2.2.9 Sonuç (Herglotz temsil teoremi)**.** f, $\mathbb{D}$ de analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 1$ olsun. Bu takdirde $f \in P$ olması için gerek ve yeter şart $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ ve $\mathbb{D}$ de

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \, d\mu(t) \tag{2.7}$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ aralığında tanımlı azalmayan bir μ fonksiyonu vardır.

Herglotz temsil teoremi, reel kısmı pozitif fonksiyonlar için büyüklük ve distorsiyon sonuçlarının elde edilmesinde oldukça kullanışlıdır.

2.2.10 Teorem. $f \in P$ ve $|z| = r < 1$ ise

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{1-r} \tag{2.8}$$

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq \frac{1+r}{1-r} \tag{2.9}$$

$$|f'(z)| \leq \frac{2\operatorname{Re} f(z)}{1-r^2} \leq \frac{2}{(1-r)^2} \tag{2.10}$$

dir. Eşitlik $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $p(e^{i\alpha} z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $f \in P$ olduğundan $|z| = r < 1$ için $f(z) \prec p(z)$ dir. O halde $f(z) = \dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}$ olacak şekilde Schwarz lemmasını sağlayan bir $w(z)$ fonksiyonu vardır. $z \in \mathbb{D}$ için $|w(z)| \leq |z|$ olduğundan

$$|f(z)| = \left|\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right| \leq \frac{1+|w(z)|}{1-|w(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} = \frac{1+r}{1-r} \tag{2.11}$$

elde edilir. 2.1.4 Teoremi gereği $f \in P$ iken $1/f \in P$ olduğundan (2.11) eşitsizliği $1/f$ fonksiyonu için de geçerlidir. O halde

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r} \quad \text{veya} \quad \frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)| \tag{2.12}$$

bulunur. (2.11) ve (2.12) birlikte düşünülürse (2.8) bağıntısı elde edilir.

(2.9) bağıntısı, (2.8) bağıntısından veya (2.7) bağıntısının her iki yanının reel kısmı alınarak elde edilir.

(2.10) bağıntısını göstermek için (2.7) bağıntısının z ye göre türevi alınırsa

$$| p'(z) | \leq \int_0^{2\pi} \frac{2d\mu(t)}{|1-ze^{-it}|^2} = \frac{2}{1-r^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\mu(t)$$

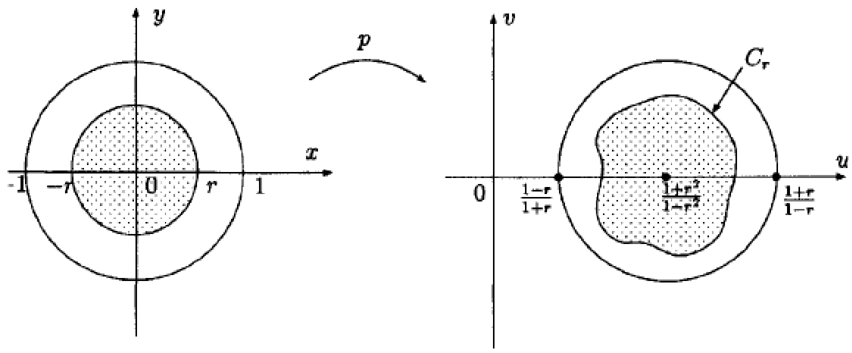
$$= 2\frac{\mathrm{Re}\, p(z)}{1-r^2} \leq \frac{2}{(1-r)^2}$$

elde edilir. ■

2.2.11 Uyarı. $f \in P$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ için (2.8) bağıntısının her iki tarafından $(1+r^2)/(1-r^2)$ çıkarılırsa

$$\left| f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2} \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.13) eşitsizliği, P sınıfına ait bir f fonksiyonunun $f(\mathbb{D})$ görüntü kümesinin, merkezi $(1+r^2)/(1-r^2)$ ve yarıçapı $2r/(1-r^2)$ olan kapalı bir daire içinde kaldığını gösterir. Bu durum Şekil 2.3 temsili olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.3

2.2.12 Tanım. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ serileri $D_R = \{z : |z| < R,\ R > 0\}$ dairesinde yakınsak olsunlar. Bu takdirde her $n \geq 0$ tamsayısı için $|a_n| \leq A_n$ ise $f(z)$ fonksiyonu $F(z)$ ile *domine edilmiştir* (*üstten sıkıştırılmıştır*) denir ve bu durum $f(z) << F(z)$ biçiminde gösterilir.

Domine edilmiş fonksiyonlarla ilgili bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir. Bu sonuçlar P sınıfına ait fonksiyonların katsayı eşitsizliklerini bulmada önemli rol oynar.

2.2.13 Teorem. $f(z) << F(z)$ ise bu takdirde,

(i) $n = 0,1,2,...$ için $A_n \geq 0$,

(ii) $0 \leq |z| = r < R$ için $|f(z)| \leq F(r)$,

(iii) $f'(z)| << F'(z)$,

(iv) $\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\zeta << \int_0^{2\pi} F(\zeta)\,d\zeta$

dir.

İspat. Bir fikir vermesi açısından sadece (iii) ü ispat edelim. Diğerlerinin ispatı benzer biçimde yapılır. $f(z) << F(z)$ olsun. Bu takdirde $z \in D_R$ için

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n \quad \text{ve} \quad F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}z^n$$

dir. Her $n \geq 0$ tamsayısı için, $|a_n| \leq A_n$ olduğundan $(n+1)|a_{n+1}| \leq (n+1)A_{n+1}$ olur. Böylece $f'(z) << F'(z)$ elde edilir. ■

2.2.14. Teorem. $f \in P$ olsun**.** Her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\left|f^n(z)\right| \leq \frac{2(n!)}{(1-r)^{n+1}}$$

dir. Eşitlik durumu $f(z) = p(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $f \in P$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) << p(z)$ dir. 2.2.13 Teorem (iii) gereği $f'(z) << p'(z)$ dir. Bu son bağıntıya aynı sonuç tekrar uygulanırsa $f''(z) << p''(z)$ ve nihayet $n = 1,2,...$ için $f^n(z) << p^n(z)$ olur. O halde $|z| = r < 1$ için

$$\left|f^n(z)\right| \le p^n(r) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\Bigg|_{z=r} = \frac{2(n!)}{(1-r)^{n+1}}$$

elde edilir. ■

2.2.15. Teorem. $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in P$ ise $n = 1, 2, ...$ için $|a_n| \le 2$ dir. Eşitlik $f(z) = p(e^{i\alpha} z)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. 2.2.14 Teoreminde $z = 0$ alınırsa, her $n \ge 1$ için $|f^n(0)| = n!|a_n| \le 2(n!)$ olur. Buradan $|a_n| \le 2$ elde edilir. ■

2.2.16 Sonuç. P sınıfı $A(\mathbb{D})$ analitik fonksiyonların kompakt bir altkümesidir.

İspat. Bunun için *P* sınıfının kapalı olduğunu göstermek gerekir. Bunun için $\mathbb{D}$ de lokal düzgün olarak $f_n \to f$ özelliğindeki *P* sınıfına ait her (f_n) dizisi için $f \in P$ olduğunu göstermek yetecektir. Hurwitz teoremi gereği f limit fonksiyonu $\mathbb{D}$ de ya sıfırı yoktur yada özdeş olarak sıfırdır. $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$ olduğundan $f \in P$ dir. ■

2.2.17 Teorem. *D* konveks bir bölge olsun. Belli bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı ve $z \in D$ için

$$\mathrm{Re}[e^{i\alpha} f'(z)] > 0$$

ise f fonksiyonu *D* bölgesinde yalınkattır.

