BERNSTEIN POLİNOMLARININ UYGULAMALARI

Elif ÇETİN

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERNSTEIN POLİNOMLARININ UYGULAMALARI

Elif ÇETİN

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2011

TEZ ONAYI

Elif ÇETİN tarafından hazırlanan "Bernstein Polinomlarının Uygulamaları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

Üye: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Doç. Dr. Basri ÇELİK
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Prof. Dr. Emin ÖZMUTLU
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

05/07/2011

Elif ÇETİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BERNSTEIN POLİNOMLARININ UYGULAMALARI

Elif ÇETİN

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

Bu çalışmada Bernstein polinomları tanımlanmış ve önceden verilmiş olan çeşitli özellikleri kullanılarak, Bernstein polinomları ile ilgili yeni sonuçlar bulunmuştur. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın diğer bölümlerine temel oluşturacak kavramlar ve teoremler verilmiştir. Ayrıca Gama ve Beta fonksiyonları tanımlanmış ve bu fonksiyonlarla ilgili temel özellikler verilmiştir. İkinci bölümde Bernstein polinomları tanımlanmış ve Bernstein polinomları ile ilgili temel özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde önce Bernstein polinomlarının belirli integralleri incelenmiş ve daha sonra Bernstein polinomlarının çarpımlarının belirli integrallerine yer verilmiştir. Ayrıca Bernstein polinomlarının Gama ve Beta fonksiyonlarıyla olan ilişkisi verilmiştir. Çalışmanın son bölümü olan dördüncü bölümde Bernstein polinomlarının türevleriyle ilgili temel bir sonuçtan yola çıkılarak, öncelikle Bernstein polinomlarının türevlerinin genellemesi verilmiştir. Daha sonra üçüncü bölümdeki Bernstein polinomlarının belirli integralleri ve Bernstein polinomlarının çarpımlarının belirli integrallerinden esinlenerek, Bernstein polinomlarının çarpımlarının türevleri ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bernstein Polinomları, Üreteç Fonksiyonu, Bernstein Operatörü Gama Fonksiyonu, Beta Fonksiyonu

2011, vi + 75 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

BERNSTEIN POLYNOMIAL'S APPLICATIONS

Elif ÇETİN

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

In this work, Bernstein polynomials are defined and from using the several properties of Bernstein polynomials which are given before, some new results about Bernstein polynomias are found. The thesis consists of four chapters. In the first chapter, the preliminary notions which are to be used in later chapters are given. Besides, Gamma and Beta functions are defined and some basic properties of these functions are given. In the second chapter, Bernstein polynomials are defined and the basic properties about Bernstein polynomials are given. In the third chapter, firstly the integral of the Bernstein polynomials are investigated and then, the integral of the multiplication of the Bernstein polynomials are given. Besides, Bernstein polynomials relations with Gamma and Beta functions are given. In the fourth chapter which is the last one, from a basic property of the derivative of Bernstein polynomials, firstly generalization of the derivative of Bernstein polynomials are given. After that, some new results are inspired from the third chapter, which is about the multiplication of the derivation of Bernstein polynomials.

Key words: Bernstein Polynomials, Generating Function, Bernstein Operator, Gamma Function, Beta Function

2011, vi + 75 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca yardımlarını hiçbir zaman eksik etmeyen, bana her zaman yol gösteren, destek veren, sabırla usanmadan zor anlarımda yanımda olan, Bernstein polinomları gibi son yılların popüler konularından birisini tez konum olarak belirleyen değerli hocam Prof. Dr. İsamail Naci CANGÜL'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca manevi desteğini, yardımlarını fazlasıyla gördüğüm ve kendisinden çok şey öğrendiğim Yard. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ'e, Araş. Gör. Aysun YURTTAŞ'a, Araş. Gör. İlker İnam'a ve arkadaşlarım Buse ÇAPA ile Serkan ARACI'ya ayrıca teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemdeki en büyük paya sahip olan, maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen, bana verdikleri sevgi ve güvenle birçok zorluğu aşmama yardımcı olan sevgili annem, babam ve abime sonsuz teşekkürler.

Tüm bunların yanı sıra yurt içi yüksek lisans burs programı ile maddi yönden beni destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Elif ÇETİN
05/07/2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler/Kısaltmalar	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$B_n(f;x)$	f fonksiyonunun n-inci Bernstein operatörü
$\mathbb{C}[a,b]$	$\{ f : f : [a,b] \to \mathbb{R}$ süreklidir $\}$
P_n	Derecesi n yi aşmayan polinomlar kümesi
$\sum_{j=0}^{n} a_j$	$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\prod_{i=0}^{n} a_i$	$a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
$B_{k,n}(x)$	n-inci dereceden Bernstein polinomu
$\Delta_h^{\;k} f(x)$	f fonksiyonunun h adımlı k-ıncı sonlu farkı
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$
$L(f;x)$	L lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$	$L_n(f;x)$ operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsaması

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

1.1 Ön Bilgiler

Polinomlar kolay tanımlandıkları, bilgisayar sistemlerinde hızlı hesaplandıkları ve çeşitli fonksiyonlarla temsil edilebildikleri için çok kullanışlı matematiksel araçlardır. Ayrıca polinomlar kolayca diferansiyellenebilir ve integrallenebilirdir. Bu nedenle polinomlarla işlem yapmak, yapılan çalışmalarda büyük kolaylıklar sağlamaktadır (Joy 2000).

Bu tezde, özellikle yaklaşım teorisi için bir dönüm noktası olan aynı zamanda analizin bir çok branşında (konveks ve nümerik analiz, monoton operatörler), sayılar teorisinde, çok boyutlu dağılımlarda, geometride, geometrik dizaynda, fizikte ve bilgisayar programlamada geniş araştırma alanlarına sahip olan *Bernsein polinomları* incelenecektir. Bernstein polinomları önemli uygulamalara sahiptir. Sade bir yapısı ve önemli özellikleri olduğundan Bernstein polinomlarının kullanımı oldukça yaygındır. Bernstein polinomları günümüzde en çok yaklaşım teorisi alanında uygulama bulmaktadır. Ancak bu tezde Bernstein polinomlarının yaklaşım teorisiyle olan ilişkisine, genel bir bilgi verilmek suretiyle kısaca değinilecektir. Bernstein polinomlarının yaklaşım teorisiyle olan ilişkisi, bu tezin temel amacını oluşturmamaktadır. Bu tezde asıl amaç, Bernstein polinomlarının temel özellikleri ile integral ve türevde var olan uygulamalarının incelenmesidir.

Bernstein polinomlarının tarihi, Ukraynalı matematikçi Sergei Natanovic Bernstein'e (1880-1968) dayanır. Bernstein'in yapmış olduğu çalışmalar yurtdışında, özellikle Fransa'da, büyük ilgi gördü. 1955'de Fransız Bilim Akademisi üyesi olarak seçildi (Steffens 2006). Bernstein'in yapmış olduğu en önemli çalışmalardan birisi, Weierstrass teoremine daha kullanışlı ve daha basit bir ispat yolu bulmuş olmasıdır. Weierstrass Teoremi uygulamalı matematikteki en önemli teoremlerden biridir. Çünkü polinomlar verilen her aralıkta sürekli olan, kolaylıkla türevi ve integrali alınabilen fonksiyonlardır. Dolayısıyla verilen bir aralıkta sürekli herhangi bir fonksiyonu polinom fonksiyona çevirmek, bu fonksiyonla yapılabilecek hesaplamalarda çok büyük kolaylıklar sağlar.

Kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona cebirsel polinomlarla yaklaşıldığında en iyi yaklaşan polinomun bulunması ve yaklaşım hızının hesaplanması yaklaşım teorisinde çalışılan önemli problemlerden biridir. 1885 yılında Karl Weierstrass tarafından kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşılabileceği gösterildikten sonra Bernstein bu teoremin daha basit bir ispatını bulmaya çalışmıştır. S. Bernstein, 1912 yılında Weierstrass teoreminin ispatını, kendi adını verdiği Bernstein Polinomları'nı kullanarak yapmıştır (Çiçek 2007).

Bernstein polinomlarının teorileri hakkında sistematik yaklaşımlar 90'lı yıllardan sonra yayınlanmaya başlanmıştır. Bu konuyla ilgili düzenli olarak makaleler yayınlanmakta ve her geçen gün yeni uygulamalar ve genellemeler keşfedilmektedir. Bu konudaki ilk ilerlemeyi Lupaş yapmıştır. 1987'de Bernstein polinomlarının q-anoloğunu geliştirmiştir ve polinomların yaklaşım özelliklerini araştırmıştır (Dikmen 2009).

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı olmak üzere,

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

biçiminde tanımlanan operatöre *n*. Bernstein operatörü denir. S. Bernstein, bu operatörlerle $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşılabileceğini ispatlamıştır.

Daha sonraki yıllarda da Bernstein operatörleri ve Bernstein polinomları üzerinde birçok matematikçi araştırma yapmıştır. Bu çalışmalar genellikle f fonksiyonuna $B_n(f;x)$ polinomuyla yaklaşım hızının bulunması üzerinedir. Son yıllarda Bernstein polinomlarının sayılar teorisi ile olan ilişkisine ilgi artmakta ve bu konuda önemli çalışmalar yapılmaktadır. Şimşek ve Açıkgöz (2010) Bernstein polinomları için üreteç fonksiyonu tanımlamışlar ve bu fonksiyon sayesinde Bernstein polinomlarının Bernoulli polinomları, Euler polinomları, Genocchi polinomları, Hermit polinomları ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile ilişkilerini bulmuşlardır (Açıkgöz ve Aracı 2010b).

Bu tezde, Bernstein polinomlarının temel özellikleri konusu üzerine daha önce yapılan birçok araştırma sonuçları incelenmiştir. Açıkgöz ve Aracı'nın (2010a) yapmış oldukları çalışmada Bernstein polinomlarının [0,1] aralığındaki belirli integrali ile ilgili temel özellikleri, Bernstein polinomlarının çarpımlarının [0,1] aralığındaki belirli integrali ile ilgili bazı özellikleri, Gama ve Beta fonksiyonu ile ilişkileri incelemişlerdir. Bu nedenele çalışmanın birinci bölümünde Gama ve Beta fonksiyonlarının bazı temel özellikleri verilecektir. Ayrıca Açıkgöz ve Aracı'nın (2010a) yapmış oldukları çalışmadan esinlenilerek Bernstein polinomlarının n. dereceden türevleri ve Bernstein polinomlarının çarpımlarının n. dereceden türevleri ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Sergei Natanovic Bernstein (1880-1968)

1.2 Temel Kavramlar

Bu kısımda çalışmada gerekli olacak temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu kısımdaki tanım ve teoremler lisans düzeyindeki kitaplarda bulunabilir.

1.2.1 Tanım. $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\delta > 0$ sayısı için $|x-a| < \delta$ koşulunu sağlayan noktaların kümesine a noktasının δ ***-komşuluğu (delinmiş*** δ ***-komşuluğu)*** denir.

1.2.2 Tanım. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri $A - \{a\}$ kümesine ait olan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için elde edilen $(f(x_n))$ görüntü dizisi bir L sayısına yakınsıyorsa bu L sayısına ***f fonksiyonunun a noktasındaki limiti*** denir ve $\lim_{x \to a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir.

1.2.3 Tanım. $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$ da A üzerinde tanımlı reel fonksiyonların kümesi olsun.

$$s : \mathbb{N} \to F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir ***fonksiyon dizisi*** adı verilir.

1.2.4 Tanım. (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna ***noktasal yakınsaktır*** $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$ dur.

1.2.5 Tanım. (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna ***düzgün yakınsaktır*** $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in A$ için $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$ dur.

1.2.6 Tanım. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $| x - a | < \delta$ olduğunda $| f(x) - f(a) | < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyor ise f fonksiyonuna ***a noktasında süreklidir*** denir ve bu durum genellikle $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ gösterimi ile belirtilir. Eğer f fonksiyonu bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonuna ***A üzerinde süreklidir*** denir.

1.2.7 Tanım. X boş olmayan herhangi bir küme ve F bir sayı cismi olsun. Eğer, her $x, y, z \in \mathrm{X}$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için,

$$t : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}, \quad \mathrm{t(x, y) = x + y}$$
$$ç : F \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}, \quad ç(\alpha, x) = \alpha x$$

biçiminde tanımlanan (sırasıyla toplama ve skaler ile çarpma denen) işlemler

T_1. $x+y=y+x$,

T_2. $x+(y+z)=(x+y)+z$,

T_3. $x+\theta=x$ olacak biçimde bir $\theta\in \mathrm{X}$ öğesi vardır (θ ya etkisiz öğe ya da sıfır vektörü denir).

T_4. $x+x'=\theta$ olacak biçimde bir $x'\in \mathrm{X}$ öğesi vardır. x' simgesi yerine genellikle $-x$ simgesi kullanılır ve $-x$ e ters öğe denir.

$Ç_1$. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

$Ç_2$. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

$Ç_3$. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$,

$Ç_4$. $1\cdot x=x$,

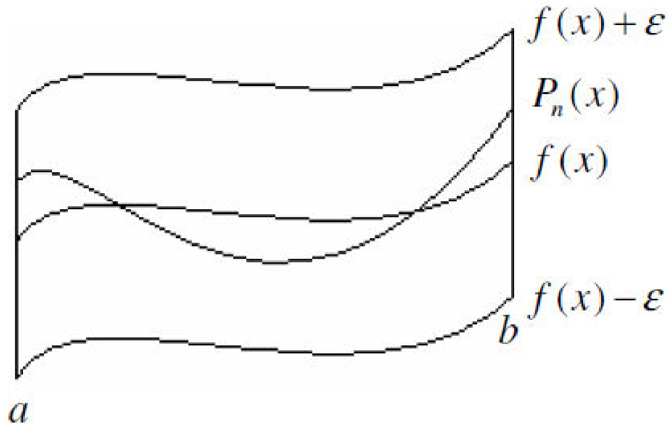
koşullarını gerçeklerse, (X,F) sıralı çifti bir ***vektör uzayı***dır (ya da X kümesine F üzerinde bir vektör uzayı) denir.

1.2.8 Tanım. Bir V vektör uzayının aşağıdaki şartları sağlayan S alt kümesine V nin bir ***baz***ı denir:

B_1. S lineer bağımsızdır.

B_2. Her $\alpha\in V$ için $\alpha\in S_p\{S\}$ dir. Yani α vektörü S deki vektörlerin bir lineer birleşimidir (Bu şarta germe aksiyomu denir. Eğer aksiyom geçerli ise S kümesi V yi geriyor denir).

1.2.9 Teorem (Weierstrass Yaklaşım Teoremi). f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon uzayında olmak üzere her $\varepsilon>0$ için $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$ olacak şekilde n. dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır. Yani her sürekli f fonksiyonuna karşılık gelen $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır.



Şekil 1.1.1. f fonksiyonunun ε komşuluğunda değerler alan bir polinom (Şahin 2008)

1.2.10 Tanım. X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun (Aynı zamanda lineer uzaylardır).

$$L : X \to Y$$
$$f \to L(f) = g$$

dönüşümüne ***operatör*** denir.

1.2.11 Tanım. f_1 ve f_2, X uzayında herhangi iki fonksiyon, a ve b keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü;

$$L(af_1 + bf_2; x) = aL(f_1; x) + bL(f_2; x)$$

koşulunu gerçekliyorsa L operatörüne ***lineer operatör*** denir.

1.2.12 Tanım. $X^+ = \{f \in X : f \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g \geq 0\}$ fonksiyon sınıfları verilsin. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa bu takdirde bu lineer operatöre ***lineer pozitif operatör*** denir. $f \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ dır. Özel olarak $L(0; x) = 0$ olduğu görülür.

1.2.13 Teorem (Bohmann-Korovkin). Eğer (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1$$
$$L_n(t;x) \rightrightarrows x$$
$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

koşullarını gerçekliyorsa bu takdirde $\mathbb{C}[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \qquad a \le x \le b$$

dir.

1.2.14 Tanım. $\forall k, j \ge 0$ için

$$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j) \text{ ve } \Delta^{k+1} f(x_j) = \Delta^k f(x_{j+1}) - \Delta^k f(x_j)$$

şeklinde tanımlanan Δ operatörüne ***ileri fark operatörü*** denir.

1.2.15 Tanım. f fonksiyonu $A \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı ve $M > 0$ olsun. $\forall x \in A$ için $|f(x)| \le M$ oluyorsa f fonksiyonuna A kümesi üzerinde ***sınırlı***dır denir.

1.2.16 Teorem. $f \in \mathbb{C}[a,b]$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlıdır.

1.2.17 Tanım. $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $A \subset \mathrm{X}$ olsun. $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in A$ için,

i) $f(x_1) < f(x_2)$ ise f ye A üzerinde ***artan***, $f(x_1) \le f(x_2)$ ise ***azalmayan***,

ii) $f(x_1) > f(x_2)$ ise f ye A üzerinde ***azalan***, $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise ***artmayan fonksiyon*** denir.

1.2.18 Tanım. Herhangi bir aralık üzerinde tanımlı fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise fonksiyona ***kesin monotondur***, artmayan veya azalmayansa ***monotondur*** denir.

1.2.19 Tanım. $i = 0,1,\cdots,n$ için $a_i \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) olmak üzere,

$$p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

şeklinde tanımlı fonksiyona ***n- dereceli polinom*** denir. Burada $a_i \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), $i = 0,1,\cdots,n$ ise p_n polinomuna ***reel katsayılı*** (kompleks katsayılı) ***polinom*** denir.

1.2.20 Tanım. Bir $f(x)$ fonksiyonu $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise, bu fonksiyona $[a,b]$ aralığı üzerinde ***negatif olmayan fonksiyon*** denir.

1.2.21 Tanım. Bir $f_i(x)$ fonksiyonlar kümesinin, x in tüm değerleri için toplamı bir oluyorsa bu fonksiyonlar kümesine ***birim parçalanış*** denir.

1.3 Gama ve Beta Fonksiyonları

Gama fonksiyonu ilk defa İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) tarafından, faktöriyel kavramını tam sayı olmayan değerlere genellemek amacıyla ortaya koyuldu. Sonraları, büyük öneminden dolayı, Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Christoph Gudermann (1798-1852), Joseph Liouville (1809-1882), Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Hermite (1822-1901), … ve diğer bir çok ünlü matematikçi tarafından da çalışıldı (Sebah ve Gourdon 2002).

Gama fonksiyonu, özel transandant fonksiyonlar kategorisine aittir ve bazı ünlü matematik sabitlerinin bu çalışmada ortaya çıktığı görülecektir. Gama fonksiyonu aynı zamanda asimtotik seriler, belirli integral, hipergeometrik seriler, Riemann Zeta fonksiyonu, sayılar teorisi, … gibi çeşitli alanlarda da görülmektedir (Sebah ve Gourdon 2002).

Gama fonksiyonu pozitif olmayan tamsayılar dışında tüm kompleks sayılar için tanımlanmış olmasına rağmen, sadece pozitif reel kısımlı kompleks sayılar için yakınsayan bir has olmayan integral aracılığı ile tanımlanabilir. Bu integral fonksiyonu, pozitif olmayan tam sayılar hariç tüm kompleks sayılara, analitik devam ile genelleştirilebilir (pozitif olmayan tam sayılarda fonksiyon basit kutuplara sahiptir). $\Gamma(x)$ notasyonu, 1809'da Legendre tarafından kullanılmıştır. Gauss ise bunu $\Pi(x)$ olarak göstermiştir.

Bu bölümdeki tanım ve teoremler Kaptanoğlu (1996) ile Sebah ve Gourdon (2002) gibi birçok kaynakta bulunabilir.

1.3.1 Tanım. Gama fonksiyonu, $0 < x < \infty$ değerleri için Euler integrali denilen

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

integrali ile tanımlanır. Önce bu ifadenin ne demek istediği üzerinde durulacaktır. $x-1$ bir gerçel sayı olduğundan, t^{x-1} ifadesi $e^{\ln t^{x-1}} = e^{(x-1)\ln t}$ şeklinde tanımlanır. Bunun için de t nin doğal logaritmanın tanım kümesinde, yani $t > 0$ olması gerekir. Yani aslında,

$$f(t) = t^{x-1} e^{-t}$$

fonksiyonu $t = 0$ da tanımsızdır. Fakat az sonra bunun öneminin olmadığı görülecektir. Ayrıca $t > 0$ iken $f(t) > 0$ dır ve $e^{-t} < 1$ gerçeklenir.

Hemen akla gelen ikinci soru bu integralin sonlu olup olmadığıdır. Çünkü iki sorun mevcut olabilir: Hem sonsuz uzunluktaki bir aralık üzerinde integral alınması, hem de $0 < x < 1$ iken $f(t)$ fonksiyonunun t sıfıra (sağdan) yaklaşırken sınırsız artması, yani

$$\lim_{t \to 0^+} t^{x-1} e^{-t} = \infty$$

olması. Gama fonksiyonunu tanımlayan integrali, f fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alan olarak yorumlarsak, bu iki nedenden dolayı integralin sonsuz çıkma olasılığı vardır. Ama x in pozitif bir sayı olarak alınması bütün bu sorunları ortadan kaldırıyor. Yukarıdaki integralle ne denilmek istendiği daha açık bir şekilde açıklamak için, ε ve μ pozitif sayılar olsun. Eğer limitler varsa,

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} t^{x-1} e^{-t} dt + \lim_{\mu \to \infty} \int_{1}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_{\varepsilon} + \lim_{\mu \to \infty} J_{\mu}\end{aligned}$$

demektir. Buradan $f(t)$ nin $t = 0$ da tanımlı olmasının gerekmediği hemen görülür. Aslında $x \geq 1$ iken, $f(t)$ fonksiyonu $(0,1]$ aralığında sürekli ve sınırlı olduğundan, ilk integralde limit almaya gerek kalmaz. Şimdi Γ nın tanımındaki limitlerin varlığını gösterelim.

$$I_{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^{1} t^{x-1} e^{-t} dt < \int_{\varepsilon}^{1} t^{x-1} dt = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^{x}}{x}$$

eşitsizliğinden, $x > 0$ iken I_{ε} integralinin, $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun, $\frac{1}{x}$ ile üstten sınırlı olduğu görülür. $\varepsilon \to 0^+$ iken, pozitif bir fonksiyonun gittikçe genişleyen bir aralıktaki integrali olduğu için I_{ε} artar. Üstten sınırlılık ve artanlık $x > 0$ durumunda,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_{\varepsilon}$$

limitinin varlığını gösterir. Bu hesaptan anlaşılması gereken, $0 < x < 1$ olsa bile, $t \to 0^+$ iken t^{x-1} in sınırsız arttığı, fakat yeteri kadar yavaş arttığı için, grafiğiyle x ekseni arasındaki alanın sonlu kalabildiğidir. J_μ integralinin limiti için şu sonuca ihtiyaç olacaktır:

1.3.2 Önerme. n negatif olmayan bir tam sayı ve $t > 0$ ise,

$$e^t > \frac{t^0}{0!} + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

sağlanır. Artık J_μ integrali hesaplanabilir. n bir pozitif tamsayı olsun. Önermeden $t > 0$ için,

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t} < \frac{n!}{t^n}$$

ve sonra da

$$t^{x-1}e^{-t} < \frac{n!}{t^{n+1-x}}$$

bulunur. Verilen bir $x > 0$ sayısı için, $n > x$ koşulunu sağlayan bir n pozitif tam sayısı seçilsin.

$$\begin{aligned} J_\mu = \int_1^\mu t^{x-1}e^{-t}dt < \int_1^\mu n!t^{x-n-1}dt &= \frac{n!}{x-n}(\mu^{x-n} - 1) \\ &= \frac{n!}{x-n}\mu^{x-n}(1 - \frac{1}{\mu^{x-n}}) \end{aligned}$$

eşitsizliği, J_μ integralinin, $\mu > 0$ ne olursa olsun, $\frac{n!}{x-n}$ ile üstten sınırlı olduğunu söyler. $\mu \to \infty$ iken J_μ aynı zamanda arttığından,

$$\lim_{\mu\to\infty} J_\mu$$

limiti vardır. Bu hesaptan da anlaşılması gereken, $t\to\infty$ olsa bile e^{-t} nin sıfıra iniş hızının t^{x-1} in sınırsız artış hızını, $t^{x-1}e^{-t}$ nin grafiği ile x ekseni arasındaki alanı sonlu yapacak kadar etkili bir biçimde bastırdığıdır.

Böylece $x>0$ için gama fonksiyonunun iyi tanımlanmış olduğu gösterilmiş oldu. Ayrıca gama fonksiyonu $x>0$ için analitiktir (ve daha genel olarak, reel kısmı pozitif olan tüm kompleks x sayıları için analitiktir).

$t>0$ için $f(t)$ fonksiyonu pozitif olduğundan, $x>0$ için, $\Gamma(x)$ in de pozitif olduğu bilinmektedir. $x=1$ için gama fonksiyonunun değerini hesaplamak kolaydır.

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu} e^{-t}\,dt\\ &= \lim_{\mu\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^{\mu}\\ &= \lim_{\mu\to\infty}\left[1-e^{-\mu}\right]\\ &= 1\end{aligned}$$

dir. Öte yandan $\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} t^x e^{-t}\,dt$ olur. Bu integrali $x>0$ için kısmi integral hesabı yoluyla hesaplamak için, $u=t^x$ ve $dv=e^{-t}dt$ denirse, $du=xt^{x-1}dt$ ve $v=-e^{-t}$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0^+\\ \mu\to\infty}}\int_0^{\mu} t^x e^{-t}\,dt\\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0^+\\ \mu\to\infty}}\left[-t^x e^{-t}\right]_{\varepsilon}^{\mu} + x\lim_{\substack{\varepsilon\to0^+\\ \mu\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{\mu} t^{x-1}e^{-t}\,dt\\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^x e^{-\varepsilon} - \lim_{\mu\to\infty}\mu^x e^{-\mu} + x\Gamma(x)\end{aligned}$$

olur. Birinci limit açıkça sıfırdır. İkinci limit de sıfırdır; bunu görmenin bir yolu x i sabit tutup μ yü değişken olarak düşünerek $\dfrac{\mu^x}{e^\mu}$ üzerinde L'Hospital kuralını uygulamaktır. Elde edilen

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliği gama fonksiyonunun *fonksiyonel denklemi*dir.

Şimdi x bir n pozitif tam sayısı olarak seçilir ve fonksiyonel denklem kendisinin sağ tarafındaki $\Gamma(n)$ ye uygulanırsa, $\Gamma(n+1) = n(n-1)\Gamma(n-1)$ bulunur; sonra bu işlem sağ tarafta $\Gamma(1) = 1$ çıkana kadar tekrarlanırsa,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

bulunur. Bu ise yalnızca doğal sayılarda tanımlı olan faktöriyel işleminin gama fonksiyonu aracılığıyla bütün pozitif gerçel sayılara genişletildiğini gösterir.