İspat. z_1 ve z_2 D bölgesinde de farklı iki nokta olsun. f fonksiyonunun $\Gamma = \{z : z = z_1 + t(z_2 - z_1),\ 0 \le t \le 1\} \subset D$ doğru parçası boyunca integrali alınırsa

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{\Gamma} f'(z)\,dz = \int_0^1 f'(z)(z_2 - z_1)\,dt$$

$$= (z_2 - z_1)e^{-i\alpha} \int_0^1 e^{i\alpha} f'(z)\,dt$$

olur. Hipotez gereği bu son integral sıfır olamaz. Dolayısıyla $f(z_1) \neq f(z_2)$ olur. Bu durum f fonksiyonunun D de yalınkat olduğunu gösterir. ■

3. HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, reel ve sanal kısımları eşlenik olmak zorunda olmayan kompleks değerli harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı hakkında genel bilgiler verilecektir. Bu fonksiyonlar analitik olmadığından analitik yalınkat fonksiyonlarda olmayan bazı zorluklarla karşılaşmak kaçınılmaz olmaktadır. Konform dönüşümlerin bir genellemesi olan bu fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma James Clunie ve Terry Sheil-Small (1984) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada bazı geometrik özellikteki harmonik dönüşümler için oldukça güzel tahminler ortaya çıkarılmıştır. Bu çalışmadan faydalanarak bu alanda çalışan birçok matematikçi, bu sınıf ve alt sınıfları ile ilgili çok sayıda araştırma ortaya koymuş bulunmakta ve halen de konuyla ilgili çalışmalar devam etmektedir.

3.1. Kompleks Harmonik Fonksiyonlar

Önce reel ve kompleks harmonik fonksiyonu tanımlayalım. Bu kesimde verilen bilgilerin ayrıntıları (Duren 2004) kaynağında bulunabilir.

3.1.1 Tanım. Bir D bölgesinde tanımlı reel değerli $u(z)=u(x,y)$ fonksiyonu D de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve

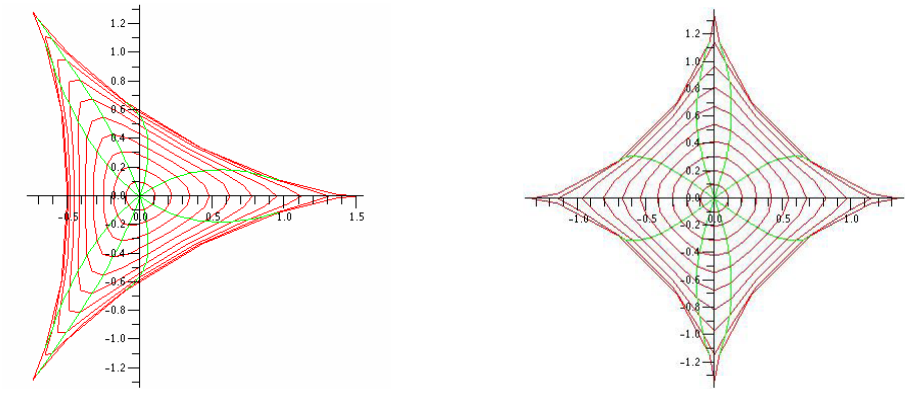
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna D de *reel harmonik fonksiyon* denir. Eğer $u(z)=u(x,y)$ ve $v(z)=v(x,y)$ fonksiyonları bir D bölgesinde reel harmonik ise $f(z)=u(z)+iv(z)$ fonksiyonuna D de *kompleks harmonik fonksiyon* denir. $f=u+iv$ kompleks harmonik fonksiyonun birebir olması durumunda da f fonksiyonuna D de *harmonik yalınkat fonksiyon* denir.

Tanıma göre, kompleks değerli harmonik yalınkat bir fonksiyon bir bölgeyi başka bir bölge üzerine bire bir ve harmonik olarak dönüştüren bir dönüşümdür. Bu fonksiyonlar analitik olmak zorunda olmadığından, analitik yalınkat fonksiyonlar için geçerli olan bazı özellikleri harmonik yalınkat fonksiyonlara taşımak mümkün değildir. Örneğin analitik fonksiyonlar bileşke altında korunmasına rağmen, harmonik fonksiyonlar korunmaz. Yani f harmonik, φ analitik fonksiyonu için $f \circ \varphi$ harmonik olmasına rağmen, $\varphi \circ f$ fonksiyonunun harmonik olması gerekmez. Analitik fonksiyonların sınıfı bir cebir oluşturmasına rağmen, harmonik fonksiyonların sınıfı oluşturmaz. Ayrıca bir harmonik yalınkat dönüşümün tersi de harmonik olmak zorunda değildir. Üstelik harmonik yalınkat dönüşümlerin sınır davranışları analitik yalınkat fonksiyonlardan çok daha karmaşıktır. Bununla birlikte, konform dönüşümlerin bilinen teorisi bir şekilde harmonik dönüşümlere taşımak mümkündür (Duren 2004).

Konform dönüşümlerde olduğu gibi düzlemde basit bağlantılı her hangi bir bölgede harmonik yalınkat dönüşümleri çalışmak yerine, birim dairede çalışmak genelliği bozmaz. Çünkü f, basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinden G bölgesi üzerine harmonik yalınkat bir dönüşüm ve φ de $\mathbb{D}$ birim diskini D bölgesi üzerine konform olarak resmeden bir dönüşümü ise $F = f \circ \varphi$, $\mathbb{D}$ diskini G üzerine resmeden harmonik yalınkat bir dönüşüm olur. Bu durumda esas dönüşüm ise $f = F \circ \varphi^{-1}$ biçimindedir.

En basit harmonik yalınkat dönüşüm örneği konform olması gerekmeyen $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$, $|\alpha| \neq |\beta|$ biçimindeki afin dönüşümlerdir. Bu dönüşümler $\mathbb{C}$ kompleks düzlemi kendisi üzerine harmonik olarak dönüştürürler. Bir afin dönüşüm ile bir harmonik yalınkat dönüşümün bileşkesi olan $\alpha f + \gamma + \beta \bar{f}$ dönüşümü yine bir harmonik yalınkat dönüşümdür. Diğer bir örnek; $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ dönüşümüdür. Bu dönüşüm $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ açık birim diskinde yalınkat ve harmonik olup, $\mathbb{D}$ diskini $|w| = \frac{3}{2}$ çemberi ile çevrelenmiş bir eğrisel üçgen içine resmeder (Şekil 3.1). Benzer şekilde $n \geq 2$ için $f(z) = z + \frac{1}{n}\bar{z}^n$ fonksiyonu da harmonik yalınkat olup, bu dönüşüm altında açık birim diskin görüntüsü, $|w| = (n+1)/n$ çemberi içinde kalan $n+1$ köşeli eğrisel bir çokgendir (Duren 2004).



a) $n = 2$ b) $n = 3$

Şekil 3.1

1.14 Teoremi gereği analitik bir f fonksiyonunun bir z noktasında yerel olarak yalınkat olması için gerek ve yeter şart $J_f(z) \neq 0$ olması gerektiği biliniyor. Lewy (1936) de bu sonucun harmonik yalınkat dönüşümler için de geçerli olduğunu gösterdi.

3.1.2 Teorem. Bir $f = u + iv$ harmonik fonksiyonunun yerel olarak yalınkat ve yön koruyan olması için gerek ve yeter şart

$$|f_{\bar{z}}(z)| < |f_z(z)|$$

olmasıdır (Lewy 1936).

3.2. Harmonik Yalınkat Fonksiyonların S_H Sınıfı

Bu kısımda yalınkat analitik fonksiyonların genellemesi olarak harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı ve bu sınıfa ait bazı önemli özelliklerden bahsedilecektir.

3.2.1 Tanım. h ve g fonksiyonları $\mathbb{D}$ birim dairesinde analitik olsun. $u = \operatorname{Re}(h+g)$ $v = \operatorname{Im}(h-g)$ olmak üzere $\mathbb{D}$ dairesinde harmonik bir $f = u + iv$ fonksiyonu $f = h + \overline{g}$ biçiminde yazılabilir. f fonksiyonunun bu yazılışına *standart gösterimi* denir ve bu yazılım tektir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

$\mathbb{D}$ dairesinde h ve g analitik fonksiyonlarının seri açılımları

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \qquad \text{ve} \qquad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$$

ise, $\mathbb{D}$ dairesinde yön koruyan harmonik yalınkat $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu için $|g'(z)|<|h'(z)|$ dir. Bu durum $h'(z)\neq 0$ olduğunu gösterir. Bu yüzden $h(0)=0$ ve $h'(0)=1$ almak genelliği bozmayacaktır. Böylece $\mathbb{D}$ dairesinde yön koruyan harmonik yalınkat $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n} \tag{3.1}$$

biçiminde gösterilebilir. Ayrıca F ve G fonksiyonları $\mathbb{D}$ de analitik olmak üzere $\operatorname{Re}F=\operatorname{Re}f=u$ ve $\operatorname{Re}G=\operatorname{Im}f=v$ ise $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu için

$$h=\frac{F+iG}{2} \text{ ve } g=\frac{F-iG}{2}$$

yazılabilir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

3.2.2 Tanım. (3.1) özelliğinde yön koruyan harmonik yalınkat dönüşümlerinin sınıfı S_H ile gösterilir. $g'(0)=0$ özelliğindeki $f=h+\overline{g}\in S_H$ fonksiyonların sınıfı S_H^0 ile gösterilir.

Eğer $f=h+\overline{g}\in S_H^0$ ise bu takdirde $g'(0)=0$ ve $|g'(z)/h'(z)|<1$ olup Schwarz lemması gereği $|g'(z)|\leq|z||h'(z)|$ olduğu açıktır. Buna göre $f\in S_H^0$ ise $\omega=\overline{f_{\bar{z}}}/f_z$ fonksiyonu için $|\omega(z)|\leq|z|$ olduğu görülür.

S_H sınıfına ait bir fonksiyon dizisinin limit fonksiyonu harmonik olmasına rağmen yalınkat olmak zorunda olmadığından S_H kompakt değildir. Gerçekten

$$f_n(z) = z + \frac{n}{n+1}\bar{z}$$

biçiminde tanımlanan $f_n \in S_H$ afin dönüşümlerin bir dizisini göz önüne alalım. $z = x + iy$ için $f_n(z) \to f(z) = 2x$ yakınsaması $\mathbb{D}$ dairesinde düzgündür ancak limit fonksiyonu yalınkat değildir.

Her bir $f \in S_H$ fonksiyonu için $|b_1| < |a_1| = 1$ olduğundan

$$\varphi(w) = \frac{w - \overline{b_1}\overline{w}}{1 - |b_1|^2} \tag{3.2}$$

fonksiyonu yön koruyan bir afin dönüşümdür. Böylece

$$f_0 = \varphi \circ f = \frac{f - \overline{b_1 f}}{1 - |b_1|^2} = h_0 + \overline{g}_0$$

fonksiyonu

$$h_0(0) = g_0(0) = 0\,,\quad h'(0) = 1 \quad \text{ve} \quad g'(0) = 0$$

özelliğinde yön koruyan harmonik yalınkat bir dönüşümdür. Bu yüzden $f_0 \in S_H$ fonksiyonu $g'(0) = 0$ özelliğinde olup $f_0 \in S_H^0$ dır.

Eğer $f \in S_H$ fonksiyonunu $f_0 \in S_H^0$ fonksiyonuna taşıyan $f \to f_0 = \varphi \circ f$ dönüşümünün tersi alınırsa $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ elde edilir. Böylece $|b_1| < 1$ özelliğindeki belli bir $g'(0) = b_1$ değeri için S_H sınıfı ile S_H^0 sınıfı arasında bire-bir bir bağıntı kurulmuş olur. Bu durum S_H sınıfında çözümü güç olan birçok problemin S_H^0 sınıfında çözümü yapılarak tekrar S_H sınıfına taşımasını sağlar.

Aşağıdaki Clunie ve Sheil-Small'a (1984) ait sonuçlar bununla ilgili olup ekstremal problemlerin çalışmasında önemli bir yere sahiptirler.

3.2.3 Teorem. S_H^0 sınıfı kompakttır. Üstelik $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için $|b_2| \leq \frac{1}{2}$ dir.

Henüz S_H^0 sınıfı dolayısıyla da S_H sınıfı için genel katsayı bağıntıları ispat edilememiştir. Ancak Clunie ve Sheil-Small (1984), $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için katsayı eşitsizliklerinin

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \quad |b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1) \tag{3.3}$$

ve

$$||a_n| - |b_n|| \leq n$$

olduğunu tahmin etmişlerdir. Bu tahminlerine

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \quad \text{ve} \quad g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

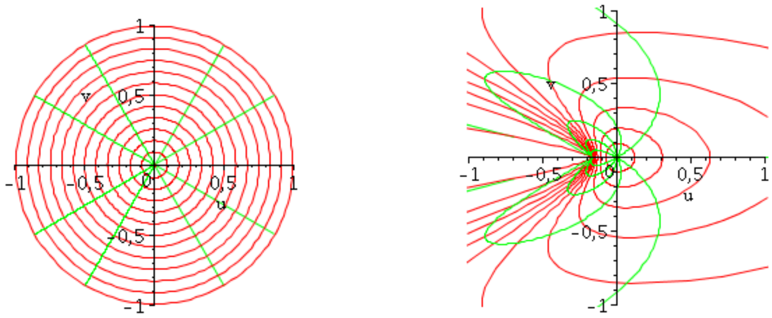
olmak üzere *harmonik Koebe fonksiyonu* $K = h + \overline{g}$ den hareketle ulaşmışlardır. Gerçekten (3.3) bağıntısı için eşitlik harmonik Koebe fonksiyonu için sağlanır. $k(z) = z/(1-z)^2$ analitik Koebe fonksiyonu için

$$K = h + \overline{g} = h - g + 2\operatorname{Re}\{g\} = k + 2\operatorname{Re}\{g\}$$

veya

$$K(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right\} + i\ \operatorname{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\} \tag{3.4}$$

olarak yazılabileceğinden $K \in S_H^0$ fonksiyonu birim daireyi reel eksenden $(-\infty, -\frac{1}{6}]$ çıkarılmış kompleks düzlem üzerine bire bir ve harmonik olarak resmeder (Şekil 3.2).