Peki, gama fonksiyonu pozitif olmayan sayılarda da tanımlı kılınabilir mi? Evet, hem de yukarıdaki yolla. Bir n pozitif tamsayısı alınır, fonksiyonel denklem $\Gamma(x+1)$ yerine $\Gamma(x+n)$ için kullanılır ve bu işlem sağ tarafta $\Gamma(x)$ kalana kadar tekrarlanırsa, her $x > 0$ için

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}$$

elde edilir. $-n < x < -n+1$ ise $0 < x+n < 1$ olur ve $\Gamma(x+n)$ tanımlıdır. O halde son denklem gama fonksiyonunu $-n < x < -n+1$ aralığında tanımlamak için kullanılabilir. Kala kala sıfır ve negatif tamsayılar kalır. Bunlar için yapılacak bir şey yoktur. Son denklemin sağ tarafı buralarda anlamsız ve gama fonksiyonu buralarda tanımsız kalır, çünkü x sıfıra veya negatif tamsayılara yaklaştığında bu denklem $|\Gamma(x)|$ in sınırsız arttığını söyler.

Aslında en başta gama fonksiyonunu yalnızca (0,1] aralığında tanımlamak yeterdi. $\Gamma(x+n)$ için yukarıda verilen denklem sayesinde, tanım aralığı $(n, n+1]$ tipindeki tüm aralıklara, yani bütün pozitif gerçel sayılara genişletilebilirdi.

1.3.3 Sonuç. Gama fonksiyonunun tanım kümesi T, sıfır ve negatif tamsayılar dışında kalan bütün gerçel sayılardır (Kompleks düzlemde analitik devamlılık için n negatif tam sayı olmamalıdır, pozitif tam sayı olmalıdır).

$x+n>0$ olmak üzere,

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

eşitliğinden görülüyor ki, $-n$ negatif tam sayılarında $\Gamma(x)$ basit kutba sahiptir. Ayrıca bu eşitlikten dolayı, gama fonksiyonu tüm kompleks düzlemde tanımlanabilir. Asıl ilginç olan, gama fonksiyonunun şimdiye kadar verilen üç temel özelliğinin kesin olarak belirlenmesidir. Ancak önce yardımcı bir tanım verilecektir.

1.3.4 Tanım. $A \subseteq R$ bir aralık ve $f: A \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $a, b \in A$ ve $0 \le t \le 1$ eşitsizliğini sağlayan her gerçel t sayısı için

$$f\big((1-t)a+tb\big) \le (1-t)f(a)+tf(b)$$

sağlanıyorsa, f fonksiyonuna *dış bükey* denir.

1.3.5 Teorem. g, tanım kümesi $(0,\infty)$ aralığını içeren pozitif değerli bir fonksiyon olsun. Eğer,

i. $g(1)=1$ ise

ii. $g(x+1)=xg(x)$ sağlanıyorsa ve

iii. $\ln g$ dış bükeyse,

o zaman g nin tanımlı olduğu her x için $g(x)=\Gamma(x)$ dir (Yukarıdaki üç özelliği sağlayan yalnızca bir fonksiyon vardır. O da gama fonksiyonudur).

1.3.6 Tanım (Euler, 1729 ve Gauss, 1811). $x>0$ olsun ve

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x) &= \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\ &= \frac{n^x}{x(1+\frac{x}{1})\cdots(1+\frac{x}{n})}\end{aligned}$$

tanımlansın. Bu takdirde,

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$$

elde edilir. Sonsuz bir çarpım kullanılan bu yaklaşım 1811'de Gauss'un gama fonksiyonu çalışmalarında da kullanılmıştır. Açıkça,

$$\begin{aligned}\Gamma_n(1) &= \frac{n!}{1(1+1)\cdots(1+n)} \\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x+1) &= \frac{n!n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)} \\ &= \frac{n}{x+n+1}x\Gamma_n(x)\end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\Gamma(1) = 1\,,$$
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

elde edilir. Sıradaki önerme $\Gamma(x)$ için farklı bir formül elde edilmesinde faydalı olacaktır.

1.3.7 Önerme.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right) = 0{,}5772156649\cdots$$

Bu limit γ ile gösterilir ve *Euler-Mascheroni sabiti* olarak adlandırılır.

Şimdi $\Gamma_n(x)$ i tanımlayan ifadede n^x yerine eşiti olan $e^{x\ln(n)}$ yazılsın. Sonra $n!$ ifadesi $\frac{1}{n!}$ olarak paydaya taşındıktan sonra, çarpanları sırayla $(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ nin paydası olacak biçimde dağıtılsın. Daha sonra da $\Gamma_n(x)$

$$1 = e^{-x}e^{\frac{-x}{2}}e^{x}e^{\frac{x}{2}}\cdots e^{-\frac{x}{n}}e^{\frac{x}{n}}$$

ile çarpılırsa

$$\Gamma_n(x) = \frac{e^{x\ln(n)}e^{-x}e^{\frac{-x}{2}}\cdots e^{\frac{-x}{n}}}{x\frac{x+1}{1}\frac{x+2}{2}\cdots\frac{x+n}{n}}e^{x}e^{\frac{x}{2}}\cdots e^{\frac{x}{n}}$$

elde edilir. Buradaki büyük kesrin payı tek bir üstel fonksiyonda birleştirilebilir. Ayrıca paydadaki $\frac{x+k}{k}$ kesirleri de $1+\frac{x}{k}$ şeklinde yazılabilir ve her biri $e^{\frac{x}{k}}$ ile düşünülebilir. O zaman $\Gamma_n(x)$ ifadesi

$$\frac{1}{x}\exp\left[x\left(\ln(n)-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right)\right]\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}$$

halini alır. Son verilen önerme sayesinde, $n\to\infty$ iken, yuvarlak parantez içindeki ifadenin limitinin $-\gamma$, sol tarafın limitinin ise T deki x ler için $\Gamma(x)$ olduğu bilinmektedir. O zaman her $x\in T$ için, $n\to\infty$ iken sağdaki çarpımın da limiti vardır; dolayısıyla

$$\Gamma(x)=e^{-\gamma x}\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{x+k}e^{\frac{x}{k}}$$

$$=e^{-\gamma x}\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k}{x+k}e^{\frac{x}{k}}$$

olur. Bu eşitlik *Weierstrass çarpım formülü* olarak bilinmektedir.

Bu çarpımdan görülüyor ki Euler sabiti, gama fonksiyonu ile derinden ilişkilidir ve kutupların pozitif olmayan tamsayılar olduğu açıktır. Weierstrass formülü, kompleks sayılarda da geçerlidir.

Bir başka Euler integrali de iki değişkenli bir fonksiyon tanımlar. Beta fonksiyonu, $x>0$ ve $y>0$ değerleri için

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

integrali ile tanımlanır. $0<x<1$ ve $0<y<1$ iken, bu integral de gama fonksiyonunu tanımlayan integral gibi limitlerle verilir, çünkü t^{x-1} den dolayı 0 a yaklaşırken, $(1-t)^{y-1}$ den dolayı da 1 e yaklaşırken sorunlar vardır. Bu sorunlar yine gama fonksiyonunda yapıldığı gibi aşılır.

İntegralin içindeki ifade pozitif olduğundan beta fonksiyonu da pozitif değerlidir. Bu tanım, reel kısımları pozitif olan x ve y kompleks sayıları için de geçerlidir ve Euler bu tanımı 1730'da vermiştir. 'Beta fonksiyonu' ismi ise ilk kez 1839'da Jacques Binet (1786-1856) tarafından kullanılmıştır ve kendisi konuya çeşitli katkılarda bulunmuştur.

1.3.8 Teorem. x ve y reel kısımları pozitif olan kompleks sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t.\cos^{2y-1} t dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2y-1} t.\cos^{2x-1} t dt \\ &= B(y,x) \end{aligned}$$

dir.

İspat $\Gamma(x) = 2\int_0^{\infty} t^{2x-1} e^{-t^2} dt$ integrali kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du \int_0^{\infty} v^{2y-1} e^{-v^2} dv \\ &= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} dudv \end{aligned}$$

$u = r\cos\theta$ ve $v = r\sin\theta$ polar değişkenleri kullanılarak,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta dr d\theta$$

$$= 2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta$$

$$= \Gamma(x+y)B(y,x)$$

elde edilir.

Şimdi beta fonksiyonu için de bir fonksiyonel denklem verilecektir. Beta fonksiyonunun tanımı kullanılarak,

$$B(x+1,y) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)}$$

$$= \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)}$$

$$= \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

bulunur. Buna, beta fonksiyonunun fonksiyonel denklemi denir.

2. BERNSTEIN POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

2.1 Bernstein Operatörü ve Özellikleri

2.1.1 Tanım. $f \in \mathbb{C}[a,b]$ fonksiyonu verilsin. $a \leq x \leq b$ için $n.$ dereceden Bernstein polinomları

$$B_n(f;x) = B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}(x)$$

olarak tanımlanır. $B_n(f)$ Bernstein operatörü olarak adlandırılır ve $k = 0,1,2,\cdots,n$ için

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}$$

dir. n ve k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & n \geq k \quad \text{ise} \\ 0 & n < k \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir. Bernstein operatörü, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunu $B_n f$ e resmeder. x noktasında hesaplanmış olan $B_n f$, $B_n f(x)$ veya $B_n(f;x)$ ile gösterilir. Böylece her f fonksiyonu için bir Bernstein polinomu dizisi vardır. Burada tüm $n \geq 1$ için $B_n(f;0) = f(0)$, $B_n(f;1) = f(1)$ ve $x \in [0,1]$ olmak üzere, derecesi 1 e eşit veya 1 den küçük olan $f(x)$ polinomu için $B_n(f;x) = f(x)$ olduğu kabul edilir. Bu nedenle denilebilir ki f için bir Bernstein polinomu $[a,b]$ kapalı aralığının uç noktalarında da tanımlı olur. Bernstein operatörünün lineer olduğu açıktır:

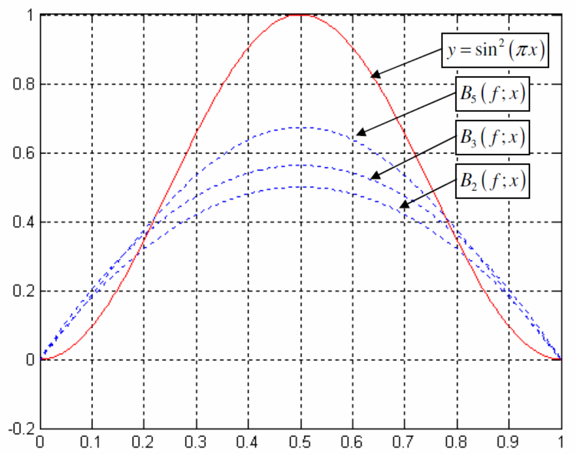
$$B_n(\alpha f + \beta g) = \alpha B_n f + \beta B_n g$$

$[a,b]$ aralığında tanımlı tüm f ve g fonksiyonları için ve tüm $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için, $B_{k,n}(x)$ eşitliğinde $a = 0$ ve $b = 1$ yazılırsa $k = 0,1,2,\cdots,n$ için,

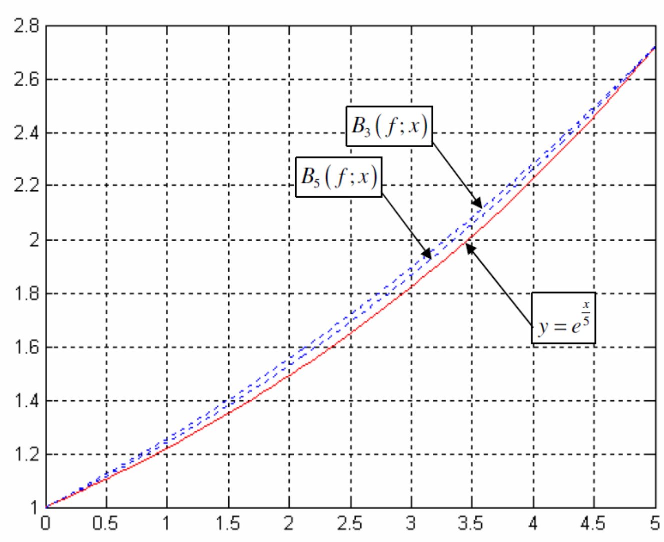
$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

elde edilir. Burada $B_{k,n}(x)$ ***n. dereceden Bernstein polinomları***nı göstermektedir.