Şekil 3.2

$f_0 \in S_H^0$ ve $|b_1| < 1$ olmak üzere her bir $f = h + \overline{g} \in S_H$ fonksiyonu $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ biçiminde yazılabileceğinden (3.3) bağıntısı gereği $f \in S_H$ fonksiyonları için katsayı bağıntılarının

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2 + 1) \quad \text{ve} \quad |b_n| < \frac{1}{3}(2n^2 + 1) \tag{3.5}$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.3) ve (3.5) bağıntılarından S_H^0 da $|a_2| \leq \frac{5}{2}$, S_H da ise $|a_2| < 3$ tahminleri elde edilebilir.

4. REEL KISMI POZİTİF HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, birim daireyi sağ yarı düzlem içine ve üzerine dönüştüren, yalınkat olmak zorunda olmayan kompleks değerli harmonik fonksiyonların sınıfı ile bu sınıfın bazı alt sınıfları incelenecek. Bu fonksiyonlar analitik olmadığından, reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlar ile aralarındaki ilişkiler verilecek. Daha sonra birim daireyi sağ yarı düzlem üzerine dönüştüren harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı tanıtılıp, bu sınıfa ait fonksiyonların katsayı eşitsizlikleri ve distorsiyon teoremleri verilecektir.

4.1 Reel Kısmı Pozitif Harmonik Fonksiyonların Sınıfı

Bu kesimde $\mathbb{D}$ de reel kısmı pozitif harmonik fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon sınıfı ile P sınıfı arasındaki geçiş verilecek. Bu geçişten faydalanarak P sınıfı için bilinen bazı sonuçlar yeni sınıfa taşınacaktır.

4.1.1 Tanım. $\mathbb{D}$ de analitik

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{4.1}$$

fonksiyonları için $\operatorname{Re} f(z) > 0$ olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf P_H, P_H sınıfında reel katsayılı fonksiyonların alt sınıfı PR_H ile gösterilir. P_H sınıfında ki herhangi bir fonksiyona $\mathbb{D}$ de *reel kısmı pozitif harmonik fonksiyon*, PR_H sınıfındaki bir fonksiyona da *reel kısmı pozitif ve reel katsayılı harmonik fonksiyon* denir.

$\mathbb{D}$ de analitik $p(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} p(z) > 0$ şeklindeki fonksiyonların P sınıfı için $P \subset P_H$ olduğu açıktır. Aşağıdaki teorem P sınıfı ile P_H sınıfı arasındaki geçişi vermektedir.

4.1.2 Teorem. $f = h + \overline{g} \in P_H$ ise $p = h + g \in P$ dir. Tersine, h ve g $\mathbb{D}$ de analitik, $h(0) - 1 = g(0)$ ve $p = h + g \in P$ ise $f = h + \overline{g} \in P_H$ dır.

İspat. $f = h + \overline{g} \in P_H$ olsun. $p = h + g$ $\mathbb{D}$ de analitik $p(0) = 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Re} f(z) > 0$ olduğundan $h + g \in P$ dir.

Tersine, her $f \in P_H$ fonksiyonu

$$f = h + \overline{g} = \operatorname{Re}(h + g) + i \operatorname{Im}(h - g)$$

olarak yazılabileceğinden ve $\operatorname{Re}(h + g) > 0$ olduğundan, f $\mathbb{D}$ de harmonik ve $\operatorname{Re} f > 0$ dır. Böylece $f \in P_H$ elde edilir. ■

Aşağıdaki sonuçlar 4.1.2 Teoremi ve P sınıfının bilinen özelliklerinden elde edilir (Goodman 1983).

4.1.3 Sonuç. P_H konveks ve kompakttır.

İspat. P_H sınıfının kompakt olduğunu göstermek için P_H sınıfındaki her yakınsak dizinin limitinin yine P_H sınıfında olduğunu göstermek yetecektir [3, s. 44]. $f_n = h_n + \overline{g}_n \in P_H$ ve $f_n \to f = h + \overline{g}$ olsun. 4.1.2 Teoremi gereği $h_n + g_n \in P$ ve P kompakt olduğundan $h_n + g_n \to h + g \in P$ dir. Ayrıca her n için $h_n(0) - 1 = g_n(0) = 0$ normalizasyonunu sağladığından yakınsaklık gereği h ve g fonksiyonları da aynı normalizasyonu sağlar. 4.1.2 Teoreminden $f = h + \overline{g} \in P_H$ dır. O halde P_H kompakttır.

Benzer şekilde P_H sınıfının konveksliği, konvekslik tanımı ve P sınıfının konveks oluşundan elde edilir. ■

4.1.4 Sonuç. $f = h + \overline{g} \in P_H$ ise $z \in \mathbb{D}$ için

$$h(z) + g(z) = \int_{|\eta|=1} \frac{1 + \eta z}{1 - \eta z} \, d\mu(\eta)$$

olacak şekilde $X=\{\eta:|\eta|=1\}$ üzerinde bir tek μ olasılık ölçümü vardır (Goodman 1983).

4.1.5 Sonuç. $f=h+\overline{g}\in PR_H$ ise

$$h(z)+g(z)=\int_{|\eta|=1}\frac{1-z^2}{1-2z\operatorname{Re}\eta+z^2}d\mu(\eta)$$

olacak şekilde $X=\{\eta:|\eta|=1\}$ üzerinde bir tek μ olasılık ölçümü vardır.

İspat. $f\in PR_H$ olsun. $-1<z<1$ için $f(z)$ reel ve $f(z)$ fonksiyonunun bütün katsayıları reel olduğundan $f(z)=\overline{f(\overline{z})}$ veya

$$f(z)=\frac{1}{2}[f(z)+\overline{f(\overline{z})}]$$

şeklinde yazılabilir. Böylece 4.1.4 Sonucundan istenilen elde edilir. ■

4.1.6 Sonuç. D konveks bir bölge, $f=h+\overline{g}$ ve $f(z)=\overline{f(\overline{z})}=h'+\overline{g}'\in P_H$ ise $h+g$ yalınkattır.

İspat. $f(z)=\overline{f(\overline{z})}=h'+\overline{g'}\in P_H$ ise $h'+g'\in P$ olur. 2.2.17 Teoremi gereği $h+g$ analitik fonksiyonunun D de yalınkat olduğu görülür. ■

4.1.7 Sonuç. $f\in P_H$ ve $|z|=r<1$ ise

$$\frac{1-r}{1+r}\le\operatorname{Re}f(z)\le\frac{1+r}{1-r}$$

dir.

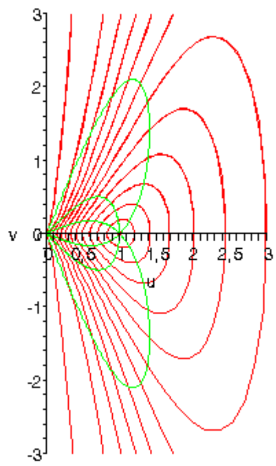
4.1.8 Sonuç. $f = h + \overline{g} \in P_H$ ve h, g fonksiyonları (4.1) biçiminde verilmiş olsun. Bu takdirde $n = 1,2,...$ için

$$\left| |a_n| - |b_n| \right| \leq 2$$

dir. Eşitlik, $z \in \mathbb{D}$ için

$$f(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + i\,\mathrm{Im}\left(\frac{1+3z}{1-z}\right)$$

fonksiyonu için geçerlidir. Şekil 4.1, $f(z) = \mathrm{Re}\big((1+z)/(1-z)\big) + i\ \mathrm{Im}\big((1+3z)/(1-z)\big)$ fonksiyonu altında birim dairenin görüntüsünü göstermektedir.



Şekil 4.1

4.1.9 Teorem. $f \in P_H$ ise $z \in \mathbb{D}$ için

$$F(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(\zeta)\,d\zeta$$

fonksiyonu da P_H sınıfına aittir. Burada integral $\mathbb{D}$ de 0 ile z noktalarını birleştiren doğru parçası boyuncadır.

İspat. $z \in \mathbb{D}$ ve $f = h + \overline{g} \in P_H$ olsun.

$$F(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(\zeta)d\zeta = \int_0^1 f(rz)dr = \int_0^1 h(rz)dr + \overline{\int_0^1 g(rz)dr}$$

$$= \frac{1}{z}\int_0^z h(\zeta)d\zeta + \overline{\frac{1}{z}\int_0^z g(\zeta)d\zeta} = H(z) + \overline{G(z)}$$

olur. Buradan

$$H(z) + G(z) = \frac{1}{z}\int_0^z [h(\zeta) + g(\zeta)]d\zeta$$

bulunur. $h + g \in P$ olduğundan $H + G \in P$ dir. 4.1.2 Teoremi gereği $F \in P_H$ dır. ■

4.1.10 Tanım. (4.1) ifadesi ile verilen $f = h + \overline{g} \in P_H$ fonksiyonunda $b_1 = 0$ özeliğindeki bütün f fonksiyonların oluşturduğu sınıf P_H^0 ile gösterilir. $P_H^0 \subset P_H$ olduğu açıktır.

S_H sınıfı ile S_H^0 sınıfı arasında verilen bağıntıya benzer bir bağıntı tanımdan faydalanarak P_H ile P_H^0 sınıfları arasında verilebilir.

4.1.11 Teorem. $f \in P_H$ ise $J_f(0) \neq 0$, f fonksiyonunun (4.1) ile belli a_1 ve b_1 katsayıları reel ise

$$f_0(z) = \frac{a_1 f(z) - b_1 \overline{f(z)}}{a_1 - b_1} \tag{4.2}$$

fonksiyonu P_H^0 sınıfına aittir. Tersine, eğer $f_0 \in P_H^0$ fonksiyonu (4.2) biçiminde bir fonksiyon ise

$$f(z) = \frac{a_1 f_0(z) - b_1 \overline{f_0(z)}}{a_1 + b_1} \tag{4.3}$$

fonksiyonu P_H sınıfına aittir (Jacobski 1993).

Aşağıdaki teorem P_H^0 sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizliklerini ifade eder.

4.1.12 Teorem. $f = h + \overline{g} \in P_H$ ve f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yön koruyan olsun. Bu takdirde, $|z| = r < 1$ ve $n = 1,2,...$ için

$$|h(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}, \qquad |g(z)| \leq \frac{r^2}{(1-r)^2}$$
$$|h^n(z)| \leq \frac{(n+1)!}{(1-r)^{n+2}}, \quad |g^n(z)| \leq \frac{n!(n+2r-1)}{(1-r)^{n+2}} \tag{4.4}$$

dir. Eşitlik $f(z) = (1-z)^{-2} - (\overline{z})^2 (1-\overline{z})^{-2}$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $p = h + g$ olmak üzere $z \in \mathbb{D}$ için 4.1.2 Teoremi gereği $p \in P$ dir. f fonksiyonu yön koruyan olduğundan, $J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0$ ve $|h'(z)| > |g'(z)|$ olur. Böylece $w(z) = g'(z)/h'(z)$ fonksiyonu Scwarz Lemmasının şartlarını sağlar ve

$$h(z) = \frac{p'(z)}{1+w(z)} \quad \text{ve} \quad g'(z) = w(z)h'(z)$$

bulunur. Buradan

$$h'(z) << \frac{1}{1-z}\frac{2}{(1-z)^2}, \quad h(z) << \frac{1}{(1-z)^2}$$

ve

$$g(z) << \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

bulunur. Böylece 2.2.13 Teoremi gereği (4.4) bağıntısı elde edilir. ■

4.1.12 Teoreminde $z = 0$ alınırsa aşağıdaki katsayı bağıntıları elde edilir.

4.1.13 Sonuç. $f \in P_H$ ve f fonksiyonu yön koruyan ise $n = 1,2,...$ için

$$|a_n| \leq n+1 \quad \text{ve} \quad |b_n| \leq n-1$$

dir.

4.1.14 Sonuç. $f = h + \overline{g} \in PR_H$ ve f fonksiyonu yön koruyan ise

$$|a_n| \leq \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,|\cos k\theta| \quad \text{ve} \quad |b_n| \leq \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\,|\cos k\theta|$$

dir.

İspat. $f \in PR_H$ ise her $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$h(z) + g(z) << \frac{1-z^2}{1-2z\cos\theta + z^2}$$

dir. Buradan

$$h'(z) << \frac{1}{1-z}\frac{d}{dz}\frac{1-z^2}{1-2z\cos\theta + z^2}$$

ve

$$g'(z) << zh'(z)$$

olur. Katsayı bağıntılarına geçilirse

$$|na_n| \leq 2\sum_{k=1}^{n} k\,|\cos k\theta| \quad \text{ve} \quad |nb_n| \leq 2\sum_{k=1}^{n-1} k\,|\cos k\theta|$$

bulunur. Buradan istenilen eşitsizlik elde edilir. ■

4.2 Reel Kısmı Pozitif Harmonik Fonksiyonların Alt Sınıfı

4.2.1 Tanım. $f = h + \overline{g} \in P_H$ olsun. $\alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1$ olmak üzere $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\{\alpha z(h'(z) + g'(z)) + h(z) + g(z)\} > \beta \tag{4.6}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların sınıfı $P_H(\beta,\alpha)$ ile gösterilir. Buna göre $P_H(\beta,\alpha) \subset P_H$ ve $P_H(0,0) = P_H$ dır. Negatif katsayılı $P_H(\beta,\alpha)$ sınıfının elamanlarının oluşturduğu alt sınıf $PR_H(\beta,\alpha)$ ile gösterilir.