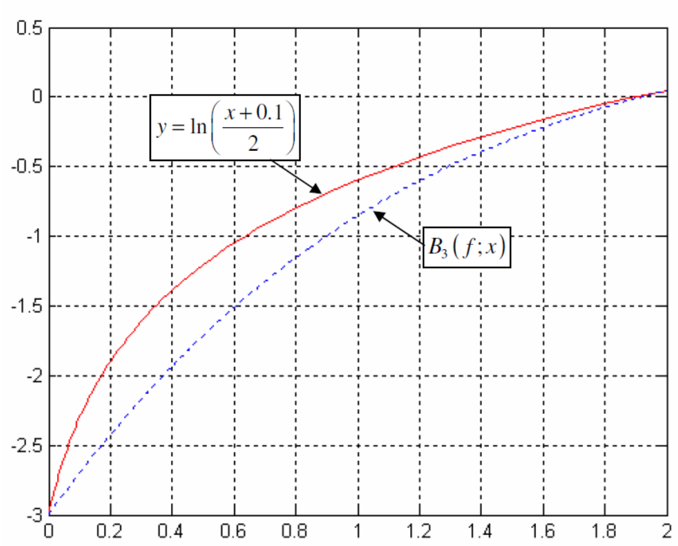
B_n Bernstein operatörü sürekli fonksiyonlar uzayından sürekli fonksiyonlar uzayına dönüşüm yapar. Eğer f fonksiyonu sürekli ise $[0,1]$ aralığında $B_n(f;x)$ operatörü $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bu durum, Weierstrass teoremindeki n. dereceden polinomun yapısına bir örnektir: Analitik fonksiyonlar için bu tip gösterimlerin mevcut olduğu biliniyor. Buna göre f nin herhangi bir mertebeden türevinin olması gerekir. Bernstein polinomları bu açıdan daha kullanışlıdır. Hatta f nin $\frac{k}{n}$ değerlerinin bilinmesi Bernstein polinomlarının oluşturulması için yeterlidir (Aydın 2007). Aşağıda Bernstein operatörünün bir f fonksiyonuna yaklaşımı ile ilgili örnek grafikler verilmiştir (Şahin 2008):



Şekil 2.1.1. $y = \sin^2(\pi x)$ fonksiyonunun ve ona yaklaşım sağlayan 2., 3. ve 5. dereceden Bernstein polinomlarının grafikleri



Şekil 2.1.2. $y=e^{\frac{x}{5}}$ fonksiyonunun ve ona yaklaşım sağlayan 3. ve 5. dereceden Bernstein polinomlarının grafikleri



Şekil 2.1.3. $y=In\left(\frac{x+0.1}{2}\right)$ fonksiyonunun ve ona yaklaşım sağlayan 3. dereceden Bernstein polinomunun grafikleri

$f(t)=1$, $f(t)=t$ ve $f(t)=t^2$ fonksiyonlarının Bernstein operatörü altında görüntüleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$
\begin{aligned}
B_n(1;x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= (1-x+x)^n \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_n(t;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-(k+1))!} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_n(t^2;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{((k-1)+1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \frac{x^2}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{k!((n-2)-k)!} x^k (1-x)^{(n-2)-k} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}
$$

$[0,1]$ üzerinde $n \to \infty$ için

$$B_n(1;x) \to 1$$
$$B_n(t;x) \to x$$
$$B_n(t^2;x) \to x^2$$

elde edilir. O halde Korovkin teoremi gereğince $\forall f \in \mathbb{C}[0,1]$ için $[0,1]$ de

$$B_n(f;x) \to f(x)$$

dir (Dikmen 2009). Ayrıca, $B_n(f)$ monoton bir operatördür. $\forall x \in [a,b]$ için

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow B_n(f;x) \geq 0$$

şartının sağlandığı aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$B_n(1;x) = 1$ olduğundan $m \leq f(x) \leq M$ ise $x \in [0,1]$ için

$$B_n(m;x) \leq B_n(f;x) \leq B_n(M;x) \Rightarrow m \leq B_n(f;x) \leq M$$

dir. $m = 0$ alınırsa ve $f(x) \geq 0$ ise $x \in [0,1]$ için $B_n(f;x) \geq 0$ dır.

2.1.2 Teorem. Bernstein polinomları $B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0) x^k$ şeklinde de yazılabilir. Burada Δ, Tanım 1.2.14 te tanımlanan ileri fark operatörüdür.

İspat. $B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ ifadesinde $(1-x)$ in Binom açılımı yapılırsa

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k\sum_{s=0}^{n-k}\binom{n-k}{s}(-1)^s x^s$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}\binom{n-k}{s}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)(-1)^s x^{k+s}$$

ve $k+s=t$ denirse,

$$B_n(f;x)=\sum_{t=0}^{n}\left[\sum_{k=0}^{t}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{t}{k}(-1)^{t-k}\right]x^t\binom{n}{t}$$

$$=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}\Delta^t f(0)x^t$$

bulunur.

2.2 Bernstein Polinomlarının Temel Özellikleri

2.2.1 Tanım. *n.* dereceden bir Bernstein polinomu $k=0,1,2,\cdots,n$ için,

$$B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

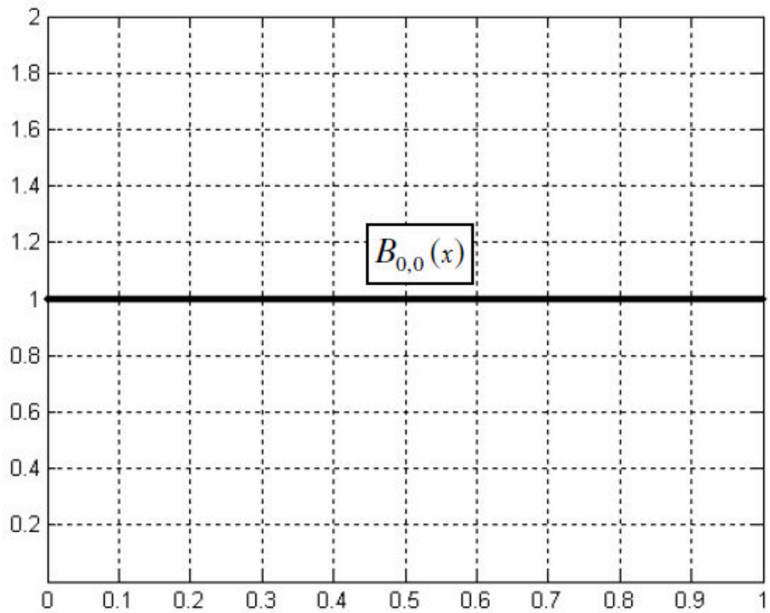
dir. *n.* dereceden $n+1$ tane Bernstein polinomu mevcuttur. Matematiksel uygunluk için $k<0$ veya $k>n$ olduğunda $B_{k,n}=0$ olarak alınır.

Bu polinomları yazmak oldukça kolaydır: $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ katsayıları Pascal üçgeninden kolayca elde edilebilir; k sayısı arttıkça x teriminin üssü bir artar ve $(1-x)$ teriminin üssü bir azalır. Sıfırıncı, birinci, ikinci ve üçüncü dereceden Bernstein polinomları aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

Derecesi sıfır olan Bernstein polinomu,

$$B_{0,0}(x) = 1$$

olarak tanımlanır ve $0 \le x \le 1$ için grafiği aşağıdaki gibi çizilebilir (Şahin 2008):



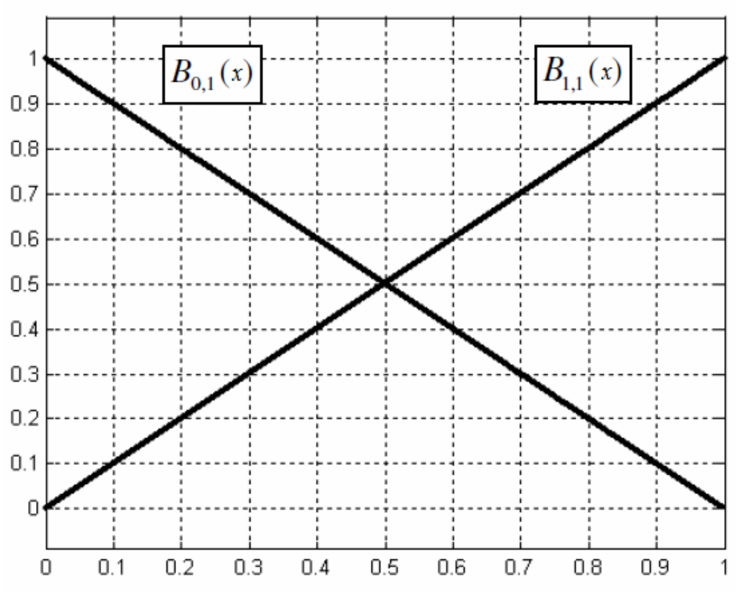
Şekil 2.2.1. Sıfırıncı dereceden Bernstein polinomunun grafiği

Derecesi bir olan Bernstein polinomları,

$$B_{0,1}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x^0 (1-x)^{1-0} = (1-x)$$

$$B_{1,1}(x) = \binom{1}{1} x^1 (1-x)^{1-1} = x$$

olarak elde edilir ve $0 \le x \le 1$ için grafiği aşağıdaki gibi çizilebilir:



Şekil 2.2.2. Birinci dereceden Bernstein polinomlarının grafiği

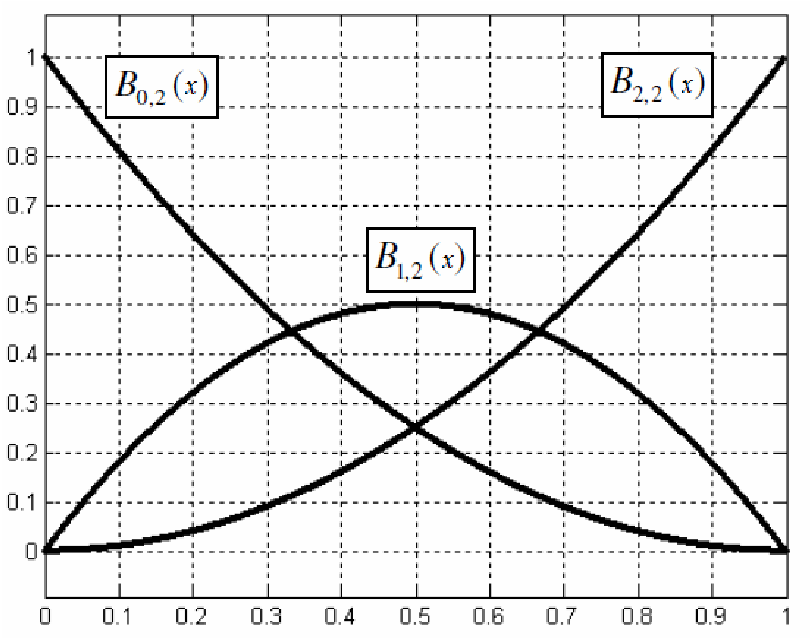
Derecesi iki olan Bernstein polinomları,

$$B_{0,2}(x) = \binom{2}{0} x^0 (1-x)^{2-0} = (1-x)^2$$

$$B_{1,2}(x) = \binom{2}{1} x^1 (1-x)^{2-1} = 2x(1-x)$$

$$B_{2,2}(x) = \binom{2}{2} x^2 (1-x)^{2-2} = x^2$$

olarak elde edilir ve $0 \le x \le 1$ için grafiği aşağıdaki gibi çizilebilir:



Şekil 2.2.3. İkinci dereceden Bernstein polinomlarının grafikleri

Derecesi üç olan Bernstein polinomları,

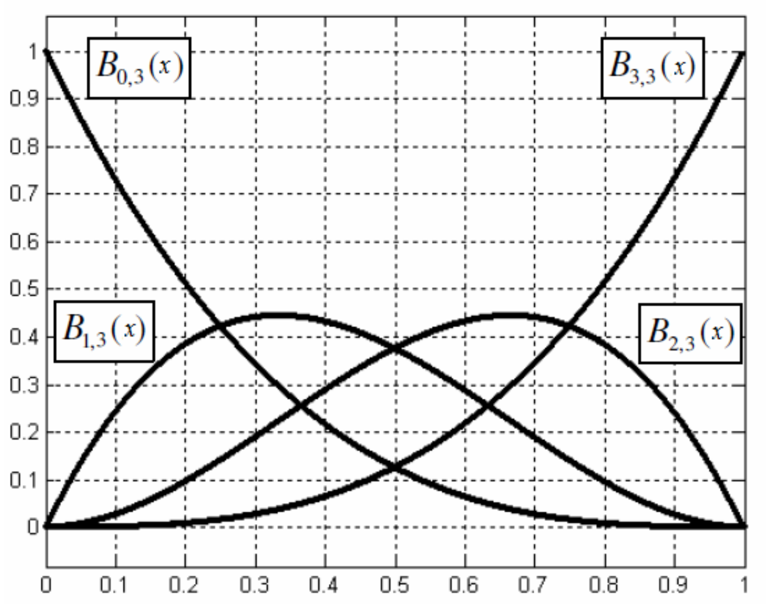
$$B_{0,3}(x) = \binom{3}{0} x^0 (1-x)^{3-0} = (1-x)^3$$

$$B_{1,3}(x) = \binom{3}{1} x^1 (1-x)^{3-1} = 3x(1-x)^2$$

$$B_{2,3}(x) = \binom{3}{2} x^2 (1-x)^{3-2} = 3x^2 (1-x)$$

$$B_{3,3}(x) = \binom{3}{3} x^3 (1-x)^{3-3} = x^3$$

olarak elde edilir ve $0 \le x \le 1$ için grafiği aşağıdaki gibi çizilebilir:



Şekil 2.2.4. Üçüncü dereceden Bernstein polinomlarının grafiği

2.2.2 Teorem (Bernstein Polinomları İçin İndirgeme Bağıntısı). Derecesi n olan bir Bernstein polinomu, derecesi $n-1$ olan iki Bernstein polinomunun toplamı ile tanımlanabilir. Yani, derecesi n olan bir Bernstein polinomu

$$B_{k,n}(x) = (1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x)$$

biçiminde yazılabilir.