Eğer $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2$ ise $P_H(\beta_2,\alpha) \subset P_H(\beta_1,\alpha)$ ve $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $P_H(\beta,\alpha_2) \subset P_H(\beta,\alpha_1)$ dır. Eğer $f = h + \overline{g} \in PR_H(\beta,\alpha)$ ise $n \geq 1$ için $a_n \geq 0$ ve $b_n \geq 0$ olmak üzere h ve g fonksiyonları $z \in \mathbb{D}$ için

$$h(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \ \text{ ve } \ g(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{4.7}$$

biçiminde verilir.

4.2.2 Teorem. $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu (4.1) bağıntısıyla verilmiş olsun. $\alpha \geq 0$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha n + 1}{1 - \beta}(|a_n| + |b_n|) \leq 1 \tag{4.8}$$

ise $f \in P_H(\beta,\alpha)$ dır.

İspat. $\mathrm{Re}\, w \geq 0 \Leftrightarrow |1 + w| \geq |1 - w|$ önermesi gereği, $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere $f \in P_H(\beta,\alpha)$ olduğunu göstermek için

$$|1-\beta+\alpha z(h'(z)+g'(z))+h(z)+g(z)|$$
$$-|1+\beta-\alpha z(h'(z)+g'(z))-h(z)-g(z)|>0 \tag{4.9}$$

olduğunu göstermek yetecektir. (4.1) bağıntısıyla verilen $h(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları (4.9) de yerine yazılır ve (4.8) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&|1-\beta+\alpha z(h'(z)+g'(z))+h(z)+g(z)| \\
&\quad -|1+\beta-\alpha z(h'(z)+g'(z))-h(z)-g(z)| \\
&\quad =\left|2-\beta+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha n+1)(a_n+b_n)z^n\right|-\left|\beta-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha n+1)(a_n+b_n)z^n\right| \\
&\quad \geq 2(1-\beta)-2\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha n+1)(|a_n|+|b_n|)|z|^n \\
&\quad \geq 2(1-\beta)\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha n+1}{1-\beta}(|a_n|+|b_n|)\right\}\geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem, 4.2.2 Teoreminin yeter şartının $f=h+\overline{g}\in PR_H(\beta,\alpha)$ fonksiyonları için geçerli olduğu gösterir.

4.2.3 Teorem. $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu (4.7) bağıntısıyla verilmiş olsun. O halde $f=h+\overline{g}\in PR_H(\beta,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha\geq 0$ ve $0\leq\beta<1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha n+1}{1-\beta}(|a_n|+|b_n|)\leq 1 \tag{4.10}$$

olmasıdır.

İspat. Teoremin yeter şartı 4.1.2 Teoreminde gösterildi. Şimdi gerek şartını gösterelim. $f=h+\overline{g}\in PR_H(\beta,\alpha)$ olsun. Bu takdirde $\alpha\geq 0$, $0\leq\beta<1$ ve $z\in\mathbb{D}$ için (4.6) bağıntısı gereği

$$\operatorname{Re}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha n+1)(a_n+b_n)z^n\right\}>\beta$$

bulunur. Eğer z reel seçilir ve $z\to 1^-$ iken limite geçilirse

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha n+1)(a_n+b_n)\geq\beta$$

veya denk bir ifadeyle

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha n+1)(a_n+b_n)\geq 1-\beta$$

elde edilir. Böylece (4.10) bağıntısı gösterilmiş olur. ■

4.2.4 Teorem. $f\in PR_H(\beta,\alpha)$ ise $|z|=r<1$ için

$$1+\frac{1-\beta}{1+\alpha}r\leq|f(z)|\leq 1+\frac{1-\beta}{1+\alpha}r \tag{4.11}$$

dir. Eşitlik

$$f(z)=1-\frac{1-\beta}{1+\alpha}z \text{ ve } f(z)=1-\frac{1-\beta}{1+\alpha}\bar{z}$$

fonksiyonları için geçerlidir.

İspat. $f\in PR_H(\beta,\alpha)$ olsun. f fonksiyonunun mutlak değeri alınırsa

$$|f(z)|\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)|z|^n\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r$$

$$\leq 1+\frac{1-\beta}{1+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha n+1}{1-\beta}(a_n+b_n)r\leq 1+\frac{1-\beta}{1+\alpha}r$$

ve

$$|f(z)| \geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)|z|^n \geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r$$

$$\geq 1-\frac{1-\beta}{1+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha n+1}{1-\beta}(a_n+b_n)r \geq 1-\frac{1-\beta}{1+\alpha}r$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki sonuç (4.11) ifadesindeki birinci eşitsizlikten elde edilir.

4.2.5 Sonuç. $f \in PR_H(\beta,\alpha)$ ise,

$$\left\{w:|w|<\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha}\right\} \subset f(\mathbb{D})$$

dir. Yani $PR_H(\beta,\alpha)$ sınıfına ait f fonksiyonları için $f(\mathbb{D})$ görüntü kümesi $|w|<(\alpha+\beta)/(1+\alpha)$ dairesini bulundurur.

4.3 Sağ Yarı Düzlem Üzerine Harmonik Yalınkat Dönüşümler

Konform dönüşümlerin aksine $\mathbb{D}$ birim dairesini belli normalizasyonlar altında $\Omega=\{w:\operatorname{Re}w>0\}$ sağ yarı düzlemi üzerine resmeden f harmonik yalınkat yön koruyan fonksiyonlar tek olmayıp bir sınıf oluştururlar. Bu kesimde oluşturulacak bu sınıfın uç noktalarını belirleyerek katsayı ve distorsiyon eşitsizlikleri verilecektir.

4.3.1 Tanım. $\mathbb{D}$ birim dairesini $\Omega=\{w:\operatorname{Re}w>0\}$ sağ yarı düzlemi üzerine resmeden

$$f(0)=1,\ f_{\bar{z}}(0)=0<f_z(0)$$

normalizasyonlarına sahip harmonik yalınkat yön koruyan $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarının sınıfı $S_H(\mathbb{D},\Omega)$ ile gösterilir. Burada h ve g fonksiyonları $\mathbb{D}$ de analitik ve

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

açılımlarına sahiptir. f yön koruyan olduğundan $w(z) = -g'(z)/h'(z)$ fonksiyonu $w(0) = 0$ normalizasyonunu ve $|w(z)| < 1$ eşitsizliğini sağlar.

$z \in \mathbb{D}$ ve $|\eta| = 1$ için

$$k(z,\eta) = \int_0^z \frac{1+\eta\zeta}{1-\eta\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{(1-\zeta)^2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{z}{(1-z)^2}, & \eta = 1 \\ \left[\dfrac{2\eta}{(\eta-1)^2} \log\left(\dfrac{1-z}{1-\eta z} \right) + \dfrac{1+\eta}{1-\eta} \dfrac{z}{1-z} \right], & \eta \neq 1 \end{cases}$$

çekirdek fonksiyonunu ve

$$\mathcal{F} = \left\{ f : f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z} \right) + i \operatorname{Im}\left[2 \int_{|\eta|=1} k(z,\eta) d\mu,\ \mu \in \wp \right] \right\}$$

tanımlayalım. Burada $\wp$, $X = \{\eta : |\eta| = 1\}$ üzerinde olasılık ölçümlerinin kümesidir.