İspat. Bunun doğruluğunu gösterebilmek için sadece Bernstein polinomunun tanımına ve biraz basit cebir kullanmaya ihtiyaç vardır:

$$\begin{aligned}
(1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x) &= (1-x)\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} + x\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} \\
&= \binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right]x^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \left[\frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \left[\frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k!(n-k)!} \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \left[\frac{(n-1)!n}{(n-k)!k!} \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \left[\frac{n!}{(n-k)!k!} \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= B_{k,n}(x)$$

2.2.3 Teorem. Derecesi n olan Bernstein polinomları göz önüne alındığında, her biri $[0,1]$ aralığı üzerinde negatif değildir.

İspat. Bunun doğruluğunu gösterebilmek için, Bernstein polinomlarının indirgeme bağıntısı ve matematiksel tümevarım kullanılacaktır. $0 \le x \le 1$ için, $B_{0,1}(x) = 1 - x$ ve $B_{1,1}(x) = x$ fonksiyonlarının her ikisinin de negatif olmadıkları kolayca görülebilir. Eğer derecesi n den küçük olan tüm Bernstein polinomlarının negatif olmadıkları kabul edilirse, bu durumda Bernstein polinomlarının indirgeme bağıntısı kullanılarak,

$$B_{k,n}(x) = (1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x)$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki tüm bileşenler $0 \le x \le 1$ için negatif olmadığından $B_{k,n}(x)$ polinomu $0 \le x \le 1$ için negatif değildir. Tümevarım ile tüm Bernstein polinomları $0 \le x \le 1$ için negatif değildir. Ayrıca bu süreçte $0 < x < 1$ olduğunda Bernstein polinomlarının her birinin pozitif olduğu görülmüş olur.

2.2.4 Teorem. Derecesi n olan $n+1$ tane Bernstein polinomu, hepsinin toplamı bire eşit olduğu için birim parçalanış oluşturur.

İspat. Bunun doğruluğunu gösterebilmek için, önce benzer bir durumun doğruluğu gösterilecektir: her bir n için, derecesi n olan $n+1$ tane Bernstein polinomunun toplamı, derecesi $m-1$ olan m tane Bernstein polinomunun toplamına eşittir. Yani,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x)$$

Bu hesaplama doğrudan Bernstein polinomlarının indirgeme bağıntısından ve toplamların yeniden düzenlenmesiyle aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} B_{k,n}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left[(1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x)\right] \\
&= (1-x)\sum_{k=0}^{n} B_{k,n-1}(x) + x\sum_{k=0}^{n} B_{k-1,n-1}(x) \\
&= (1-x)\left[\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) + B_{n,n-1}(x)\right] + x\left[\sum_{k=1}^{n} B_{k-1,n-1}(x) + B_{-1,n-1}(x)\right] \\
&= (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(t) + x\sum_{k=1}^{n} B_{k-1,n-1}(x) \\
&= (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) + x\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x)
\end{aligned}$$

Bu eşitlik elde edildiği için,

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} B_{k,n-2}(x) = \cdots = \sum_{k=0}^{1} B_{k,1}(x) = (1-x) + x = 1$$

yazılabilir.

Bu teoremin doğruluğu $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ Binom teoreminden de kolayca görülebilir. Binom teoreminde, $a = x$ ve $b = 1-x$ yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}(x+1-x)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) \\ &= 1\end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.5 Teorem. Derecesi n den küçük olan herhangi bir Bernstein polinomu, derecesi n olan Bernstein polinomlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Özel olarak, derecesi $n-1$ olan her Bernstein polinomu, derecesi n olan Bernstein polinomlarının lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

İspat. Dikkat edilecek olursa,

$$\begin{aligned}xB_{k,n}(x) &= x\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} x^{k+1} (1-x)^{(n+1)-(k+1)} \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}} B_{k+1,n+1}(x) \\ &= \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!k!}}{\dfrac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}} B_{k+1,n+1}(x)\end{aligned}$$

$$= \frac{k+1}{n+1} B_{k+1,n+1}(x)$$

$$(1-x)B_{k,n}(x) = (1-x)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n+1-k}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k}} B_{k,n+1}(x)$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}} B_{k,n+1}(x)$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!(n-k+1)(n-k)!}{(n+1)n!} B_{k,n+1}(x)$$

$$= \frac{n-k+1}{n+1} B_{k,n+1}(x)$$

ve son olarak,

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} B_{k,n}(x) + \frac{1}{\binom{n}{k+1}} B_{k+1,n}(x) = x^k (1-x)^{n-k} + x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^k (1-x)^{n-k} + x^k x \frac{(1-x)^{n-k}}{1-x}$$

$$= x^k (1-x)^{n-k} \left[1 + \frac{x}{1-x} \right]$$

$$= x^k (1-x)^{n-k} \left[\frac{1}{1-x} \right] = x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= \frac{1}{\binom{n-1}{k}} B_{k,n-1}(x)$$

elde edilir. En son bulunan denklem kullanılarak, herhangi bir Bernstein polinomu, daha yüksek dereceli Bernstein polinomları cinsinden ifade edilebilir. Yani,

$$B_{k,n-1}(x) = \binom{n-1}{k}\left[\frac{1}{\binom{n}{k}}B_{k,n}(x) + \frac{1}{\binom{n}{k+1}}B_{k+1,n}(x)\right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\frac{k!(n-k)!}{n!}B_{k,n}(x) + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!}B_{k+1,n}(x)$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\frac{k!(n-k)!(n-k-1)!}{n(n-1)!}B_{k,n}(x) + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\frac{(k+1)k!(n-k-1)!}{n(n-1)!}B_{k+1,n}(t)$$

$$= \left(\frac{n-k}{n}\right)B_{k,n}(x) + \left(\frac{k+1}{n}\right)B_{k+1,n}(x)$$

elde edilir ki bu da derecesi $n-1$ olan bir Bernstein polinomunu, derecesi n olan Bernstein polinomlarının lineer birleşimi şeklinde ifade eder. Derecesi m olan (n den küçük) herhangi bir Bernstein polinomunun, derecesi n olan Bernstein polinomlarının lineer birleşimi şeklinde yazılabileceğini göstermek için de bu ifade genişletilebilir. Örneğin derecesi $n-2$ olan bir Bernstein polinomu, derecesi $n-1$ olan iki Bernstein polinomunun lineer birleşimi olarak ifade edilebilir ki bu polinomlar da derecesi n olan iki Bernstein polinomunun lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

2.2.6 Teorem. $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\}$ kuvvet bazı, derecesi n den küçük veya n ye eşit olan polinom uzayı için bir baz oluşturduğundan, derecesi n olan her Bernstein polinomu kuvvet bazı cinsinden yazılabilir.

İspat. Bunun için, Bernstein polinomlarının tanımından ve Binom teoreminden faydalanarak aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir:

$$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\binom{n}{k}x^k\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}1^{n-k-i}(-x)^i$$

$$=\binom{n}{k}x^k\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}(-1)^i x^i$$

$$=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n}{k}\binom{n-k}{i}x^{i+k}$$

$$=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}x^i$$

$$=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!}x^i$$

$$=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i!}{k!(i-k)!}x^i$$

$$=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{n}{i}\binom{i}{k}x^i$$

Burada $(1-x)^{n-k}$ ifadesini açmak için Binom teoremi kullanıldı.

2.2.7 Teorem. Her kuvvet bazı elemanı, Bernstein polinomlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir.

İspat. Bunun doğruluğunu gösterebilmek için derece yükseltme formülleri ve tümevarım kullanılırsa,

$$x^k = x(x^{k-1})$$

$$= x\sum_{i=k-1}^{n}\frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}B_{i,n-1}(x)$$

$$=\sum_{i=k}^{n}\frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}}xB_{i-1,n-1}(x)$$

$$= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{i}{n} B_{i,n}(x)$$

$$= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{i,n}(x)$$

Burada tümevarım hipotezi ikinci adımda uygulanmıştır.

2.2.8 Teorem. Bernstein polinomları simetriktir. Yani, $B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ eşitliği için,

$$B_{k,n}(x) = B_{n-k,n}(1-x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Tanım 2.2.1 den

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{n-k} (1-x)^{n-k} x^k$$

$$= B_{n-k,n}(1-x)$$

elde edilir.

2.2.9 Teorem. $n.$ dereceden Bernstein polinomları

$$B_{k,n}(x)=\left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]OKEK\left(\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}B_{k-1,n-1}(x),\frac{1}{\binom{n-1}{k}}B_{k,n-1}(x)\right)$$

biçiminde ifade edilebilirler.

İspat: Verilen ifadenin doğruluğunu gösterebilmek için Bernstein polinomlarının tanımından faydalanılacaktır. $n.$ dereceden Bernstein polinomlarının tanımından,

$$\begin{aligned}
B_{k,n}(x) &= \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]OKEK\left(x^{k-1}(1-x)^{n-k},x^k(1-x)^{n-k-1}\right)\\
&= \left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]OKEK\left(\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k},\frac{1}{\binom{n-1}{k}}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\right)\\
&= \left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]OKEK\left(\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}B_{k-1,n-1}(x),\frac{1}{\binom{n-1}{k}}B_{k,n-1}(x)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada ikinci adımda, çok iyi bilinen $\binom{n}{k}=\left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]$ eşitliği kullanılmıştır.

2.3 Baz Olarak Bernstein Polinomları

Mertebesi n olan Bernstein polinomları derecesi n veya n den küçük olan polinom uzayları için bir baz oluşturur:

1. Bernstein polinomları polinom uzayını gerer. Yani, derecesi n den küçük veya n ye eşit olan her polinom, Bernstein polinomlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Eğer kuvvet bazının, polinom uzayını gerdiği ve kuvvet bazının her elemanının Bernstein polinomlarının lineer birleşimi şeklinde yazılabildiği göz önüne alınırsa bu kolayca görülebilir.

2. Bernstein polnomları lineer bağımsızdır. Yani, tüm x ler için

$$0 = c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + \cdots + c_n B_{n,n}(x)$$

eşitliğini sağlayan $c_0, c_1, \cdots, c_n$ sabitleri varsa bu durumda tüm c_i ler 0 olmalıdır. Bu doğru olsaydı,

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + \cdots + c_n B_{n,n}(x) \\
&= c_0 \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{i}{0} x^i + c_1 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i}\binom{i}{1} x^i + \cdots + c_n \sum_{i=n}^{n} (-1)^{i-n} \binom{n}{i}\binom{i}{n} x^i \\
&= c_0 \left(1 + (-1)\binom{n}{1}\binom{1}{0} x + (-1)^2 \binom{n}{2}\binom{2}{0} x^2 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}\binom{n}{0} x^n \right) \\
&\quad + c_1 \left(\binom{n}{1}\binom{1}{1} x + (-1)\binom{n}{2}\binom{2}{1} x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n}\binom{n}{1} x^n \right) + \cdots + c_n \left(\binom{n}{n}\binom{n}{n} x^n \right) \\
&= c_0 + \left[\sum_{i=0}^{1} c_i \binom{n}{1}\binom{1}{i} (-1)^{1-i} \right] x + \left[\sum_{i=0}^{2} c_i \binom{n}{2}\binom{2}{i} (-1)^{2-i} \right] x^2 \\
&\quad + \cdots + c_n \left[\sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{n}\binom{n}{i} (-1)^{n-i} \right] x^n = 0
\end{aligned}$$

yazılabilirdi. Kuvvet bazı lineer bağımsız bir küme olduğundan,

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 0 \\
\sum_{i=0}^{1} c_i \binom{n}{1}\binom{1}{i}(-1)^{1-i} &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i} &= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ olmasını gerektirir (Joy 2000).

2.4 Bernstein Polinomları İçin Bir Matris Temsili

Birçok uygulamada, Bernstein polinomları için bir matris temsili kullanışlıdır. Eğer noktasal çarpımların lineer birleşimi cinsinden bakılırsa, bunlar doğrudan geliştirilebilir.

Bernstein baz fonksiyonlarının lineer birleşimi şeklinde verilen bir polinom

$$B(x) = c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + \cdots + c_n B_{n,n}(x)$$

olsun. Bu eşitliği iki vektörün noktasal çarpımı olarak yazmak kolaydır:

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(x) & B_{1,n}(x) & \cdots & B_{n,n}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Bu eşitlik ise,

$$B(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

şekline dönüştürülebilir. Burada $b_{i,j}$ ler ilgili Bernstein polinomunu belirlemede kullanılan kuvvet bazının katsayılarıdır. Kuadratik durumda ($n = 2$ için) matris temsili,

$$B(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ve kübik durumda ($n = 3$ için) matris temsili,

$$B(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Joy 2000).

3. BERNSTEIN POLİNOMLARININ İNTEGRALLERİ

Bu bölümde öncelikle Bernstein polinomlarının $[0,1]$ aralığındaki integrali incelenecek, bunların Gama ve Beta fonksiyonları ile ilişkisi belirtilecektir. Daha sonra Bernstein polinomlarının çarpımlarının $[0,1]$ aralığındaki integralleri verilecek ve son olarak da Bernstein polinomlarının kuvvetlerinin çarpımlarının integralleri incelenecektir. Bu bölümdeki bilgiler Açıkgöz ve Aracı'nın (2010a) çalışmasında bulunabilir.

3.1. Bernstein Polinomlarının İntegral Özellikleri

Bu bölümde, giriş kısmında da belirtildiği gibi, 0 dan 1 e kadar Bernstein polinomunun integrali, beta ve gama fonksiyonları cinsinden belirtilecektir.