4.3.2 Teorem. $S_H(\mathbb{D}, \Omega) \subset \mathcal{F}$ dir.

İspat. $f = h + \overline{g} \in S_H(\mathbb{D}, \Omega)$ olsun. $w(z) = -g'(z)/h'(z)$ Schwarz lemmasının hipotezini sağlar. Ω imarjiner eksen yönde konveks olduğu için Clunie ve Sheil-Small (1984) den $\varphi = h + g$, $\mathbb{D}$ den Ω üzerine konform bir dönüşümdür. φ fonksiyonu $\varphi(0) = h(0) = 1$ ve $\varphi'(0) = h'(0) > 0$ normalizasyonunu sağladığı için bu şekildeki konform dönüşümler Riemmann dönüşüm teoreminden dolayı tek olarak belirlenir. Bu yüzden

$$\varphi(z) = h(z) + g(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

dır. Buradan

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}\varphi(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

ve

$$h'(z) + g'(z) = \frac{2}{(1-z)^2}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$h'(z) - g'(z) = \left[h'(z) + g'(z)\right] \frac{h'(z) - g'(z)}{h'(z) + g'(z)}$$

$$= \frac{2}{(1-z)^2} \cdot \frac{1+w(z)}{1-w(z)} = \frac{2}{(1-z)^2}\ p(z)$$

olur. $p(z) = \int_{|\eta|=1} (1+\eta z)/(1-\eta z)\ d\mu$ olduğundan

$$v(z) = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im}\left[h(z) - g(z)\right] = 2\operatorname{Im}\left[\int_0^z \frac{p(\zeta)}{(1-\zeta)^2}\, d\zeta\right]$$

$$= 2\ \operatorname{Im}\left\{\int_{|\eta|=1} \left[\int_0^z \frac{1+\eta\zeta}{1-\eta\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{(1-\zeta)^2}\right] d\mu\right\}$$

$$= 2\operatorname{Im}\left[\int_{|\eta|=1} k(z,\eta)\, d\mu\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4.3.3 Teorem. $f \in \mathcal{F}$ ise f, $\mathbb{D}$ den Ω içine normalize edilmiş, yön koruyan, harmonik ve yalınkat bir fonksiyondur.

İspat

$$F(z)=\frac{1+z}{1-z} \quad \text{ve} \quad G(z)=-2i\int_0^z \frac{p(\zeta)}{(1-\zeta)^2}\,d\zeta$$

olmak üzere $f=h+\overline{g}=\operatorname{Re}F+i\operatorname{Re}G$ olur. $z\in\mathbb{D}$ için

$$\frac{g'(z)}{h'(z)}=\frac{[F'(z)-iG'(z)]}{[F'(z)+iG'(z)]}=\frac{1-p(z)}{1+p(z)}$$

olduğundan $|g'(z)|<|h'(z)|$ elde edilir. O halde f yerel olarak yalınkat ve $\mathbb{D}$ da yön koruyandır. Ayrıca

$$h(z)+g(z)=\frac{2z}{1-z}+1$$

reel eksen yönünde konvekstir. Clunie ve Sheil-Small (1984) gereği f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır. Üstelik her $f\in\mathcal{F}$ ve her $z\in\mathbb{D}$ için

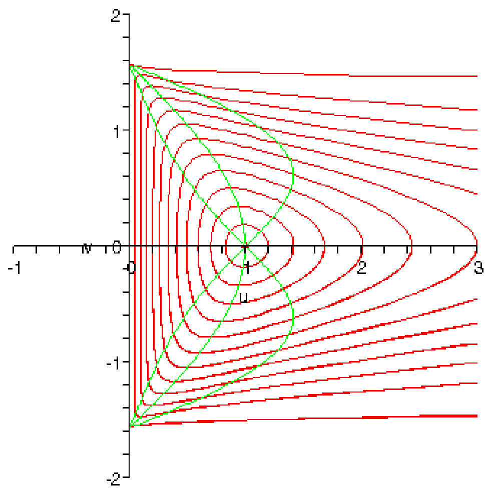
$$\operatorname{Re}f(z)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)>0$$

olduğundan $f(\mathbb{D})\subset\Omega$ olduğu görülür. ■

4.3.4 Uyarı. $S_H(\mathbb{D},\Omega)\neq\mathcal{F}$ dir. Örneğin, $\eta=-1$ için $\mathcal{F}$ sınıfına ait

$$f(z)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+i\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim dairesini $\{\,w:\operatorname{Re}w>0,\ |\operatorname{Im}w|<\pi/2\,\}$ yarı şeridi üzerine yalınkat olarak resmeder. Bu durum Şekil 4.2 de gösterilmiştir. Dolayısıyla $f\in\mathcal{F}-S_H(\mathbb{D},\Omega)$ dir. Böylece $\mathcal{F}$ sınıfına ait fonksiyonlar $\mathbb{D}$ birim dairesinden Ω sağ yarı düzlemi üzerine olmak zorunda değildir. Ancak $\mathcal{F}$ sınıfındaki fonksiyonlar $\mathbb{D}$ bölgesini Ω yarı düzleminin alt bölgelerine resmeder.



Şekil 4.2

4.3.5 Tanım. A kümesi $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer her $x, y \in A$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $[\lambda x + (1-\lambda)y] \in A$ ise A kümesine *konvekstir* denir. Eğer her $x, y \in A$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $z \neq \lambda x + (1-\lambda)y$ ise $z \in A$ noktasına A kümesinin bir *uç* (*ekstrem*) *nokta*sı denir. A kümesinin bütün uç noktalarının kümesi E_A ile gösterilir. Eğer A, topolojik vektör uzayın bir alt kümesi ise A kümesini kapsayan bütün kapalı konveks kümelerin en küçüğüne A kümesinin *kapalı konveks zarfı* denir ve $\overline{coA}$ ile gösterilir.

4.3.6 Teorem. $\mathcal{F} = \overline{S_H(\mathbb{D},\Omega)}$ ve $\overline{S_H(\mathbb{D},\Omega)}$ sınıfının uç noktalarının kümesi

$$f_\eta(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + 2i\,\mathrm{Im}\,k(z,\eta)$$

fonksiyonlarının kümesidir (Öztürk 1999).

Aşağıdaki teorem $S_H(\mathbb{D},\Omega)$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı eşitsizliklerini verir.

4.3.7 Teorem. $f = h + \overline{g} \in S_H(\mathbb{D}, \Omega)$ ve

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

olsun. Bu takdirde

$$|a_n| \leq n+1, \quad |b_n| \leq n-1$$

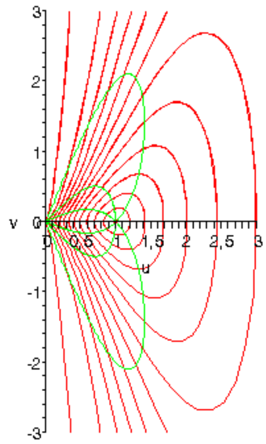
ve

$$||a_n| - |b_n|| \leq 2$$

dir. Eşitlik

$$f(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + 2i \ \mathrm{Im}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)$$

fonksiyonu için geçerlidir. Şekil 4.3 de $f(z) = \mathrm{Re}((1+z)/(1-z)) + 2i \ \mathrm{Im}\left(z/(1-z)^2\right)$ fonksiyonu altında birim dairenin görüntüsü verilmiştir.



Şekil 4.3

İspat. Bu eşitsizliği ispatlamak için sadece $\overline{S_H(\mathbb{D},\Omega)}$ sınıfının uç noktalarına bakmak yetecektir (Duren 1983).

$$f_\eta(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + 2i\,\mathrm{Im}\,k(z,\eta)$$

olmak üzere

$$F(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

ve

$$iG(z) = 2\left[\frac{2\eta}{(\eta-1)^2}\log\left(\frac{1-z}{1-\eta z}\right) + \frac{1+\eta}{1-\eta}\frac{z}{1-z}\right]$$

dir. Buradan

$$h(z) = \frac{1}{2}\left[F(z)+G(z)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+z}{1-z} + 2k(z,\eta)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ve

$$g(z) = \frac{1}{2}\left[F(z)-iG(z)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+z}{1-z} - 2k(z,\eta)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

olur. İlk eşitlikten $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{2\eta}{(1-\eta)^2}\frac{\eta^n - 1}{n} + \frac{1+\eta}{1-\eta} \\
&= \left[1 + \frac{1}{n(\eta-1)}\right]\left[2\sum_{k=2}^{n}\eta^k + (2+n)\eta - n\right] \\
&= \left[1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\eta^k\right] = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\eta^k\right]
\end{aligned}$$

ve

$$|a_n| \leq n+1$$

elde edilir. Benzer şekilde tüm $n \geq 2$ için

$$b_n = -\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\eta^k \quad \text{ve} \quad |b_n| \le n-1$$

elde edilir. Eşitlik $f(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + 2i\,\mathrm{Im}\,k(z,1)$ fonksiyonu için geçerlidir. ■

4.3.8 Teorem. $f = h + \overline{g} \in S_H(\mathbb{D},\Omega)$ ise

$$|f_z(z)| = |h'(z)| \le \frac{2}{(1-|z|)^3}$$

ve

$$|f_{\bar{z}}(z)| = |g'(z)| \le \frac{2|z|}{(1-|z|)^3}$$

dir. Eşitlik

$$f(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + 2i\,\mathrm{Im}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. Bu eşitsizlikleri göstermek için yine $f_\eta(z)$ uç noktalarından hareket etmeliyiz (Duren 1983). O halde

$$h(z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1+z}{1-z} + 2\left[\frac{2\eta}{(\eta-1)^2}\log\left(\frac{1-z}{1-\eta z}\right) + \frac{1+\eta}{1-\eta}\frac{z}{1-z}\right]\right\},$$

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{2\eta}{(1-\eta)(1-z)(1-\eta z)} + \frac{1+\eta}{(1-\eta)(1-z)^2} \\ &= \frac{2}{(1-\eta z)(1-z)^2} \end{aligned}$$

ve

$$|h'(z)| = \frac{2}{|1-\eta z||1-z|^2} \leq \frac{2}{(1-|z|)^3}$$

olur. Benzer şekilde

$$|g'(z)| = \left|\frac{2\eta z}{(1-\eta z)(1-z)^2}\right| \leq \frac{2|z|}{(1-|z|)^3}$$

elde edilir. ■

4.3.9 Teorem. $f = h + \overline{g} \in S_H(\mathbb{D}, \Omega)$ ve $D_r = \{z : |z| \leq r < 1\}$ olsun. $f(D_r)$ bölgesinin alanı A_r ise

$$A_r \leq 4\pi \frac{r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^3}$$

dir.

İspat. $f = u + iv$, $\partial D_r = C_r$ ve $f(C_r) = \Gamma_r$ olsun. Γ_r eğrisinin çevrelediği bölgenin alanı

$$A_r = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_r}(udv - vdu) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[u(\theta)\frac{dv}{d\theta} - v(\theta)\frac{du}{d\theta}\right]d\theta$$

dır (Goodman 1983). $u = \operatorname{Re}(h+g)$ ve $v = \operatorname{Im}(h-g)$ olduğundan

$$u(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[(a_n + b_n)e^{in\theta} + (\overline{a}_n + \overline{b}_n)e^{-in\theta}\right] \tag{4.12}$$

ve

$$v(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[(a_n - b_n)e^{in\theta} - (\overline{a}_n - \overline{b}_n)e^{-in\theta}\right]$$

olur. Bu değerler (4.12) de yerlerine yazılır ve her iki tarafın integrali alınırsa

$$A_r = 4\pi r^2 + \pi \sum_{n=2}^{\infty} n r^{2n} (|a_n|^2 - |b_n|^2)$$

bulunur. 4.3.7 Teoremi gereği

$$A_r \leq 4\pi \sum_{n=2}^{\infty} n^2 r^{2n} = 4\pi \frac{r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^3}$$

elde edilir. ■

KAYNAKLAR

Clunie, J., T. Sheil-Small. 1984. Harmonic Univalent Functions. Annales Acad. Sci. Fennicae. 9: 3-25.

Conway, J. B. 1973. Functions of One Complex Variable I. Springer-Verlag, New York, pp: 1-28

Duren, P. 1983. Univalent Fuctions. Springer-Verlag, New York, 383 pp.

Duren, P. 2004. Harmonic Mappings in the Plane. Cambridge University Press, New York, pp: 1-54.

Goodman, A. W. 1983. Univalent Fonksiyonlar I. Mariner Publishing Company, Inc. USA, 246 pp.

Jakubowski, Z. J. 1993. Harmonic Mappings with a Positive Real Part. Materialy XIV Konferencji Szkoleniowej Z Teorii Zagadnien Ekstremalnych. p. 17-23.

Lewy, H. 1936. On The Non-Vanishing of The Jacobian In Certain One-to-One Mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 42: 689-692.

Öztürk, M. 1999. Univalent Harmonic Mappings onto Half Planes. Turkish Journal of Mathematics. 23 (2): 301-313.

Palka, B. P. 1991. An Introduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag, New York, 560 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Aydın ÖZBEK
Doğum Yeri ve Tarihi	: İnegöl – 28.01.1986
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu	
Lise	: İnegöl Lisesi – 2003
Lisans	: Uludağ Üniversitesi – 2008
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2011

Form No: YL-05

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

TEZ ÇOĞALTMA VE ELEKTRONİK YAYIMLAMA İZİN FORMU

Yazar Adı Soyadı	Aydın ÖZBEK
Tez Adı	Reel Kısmı Pozitif Harmonik Fonksiyonlar
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Tez Türü	Yüksek Lisans
Tez Danışman(lar)ı	Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK
Çoğaltma (Fotokopi Çekim) izni	☒ Tezimden fotokopi çekilmesine izin veriyorum ☐ Tezimin sadece içindekiler, özet, kaynakça ve içeriğinin % 10 bölümünün fotokopi çekilmesine izin veriyorum ☐ Tezimden fotokopi çekilmesine izin vermiyorum
Yayımlama izni	☒ Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasına izin Veriyorum ☐ Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasının ertelenmesini istiyorum 1 yıl ☐ 2 yıl ☐ 3 yıl ☐ ☐ Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasına izin vermiyorum

Hazırlamış olduğum tezimin belirttiğim hususlar dikkate alınarak, fikri mülkiyet haklarım saklı kalmak üzere Uludağ Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı tarafından hizmete sunulmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Tarih :27/06/2011

İmza :