$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, $k = 0,1,2,\cdots,n$ eşitliğinde integral alarak,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_{k,n}(x)dx &= \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx \\
&= -\binom{n}{k} \int_0^1 (1-u)^k u^{n-k} du \\
&= -\binom{n}{k} \int_0^1 \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 1^{k-j} (-u)^j u^{n-k} du \\
&= -\binom{n}{k} \int_0^1 \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j u^{n+j-k} du \\
&= \binom{n}{k} \int_0^1 \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{j+1} u^{n+j-k} du \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \int_0^1 \binom{k}{j} (-1)^{j+1} u^{n+j-k} du \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{j+1} \int_0^1 u^{n+j-k} du
\end{aligned}$$

$$=\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j+1}\left[\frac{u^{n+j+1-k}}{n+j+1-k}\right]_0^1$$

$$=\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j+1}\left[\frac{(1-x)^{n+j+1-k}}{n+j+1-k}\right]_0^1$$

$$=\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}\frac{1}{n+j+1-k}$$

$$=\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{k-j}(-1)^{k-j}\frac{1}{n+1-j}$$

$$=\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\frac{1}{n-j+1}$$

elde edilir. Bu sonuç

$$\beta(n,m)=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx$$

olarak tanımlanan Euler beta fonksiyonu ile ilişkilidir. $n=k+1$ ve $m=n-k+1$ için, beta ve gama fonksiyonları arasındaki

$$\beta(n,m)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\int_0^1 B_{k,n}(x)dx=\binom{n}{k}\beta(k+1,n-k+1)$$

$$=\binom{n}{k}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}$$

elde edilir. Eğer $k > -1$ ve $n > k-1$ ise bu durumda, $\binom{n}{k}\beta(k+1, n-k+1)$ yakınsak olduğundan $\int_0^1 B_{k,n}(x)dx$ integrali de yakınsaktır. Böylece,

$$\int_0^1 B_{k,n}(x)dx = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\, dx$$

elde edilir. Yukarıda verilen beta fonksiyonu bağıntılarından,

$$\int_0^1 B_{k,n}(x)dx = \binom{n}{k}\beta(n-k+1, k+1)$$

bulunur. Bu sonuca göre, beta fonksiyonu simetrik olduğundan, 0 dan 1 e kadar olan Bernstein polinomlarının integralleri simetriktir. 0 dan 1 e kadar olan Bernstein polinomlarının integralleri beta ve gama fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.

3.2 Bernstein Polinomlarının Çarpımlarının İntegrali

İki Bernstein polinomunun çarpımının belirli integrali, sıradaki bağıntı yardımıyla verilebilir.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_{k,n}(x) B_{k,m}(x) &= \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}\, dx \\
&= \binom{n}{k}\binom{m}{k} \int_0^1 x^{2k} (1-x)^{n+m-2k}\, dx \\
&= \binom{n}{k}\binom{m}{k} \int_0^1 -(1-u)^{2k} u^{n+m-2k}\, du \\
&= \binom{n}{k}\binom{m}{k} \int_0^1 -\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} 1^{2k-j} (-u)^j u^{n+m-2k}\, du
\end{aligned}$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\int_0^1\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}(-1)^{j+1}u^{n+m+j-2k}du$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{2k}\int_0^1\binom{2k}{j}(-1)^{j+1}u^{n+m+j-2k}du$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}(-1)^{j+1}\left[\frac{u^{n+m+j-2k+1}}{n+m+j-2k+1}\right]_0^1$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}(-1)^{j+1}\left[\frac{(1-x)^{n+m+j-2k+1}}{n+m+j-2k+1}\right]_0^1$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{j}\frac{1}{n+m+j-2k+1}$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}(-1)^{j}\frac{1}{n+m+1-j}$$

elde edilir. Benzer biçimde, üç Bernstein polinomunun çarpımı için sıradaki bağıntı ile,

$$\int_0^1 B_{k,n}(x)B_{k,m}(x)B_{k,s}(x)dx=\int_0^1\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{k}x^k(1-x)^{m-k}\binom{s}{k}x^k(1-x)^{s-k}dx$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{s}{k}\int_0^1 x^{3k}(1-x)^{n+m+s-3k}dx$$

$$=-\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{s}{k}\int_0^1(1-u)^{3k}u^{n+m+s-3k}$$

$$=-\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{s}{k}\int_0^1\sum_{j=0}^{3k}\binom{3k}{j}1^{3k-j}(-u)^j u^{n+m+s-3k}du$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{s}{k}\int_0^1\sum_{j=0}^{3k}\binom{3k}{j}(-1)^{j+1}u^{n+m+s+j-3k}$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{s}{k}\sum_{j=0}^{3k}\binom{3k}{j}(-1)^{j+1}\int_0^1 u^{n+m+s+j-3k}du$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{s}{k}\sum_{j=0}^{3k}\binom{3k}{j}(-1)^{j+1}\left[\frac{u^{n+m+s+j+1-3k}}{n+m+s+j+1-3k}\right]_0^1$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{s}{k}\sum_{j=0}^{3k}\binom{3k}{j}(-1)^{j+1}\left[\frac{(1-x)^{n+m+s+j+1-3k}}{n+m+s+j+1-3k}\right]_0^1$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{s}{k}\sum_{j=0}^{3k}\binom{3k}{j}(-1)^{j}\frac{1}{n+m+s+j+1-3k}$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{s}{k}\sum_{j=0}^{3k}\binom{3k}{j}(-1)^{j}\frac{1}{n+m+s+1-j}$$

bulunur. Yukarıdakiler ve matematiksel tümevarım kullanılarak, sıradaki teorem elde edilebilr.

3.2.1 Teorem. $B_{k,n_1},\cdots,B_{k,n_s}$, $s\in\mathbb{N}$ Bernstein polinomlar dizisinin farklı derecelerdeki, 0 dan 1 e kadar integrali altındaki çarpımı

$$\int_0^1\left(\prod_{j=1}^{s}B_{k,n_j}(x)\right)dx=\prod_{y=1}^{s}\binom{n_y}{k}\sum_{j=0}^{s_k}\binom{s_k}{j}\frac{(-1)^{s_k-j}}{n_1+n_2+\cdots+n_s-j+1}$$

olarak verilir.

3.3. Bernstein Polinomlarının Kuvvetlerinin İntegrali

Bernstein polinomunun $m.$ dereceden kuvveti $B_{k,n}^{m}(x)$ ile gösterilecektir.

3.3.1 Teorem. $n_1,n_2,\cdots n_s$ farklı dereceler olmak üzere, $B_{k,n_1}^{m_1},\cdots,B_{k,n_s}^{m_s}$ ile verilen Bernstein polinomlarının çarpımının, 0 dan 1 e kadar olan belirli integrali,

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{s}\binom{n_j}{k}^{m_j}}\int_0^1\left(\prod_{j=1}^{s}B_{k,n_j}^{m_j}(x)\right)dx=\sum_{j=0}^{k(m_1+m_2+\cdots m_s)}\binom{k(m_1+m_2+\cdots m_s)}{j}(-1)^{k(m_1+m_2+\cdots m_s)-j}$$

$$\times\frac{1}{n_1m_1+\cdots n_sm_s-j+1}$$

olarak verilebilir.

İspat. $B_{k,n_s}^{m_s}(x)$ in tanımından,

$$\int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{s} B_{k,n_j}^{m_j}(x) \right) dx = \prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k}^{m_j} \int_0^1 x^{k(m_1+\cdots m_s)} (1-x)^{n_1 m_1+\cdots+n_s m_s - k(m_1+\cdots m_s)}\, dx$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada $1-x=u$ ve $-dx=du$ değişken değişimi yapılacak olursa,

$$\int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{s} B_{k,n_j}^{m_j}(x) \right) dx = \prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k}^{m_j} \int_0^1 (1-u)^{k(m_1+\cdots m_s)} u^{n_1 m_1+\cdots+n_s m_s - k(m_1+\cdots m_s)}\, du$$

$$= \prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k}^{m_j} \int_0^1 \sum_{j=0}^{k(m_1+\cdots+m_s)} \binom{k(m_1+\cdots+m_s)}{j}$$

$$\times (-u)^{k(m_1+\cdots+m_s)-j} u^{n_1 m_1+\cdots n_s m_s - k(m_1+\cdots+m_s)} du$$

$$= \prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k}^{m_j} \sum_{j=0}^{k(m_1+\cdots+m_s)} \binom{k(m_1+\cdots+m_s)}{j}$$

$$\times (-1)^{k(m_1+\cdots+m_s)-j} \frac{1}{n_1 m_1+\cdots+n_s m_s - j + 1}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Yukarıdaki teoremde eğer $m_1=\cdots=m_s=1$ olarak alınırsa, Teorem 3.2.1 elde edilmiş olur.

3.3.2 Teorem. $n_1, n_2, \cdots n_s$ farklı dereceler olmak üzere, $B_{k_1,n_1}^{m_1}, \cdots, B_{k_s,n_s}^{m_s}$ ile verilen Bernstein polinomlarının çarpımının 0 dan 1 e kadar olan belirli integrali,

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k_j}^{m_j}} \int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{s} B_{k_j,n_j}^{m_j}(x) \right) dx = \sum_{j=0}^{k_1 m_1+\cdots+k_s m_s} \binom{k_1 m_1+\cdots+k_s m_s}{j} (-1)^{k_1 m_1+\cdots+k_s m_s - j}$$

$$\times \frac{1}{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \cdots + n_s m_s - j + 1}$$

dir.

İspat. $\left(B_{k_j,n_j}^{m_j}(x)\right)_{j=1}^{s}$ ifadesinin tanımından,

$$\int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{s} B_{k_j,n_j}^{m_j}(x) \right) dx = \prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k_j}^{m_j} \int_0^1 x^{k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s} (1-x)^{n_1 m_1 + \cdots + n_s m_s - (k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s)} dx$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada $1 - x = u$ ve $-dx = du$ değişken değişimi yapılacak olursa,

$$\int_0^1 \left(\prod_{j=1}^{s} B_{k_j,n_j}^{m_j}(x) \right) dx = \prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k_j}^{m_j} \int_0^1 (1-u)^{k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s} u^{n_1 m_1 + \cdots + n_s m_s - (k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s)} du$$

$$= \prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k_j}^{m_j} \int_0^1 \sum_{j=0}^{k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s} \binom{k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s}{j}$$

$$\times (-u)^{k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s - j} u^{n_1 m_1 + \cdots n_s m_s - (k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s)} du$$

$$= \prod_{j=1}^{s} \binom{n_j}{k_j}^{m_j} \sum_{j=0}^{k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s} \binom{k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s}{j}$$

$$\times (-1)^{k_1 m_1 + \cdots + k_s m_s - j} \frac{1}{n_1 m_1 + \cdots + n_s m_s - j + 1}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Teorem 3.3.2 de eğer $k_1 = \cdots = k_s = k$ olarak alınırsa Teorem 3.3.1 elde edilir ve eğer $k_1 = \cdots = k_s = k$ olmasıyla birlikte $m_1 = \cdots = m_s = 1$ olarak alınırsa Teorem 3.2.1 elde edilir.

3.3.3 Teorem. $k = 0,1,2,\cdots,n$ ve $n.$ dereceden bir Bernstein polinomu için, $n+1$ tane Bernstein polinomunun çarpımının 0 dan 1 e kadar olan belirli integrali,

$$\int_0^1 \left(\prod_{j=0}^{n} B_{j,n}(x) \right) dx = \frac{(n!)^{n+1}}{((n!)!)^2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1 \right)}{\Gamma(n(n+1)+2)}$$

olarak verilebilir.

İspat. İspat için,

$$\int_0^1 \left(\prod_{j=0}^{n} B_{j,n}(x) \right) dx = \prod_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int_0^1 x^{\binom{n+1}{2}} (1-x)^{\binom{n+1}{2}} dx$$

$$= \prod_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \beta\left(\binom{n+1}{2} + 1, \binom{n+1}{2} + 1 \right)$$

$$= \prod_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{\Gamma^2\left(\binom{n+1}{2} + 1 \right)}{\Gamma\left(2\binom{n+1}{2} + 2 \right)}$$

$$= \prod_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1 \right)}{\Gamma(n(n+1)+2)}$$

$$= \frac{(n!)^{n+1}}{[(n!)!]^2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1 \right)}{\Gamma(n(n+1)+2)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3.4 Teorem. $k = 0,1,2,\cdots,n$ ve n. dereceden, sırasıyla $m_0, m_1, \cdots, m_n$ kuvvetleri ile verilen bir Bernstein polinomu için, $n+1$ tane Bernstein polinomunun çarpımının 0 dan 1 e kadar olan belirli integrali,

$$\frac{1}{\prod_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^{m^j}} \int_0^1 \left(\prod_{j=0}^{n} B_{j,n}^{m_j}(x) \right) dx$$

$$= \beta(m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n + 1, n(m_0 + m_1 + \cdots m_n) - (m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n) + 1)$$

olarak verilir.

İspat. Bu ispat Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 için verilen ispatlara benzer olarak yapılabilir.

Şimdi, kolayca görülebilir ki Teorem 3.3.4 de $m_0 = m_1 = \cdots = m_n = 1$ yazılarak Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.3 elde edilir.

4. BERNSTEIN POLİNOMLARININ TÜREVLERİ

4.1. Türev ile İlgili Temel Özellikler

Derecesi n olan Bernstein polinomlarının türevleri, derecesi $n-1$ olan polinomlardır. Bernstein polinomlarının tanımı kullanılarak, bu türevin Bernstein polinomlarının lineer birleşimi şeklinde yazılabildiği gösterilebilir.

4.1.1 Teorem. $0 \le k \le n$ için derecesi n olan Bernstein polinomunun türevi,

$$\frac{d}{dx} B_{k,n}(x) = n\left(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x)\right)$$

dir.

İspat. Bunun doğruluğu doğrudan türev alınarak gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} B_{k,n}(x) &= \frac{d}{dx}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left[kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - x^k(n-k)(1-x)^{n-k-1}\right] \\
&= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= n\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k (1-x)^{n-k-1}\right) \\
&= n\left[\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1}\right] \\
&= n\left(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x)\right)
\end{aligned}$$

Böylece bir Bernstein polinomunun türevi, derecesi $n-1$ olan iki Bernstein polinomunun farkının, polinomun derecesiyle çarpımı olarak ifade edilebilir. Buradan yola çıkılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

4.1.2 Teorem. $0 \le k \le n$ için derecesi n olan Bernstein polinomlarının ikinci dereceden türevi,

$$B''_{k,n}(x) = n(n-1)\left[B_{k-2,n-2}(x) - 2B_{k-1,n-2}(x) + B_{k,n-2}(x)\right]$$

biçimindedir.

İspat. $0 \le k \le n$ için derecesi n olan Bernstein polinomlarının ikinci dereceden türevi,

$$B''_{k,n}(x) = n\left(B'_{k-1,n-1}(x) - B'_{k,n-1}(x)\right)$$

bağıntısından hesaplanabilir. Burada önce $B'_{k-1,n-1}(x)$ ve daha sonra da $B'_{k,n-1}(x)$ hesaplanıp yerlerine yazılmalıdır.

$$\frac{d}{dx}B_{k-1,n-1}(x) = \frac{d}{dx}\left[\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\right]$$

$$= \binom{n-1}{k-1}\left[(k-1)x^{k-2}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}(k-1)x^{k-2}(1-x)^{n-k} - \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}(n-k)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k} - \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k} - \frac{(n-1)(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}$$

$$= (n-1)\left[\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k} - \binom{n-2}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right]$$

$$= (n-1)\left[B_{k-2,n-2}(x) - B_{k-1,n-2}(x)\right]$$

elde edilir. Böylece birinci kısmın türevi bulunmuş olur. Benzer şekilde ikinci kısmın da türevi,

$$\frac{d}{dx}B_{k,n-1}(x)=\frac{d}{dx}\left[\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}\right]$$

$$=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}kx^{k-1}(1-x)^{n-1-k}-\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}(n-1-k)x^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}-\frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!}x^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}-\frac{(n-1)(n-2)!}{k!(n-k-2)!}x^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$=(n-1)\left[\binom{n-2}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}-\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-k-2}\right]$$

$$=(n-1)\left[B_{k-1,n-2}(x)-B_{k,n-2}(x)\right]$$

olarak bulunur. Böylece bulunan sonuçlar yerlerine yazılırsa,

$$B''_{k,n}(x)=n\left(B'_{k-1,n-1}(x)-B'_{k,n-1}(x)\right)$$

$$=n\left[(n-1)B_{k-2,n-2}(x)-(n-1)B_{k-1,n-2}(x)-(n-1)B_{k-1,n-2}(x)+(n-1)B_{k,n-2}(x)\right]$$

olur. Bu son ifade düzenlenirse,

$$B''_{k,n}(x)=n(n-1)\left[B_{k-2,n-2}(x)-2B_{k-1,n-2}(x)+B_{k,n-2}(x)\right]$$

elde edilir.

4.1.3 Teorem. $0\le k\le n$ için derecesi n olan Bernstein polinomlarının üçüncü dereceden türevi,

$$B'''_{k,n}(x)=n(n-1)(n-2)\left[B_{k-3,n-3}(x)-3B_{k-2,n-3}(x)+3B_{k-1,n-3}(x)-B_{k,n-3}(x)\right]$$

şeklindedir.

İspat. $0 \le k \le n$ için derecesi n olan Bernstein polinomlarının üçüncü dereceden türevinin hesaplanabilmesi için

$$B'''_{k,n}(x) = n(n-1)\left[B'_{k-2,n-2}(x) - 2B'_{k-1,n-2}(x) + B'_{k,n-2}(x)\right]$$

eşitliği hesaplanmalıdır. Burada önce $B'_{k-2,n-2}(x)$, sonra $B'_{k-1,n-2}(x)$ ve daha sonra da $B'_{k,n-2}(x)$ hesaplanıp eşitlikte yerlerine yazılmalıdır. Hesaplamaya önce $B'_{k-2,n-2}(x)$ ile başlanırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}B_{k-2,n-2}(x) &= \frac{d}{dx}\left[\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}\right] \\
&= \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}(k-2)x^{k-3}(1-x)^{n-k} - \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}(n-k)x^{k-2}(1-x)^{n-k-1} \\
&= \frac{(n-2)(n-3)!}{(k-3)!(n-k)!}x^{k-3}(1-x)^{n-k} - \frac{(n-2)(n-3)!}{(k-2)!(n-k-1)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k-1} \\
&= (n-2)\left[\binom{n-3}{k-3}x^{k-3}(1-x)^{n-k} - \binom{n-3}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k-1}\right] \\
&= (n-2)\left[B_{k-3,n-3}(x) - B_{k-2,n-3}(x)\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde $B'_{k-1,n-2}(x)$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}B_{k-1,n-2}(x) &= \frac{d}{dx}\left[\binom{n-2}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right] \\
&= \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}(k-1)x^{k-2}(1-x)^{n-k-1} - \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}(n-k-1)x^{k-1}(1-x)^{n-k-2} \\
&= \frac{(n-2)(n-3)!}{(k-2)!(n-k-1)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k-1} - \frac{(n-2)(n-3)!}{(k-1)!(n-k-2)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-2} \\
&= (n-2)\left[\binom{n-3}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k-1} - \binom{n-3}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k-2}\right] \\
&= (n-2)\left[B_{k-2,n-3}(x) - B_{k-1,n-3}(x)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve son olarak $B'_{k,n-2}(x)$ hesaplanırsa,

$$\frac{d}{dx}B_{k,n-2}(x)=\frac{d}{dx}\left[\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-k-2}\right]$$
$$=\frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!}kx^{k-1}(1-x)^{n-k-2}-\frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!}(n-k-2)x^k(1-x)^{n-k-3}$$
$$=\frac{(n-2)(n-3)!}{(k-1)!(n-k-2)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-2}-\frac{(n-2)(n-3)!}{k!(n-k-3)!}x^k(1-x)^{n-k-3}$$
$$=(n-2)\left[\frac{(n-3)!}{(k-1)!(n-k-2)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-2}-\frac{(n-3)!}{k!(n-k-3)!}x^k(1-x)^{n-k-3}\right]$$
$$=(n-2)\left[\binom{n-3}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k-2}-\binom{n-3}{k}x^k(1-x)^{n-k-3}\right]$$
$$=(n-2)\left[B_{k-1,n-3}(x)-B_{k,n-3}(x)\right]$$

elde edilir. Bulunan sonuçlar yerlerine yazılırsa,

$$B'''_{k,n}(x)=n(n-1)\left[B'_{k-2,n-2}(x)-2B'_{k-1,n-2}(x)+B'_{k,n-2}(x)\right]$$
$$=n(n-1)(n-2)\left[B_{k-3,n-3}(x)-B_{k-2,n-3}(x)-2\left(B_{k-2,n-3}(x)-B_{k-1,n-3}(x)\right)+B_{k-1,n-3}(x)-B_{k,n-3}(x)\right]$$
$$=n(n-1)(n-2)\left[B_{k-3,n-3}(x)-3B_{k-2,n-3}(x)+3B_{k-1,n-3}(x)-B_{k,n-3}(x)\right]$$

bulunmuş olur. Yani, üçüncü dereceden Bernstein polinomlarının türevi,

$$B'''_{k,n}(x)=n(n-1)(n-2)\left[B_{k-3,n-3}(x)-3B_{k-2,n-3}(x)+3B_{k-1,n-3}(x)-B_{k,n-3}(x)\right]$$

dir.

4.1.4 Teorem. $r<n$ olmak üzere, $B^{(r)}_{k,n}(x)$ r. mertebeden ve n. dereceden Bernstein polinomlarını ve $P(n,r)$ n nin r li permütasyonunu göstersin. Bu durumda, n. dereceden Bernstein polinomlarının r. mertebeden türevi,

$$B_{k,n}^{(r)}(x) = P(n,r)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j B_{k-r+j,n-r}(x)$$

olarak elde edilmiş olur.

İspat. Verilen ifadenin doğruluğu tümevarım ile kolayca görülebilir.

4.2 Bernstein Polinomlarının Çarpımlarının Türevi

Bu bölümde Bernstein polinomunun çarpımlarının türevleri ile ilgili elde edilen yeni sonuçlar verilecektir. Öncelikle dereceleri aynı olan Bernstein polinomlarının çarpımlarının türevi verilecek, daha sonra farklı derecelerdeki Bernstein polinomlarının çarpımlarının türevleri hesaplanacaktır.

4.2.1 Dereceleri Aynı Olan Bernstein Polinomlarının Çarpımlarının Türevi

$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ ve $B_{r,n}(x) = \binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}$ biçiminde tanımlı, *n*. dereceden iki Bernstein polinomu olmak üzere, $B_{k,n}(x)$ ve $B_{r,n}(x)$ polinomların çarpımının türevi, Binom teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{r,n}(x)\right] &= \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}\binom{n}{r}x^{k+r}(1-x)^{2n-(k+r)}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}\binom{n}{r}\sum_{j=0}^{2n-(k+r)}\binom{2n-(k+r)}{j}.1^{2n-(k+r)-j}.(-x)^j.x^{k+r}\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{n}{r}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{2n-(k+r)}\binom{2n-(k+r)}{j}.(-1)^j x^{k+r+j}\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{n}{r}\sum_{j=0}^{2n-(k+r)}\binom{2n-(k+r)}{j}(-1)^j(k+r+j)x^{k+r+j-1}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir veya buna denk olarak eğer çarpımın türevi kullanılırsa,

$$\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{r,n}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}\binom{n}{r}x^{r}(1-x)^{n-r}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}\binom{n}{r}x^{k+r}(1-x)^{2n-(k+r)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\frac{d}{dx}\left[x^{k+r}(1-x)^{2n-(k+r)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\left[(k+r)x^{k+r-1}(1-x)^{2n-(k+r)}-(2n-(k+r))x^{k+r}(1-x)^{2n-(k+r)-1}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\left[(k+r)\frac{1}{x}\frac{1}{\binom{2n}{k+r}}\binom{2n}{k+r}x^{k+r}(1-x)^{2n-(k+r)}\right.$$

$$\left.-(2n-(k+r))\frac{1}{1-x}\frac{1}{\binom{2n}{k+r}}\binom{2n}{k+r}x^{k+r}(1-x)^{2n-(k+r)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\left[(k+r)\frac{1}{x}\frac{1}{\binom{2n}{k+r}}B_{k+r,2n}(x)-(2n-(k+r))\frac{1}{1-x}\frac{1}{\binom{2n}{k+r}}B_{k+r,2n}(x)\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\frac{1}{\binom{2n}{k+r}}B_{k+r,2n}(x)\left[\frac{k+r}{x}-\frac{2n-(k+r)}{1-x}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\frac{1}{\binom{2n}{k+r}}B_{k+r,2n}(x)\left[\frac{k+r-2nx}{x(1-x)}\right]$$

olarak bulunur.

$$B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad B_{r,n}(x)=\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r} \quad \text{ve} \quad B_{s,n}(x)=\binom{n}{s}x^s(1-x)^{n-s}$$

biçiminde tanımlı n. dereceden üç Bernstein polinomu olmak üzere, $B_{k,n}(x)$, $B_{r,n}(x)$ ve $B_{s,n}(x)$ polinomlarının çarpımının türevi, Binom teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{r,n}(x)B_{s,n}(x)\right] &= \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}\binom{n}{s}x^s(1-x)^{n-s}\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\frac{d}{dx}\left[x^{k+r+s}(1-x)^{3n-(k+r+s)}\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{3n-(k+r+s)}\binom{3n-(k+r+s)}{j}1^{3n-(k+r+s)-j}(-x)^j x^{k+r+s}\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{3n-(k+r+s)}\binom{3n-(k+r+s)}{j}(-1)^j x^{k+r+s+j}\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\sum_{j=0}^{3n-(k+r+s)}\binom{3n-(k+r+s)}{j}(-1)^j(k+r+s+j)x^{k+r+s+j-1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur veya buna denk olarak eğer çarpımın türevi kullanılırsa,

$$\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{r,n}(x)B_{s,n}(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}\binom{n}{s}x^s(1-x)^{n-s}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\frac{d}{dx}\left[x^{k+r+s}(1-x)^{3n-(k+r+s)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\left[(k+r+s)x^{k+r+s-1}(1-x)^{3n-(k+r+s)}-(3n-(k+r+s))x^{k+r+s}(1-x)^{3n-(k+r+s)-1}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\left[\frac{k+r+s}{x}\frac{1}{\binom{3n}{k+r+s}}B_{k+r+s,3n}(x)-\frac{3n-(k+r+s)}{1-x}\frac{1}{\binom{3n}{k+r+s}}B_{k+r+s,3n}(x)\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\frac{1}{\binom{3n}{k+r+s}}B_{k+r+s,3n}(x)\left[\frac{k+r+s}{x}-\frac{3n-(k+r+s)}{1-x}\right]$$

$$= \binom{n}{k}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\frac{1}{\binom{3n}{k+r+s}} B_{k+r+s,3n}(x)\left[\frac{k+r+s-3nx}{x(1-x)}\right]$$

olarak elde edilir. Yukarıdakiler ve matematiksel tümevarım kullanılarak, aşağıdaki teorem elde edilebilir.

4.2.1.1 Teorem. $B_{k_1,n}(x), B_{k_2,n}(x), \cdots, B_{k_s,n}(x)$, $s \in \mathbb{N}$ olacak biçimdeki *n.* dereceden Bernstein polinomlar dizisinin çarpımının türevi, Binom teoremi kullanılarak,

$$\frac{d}{dx}\left[\prod_{j=1}^{s} B_{k_j,n}(x)\right] = \left(\prod_{y=1}^{s}\binom{n}{k_y}\right)\sum_{j=0}^{sn-(k_1+\cdots+k_s)}\binom{sn-(k_1+\cdots+k_s)}{j}$$

$$\times(-1)^j (k_1+\cdots+k_s+j)x^{k_1+\cdots+k_s+j-1}$$

veya buna denk olarak eğer çarpımın türevi uygulanırsa,

$$\frac{d}{dx}\left[\prod_{j=1}^{s} B_{k_j,n}(x)\right] = \prod_{y=1}^{s}\binom{n}{k_y}\frac{1}{\binom{sn}{k_1+\cdots+k_s}} B_{k_1+\cdots+k_s,sn}(x)\left[\frac{\sum_{j=1}^{s} k_j - snx}{x(1-x)}\right]$$

olarak verilir.

4.2.2 Dereceleri Farklı Olan Bernstein Polinomlarının Çarpımının Türevi

$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ ve $B_{k,m}(x) = \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}$ biçiminde tanımlı, sırasıyla *n.* ve *m.* dereceden iki Bernstein polinomu olmak üzere, $B_{k,n}(x)$ ve $B_{k,m}(x)$ polinomlarının çarpımının türevi, Binom teoremi kullanılarak,

$$\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{k,m}(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{k}x^k(1-x)^{m-k}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{d}{dx}\left[x^{2k}(1-x)^{m+n-2k}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{m+n-2k}\binom{m+n-2k}{j}1^{m+n-2k-j}(-x)^{j}x^{2k}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{m+n-2k}\binom{m+n-2k}{j}(-1)^{j}x^{2k+j}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{m+n-2k}\binom{m+n-2k}{j}(-1)^{j}(2k+j)x^{2k+j-1}$$

veya buna denk bir şekilde çarpımın türevi uygulanarak,

$$\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{k,m}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}\binom{m}{k}x^{k}(1-x)^{m-k}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{d}{dx}\left[x^{2k}(1-x)^{m+n-2k}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\left[2kx^{2k-1}(1-x)^{m+n-2k}-(m+n-2k)x^{2k}(1-x)^{m+n-2k-1}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\left[\frac{2k}{x}x^{2k}(1-x)^{m+n-2k}-\frac{m+n-2k}{1-x}x^{2k}(1-x)^{m+n-2k}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\left[\frac{2k}{x}\frac{1}{\binom{m+n}{2k}}B_{2k,m+n}(x)-\frac{m+n-2k}{1-x}\frac{1}{\binom{m+n}{2k}}B_{2k,m+n}(x)\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{1}{\binom{m+n}{2k}}B_{2k,m+n}(x)\left[\frac{2k}{x}-\frac{m+n-2k}{1-x}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{1}{\binom{m+n}{2k}}B_{2k,m+n}(x)\left[\frac{2k-(m+n)x}{x(1-x)}\right]$$

şeklinde elde edilir.

$$B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad B_{k,m}(x)=\binom{m}{k}x^k(1-x)^{m-k}\quad \text{ve}\quad B_{k,r}(x)=\binom{r}{k}x^k(1-x)^{r-k}$$

biçiminde tanımlı, sırasıyla $n.$, $m.$ ve $r.$ dereceden üç Bernstein polinomu olmak üzere, $B_{k,n}(x)$, $B_{k,m}(x)$ ve $B_{k,r}(x)$ polinomlarının çarpımının türevi, Binom teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{k,m}(x)B_{k,r}(x)\right]&=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{k}x^k(1-x)^{m-k}\binom{r}{k}x^k(1-x)^{r-k}\right]\\
&=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\frac{d}{dx}\left[x^{3k}(1-x)^{n+m+r-3k}\right]\\
&=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{n+m+r-3k}\binom{n+m+r-3k}{j}1^{n+m+r-3k-j}(-x)^j x^{3k}\right]\\
&=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{n+m+r-3k}\binom{n+m+r-3k}{j}(-1)^j x^{3k+j}\right]\\
&=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\sum_{j=0}^{n+m+r-3k}\binom{n+m+r-3k}{j}(-1)^j(3k+j)x^{3k+j-1}
\end{aligned}$$

veya buna denk bir şekilde çarpımın türevi kullanılarak

$$\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{k,m}(x)B_{k,r}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{k}x^k(1-x)^{m-k}\binom{r}{k}x^k(1-x)^{r-k}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\frac{d}{dx}\left[x^{3k}(1-x)^{n+m+r-3k}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\left[3kx^{3k-1}(1-x)^{n+m+r-3k}-(n+m+r-3k)x^{3k}(1-x)^{n+m+r-3k-1}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\left[\frac{3k}{x}x^{3k}(1-x)^{n+m+r-3k}-\frac{n+m+r-3k}{1-x}x^{3k}(1-x)^{n+m+r-3k}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\left[\frac{3k}{x}\frac{1}{\binom{n+m+r}{3k}}B_{3k,n+m+r}(x)-\frac{n+m+r-3k}{1-x}\frac{1}{\binom{n+m+r}{3k}}B_{3k,n+m+r}(x)\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\frac{1}{\binom{n+m+r}{3k}}B_{3k,n+m+r}(x)\left[\frac{3k}{x}-\frac{n+m+r-3k}{1-x}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{r}{k}\frac{1}{\binom{n+m+r}{3k}}B_{3k,n+m+r}(x)\left[\frac{3k-(n+m+r)x}{x(1-x)}\right]$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdakiler ve matematiksel tümevarım kullanılarak, aşağıdaki teorem elde edilebilir.

4.2.2.1 Teorem. $B_{k,n_1},\cdots,B_{k,n_s}$, $s\in\mathbb{N}$ farklı derecelerdeki Bernstein polinomları olmak üzere, $B_{k,n_1},\cdots,B_{k,n_s}$ polinomlarının çarpımının türevi, Binom teoremi uygulanarak,

$$\frac{d}{dx}\left[\prod_{j=1}^{s}B_{k,n_j}(x)\right]=\prod_{y=1}^{s}\binom{n_y}{k}\sum_{j=0}^{(n_1+\cdots+n_s)-sk}\binom{n_1+\cdots+n_s-sk}{j}(-1)^j(sk+j)x^{sk+j-1}$$

veya buna denk olarak çarpımın türevi yardımıyla

$$\frac{d}{dx}\left[\prod_{j=1}^{s}B_{k,n_j}(x)\right]=\prod_{y=1}^{s}\binom{n_y}{k}\frac{1}{\binom{n_1+\cdots+n_s}{sk}}B_{sk,n_1+\cdots+n_s}(x)\left[\frac{sk}{x}-\frac{(n_1+\cdots+n_s)-sk}{1-x}\right]$$

şeklinde elde edilir.

$B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ ve $B_{r,m}(x)=\binom{m}{r}x^r(1-x)^{m-r}$, sırasıyla n. ve m. dereceden iki Bernstein polinomu olmak üzere, $B_{k,n}(x)$ ve $B_{r,m}(x)$ polinomlarının çarpımının türevi, Binom teoremi uygulanarak,

$$\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{r,m}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}\binom{m}{r}x^{r}(1-x)^{m-r}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}\binom{m}{r}x^{k+r}(1-x)^{(n+m)-(k+r)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\frac{d}{dx}\left[x^{k+r}(1-x)^{(n+m)-(k+r)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{(n+m)-(k+r)}\binom{(n+m)-(k+r)}{j}1^{(n+m)-(k+r)-j}(-x)^{j}x^{k+r}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{(n+m)-(k+r)}\binom{(n+m)-(k+r)}{j}(-1)^{j}x^{k+r+j}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\sum_{j=0}^{(n+m)-(k+r)}\binom{(n+m)-(k+r)}{j}(-1)^{j}(k+r+j)x^{k+r+j-1}$$

veya buna denk olarak çarpımın türevi kullanılarak,

$$\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{r,m}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}\binom{m}{r}x^{r}(1-x)^{m-r}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}\binom{m}{r}x^{k+r}(1-x)^{(n+m)-(k+r)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\frac{d}{dx}\left[x^{k+r}(1-x)^{(n+m)-(k+r)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\left[(k+r)x^{k+r-1}(1-x)^{n+m-(k+r)}-(n+m-(k+r))x^{k+r}(1-x)^{n+m-(k+r)-1}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\left[\frac{k+r}{x}x^{k+r}(1-x)^{n+m-(k+r)}-\frac{(n+m-(k+r))}{1-x}x^{k+r}(1-x)^{n+m-(k+r)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\left[\frac{k+r}{x}\frac{1}{\binom{n+m}{k+r}}B_{k+r,n+m}(x)-\frac{n+m-(k+r)}{1-x}\frac{1}{\binom{n+m}{k+r}}B_{k+r,n+m}(x)\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\frac{1}{\binom{n+m}{k+r}}B_{k+r,n+m}(x)\left[\frac{k+r}{x}-\frac{n+m-(k+r)}{1-x}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\frac{1}{\binom{n+m}{k+r}}B_{k+r,n+m}(x)\left[\frac{k+r-(n+m)x}{x(1-x)}\right]$$

olarak bulunur.

$$B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k},\quad B_{r,m}(x)=\binom{m}{r}x^{r}(1-x)^{m-r}\quad \text{ve}\quad B_{s,t}(x)=\binom{t}{s}x^{s}(1-x)^{t-s},$$

sırasıyla $n.$, $m.$ ve $t.$ dereceden üç Bernstein polinomu olmak üzere, $B_{k,n}(x)$, $B_{r,m}(x)$ ve $B_{s,t}(x)$ polinomlarının çarpımının türevi, Binom teoremi uygulanarak,

$$\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{r,m}(x)B_{s,t}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}\binom{m}{r}x^{r}(1-x)^{m-r}\binom{t}{s}x^{s}(1-x)^{t-s}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}x^{k+r+s}(1-x)^{(n+m+t)-(k+r+s)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\frac{d}{dx}\left[x^{k+r+s}(1-x)^{(n+m+t)-(k+r+s)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{(n+m+t)-(k+r+s)}\binom{(n+m+t)-(k+r+s)}{j}1^{(n+m+t)-(k+r+s)-j}(-x)^{j}x^{k+r+s}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{(n+m+t)-(k+r+s)}\binom{(n+m+t)-(k+r+s)}{j}(-1)^{j}x^{k+r+s+j}\right]$$

$$=\binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\sum_{j=0}^{(n+m+t)-(k+r+s)}\binom{(n+m+t)-(k+r+s)}{j}(-1)^{j}(k+r+s+j)x^{k+r+s+j-1}$$

veya buna denk olarak,

$$\frac{d}{dx}\left[B_{k,n}(x)B_{r,m}(x)B_{s,t}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}\binom{m}{r}x^{r}(1-x)^{m-r}\binom{t}{s}x^{s}(1-x)^{t-s}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s} x^{k+r+s}(1-x)^{(n+m+t)-(k+r+s)}\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\frac{d}{dx}\left[x^{k+r+s}(1-x)^{(n+m+t)-(k+r+s)}\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\Big[(k+r+s)x^{k+r+s-1}(1-x)^{(n+m+t)-(k+r+s)} \\
&\qquad -((n+m+t)-(k+r+s))x^{k+r+s}(1-x)^{(n+m+t)-(k+r+s)-1}\Big] \\
&= \binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\Big[\frac{k+r+s}{x}x^{k+r+s}(1-x)^{(n+m+t)-(k+r+s)} \\
&\qquad -\frac{(n+m+t)-(k+r+s)}{1-x}x^{k+r+s}(1-x)^{(n+m+t)-(k+r+s)}\Big] \\
&= \binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\left[\frac{k+r+s}{x}\frac{1}{\binom{n+m+t}{k+r+s}}B_{k+r+s,n+m+t}(x)\right. \\
&\qquad \left.-\frac{(n+m+t)-(k+r+s)}{1-x}\frac{1}{\binom{n+m+t}{k+r+s}}B_{k+r+s,n+m+t}(x)\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\frac{1}{\binom{n+m+t}{k+r+s}}B_{k+r+s,n+m+t}(x)\left[\frac{k+r+s}{x}-\frac{(n+m+t)-(k+r+s)}{1-x}\right] \\
&= \binom{n}{k}\binom{m}{r}\binom{t}{s}\frac{1}{\binom{n+m+t}{k+r+s}}B_{k+r+s,n+m+t}(x)\left[\frac{k+r+s-(n+m+t)x}{x(1-x)}\right]
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdakiler ve matematiksel tümevarım kullanılarak, aşağıdaki teorem elde edilebilir.

4.2.2.2 Teorem. $B_{k_1,n_1},\cdots,B_{k_s,n_s}$, $s\in\mathbb{N}$ farklı derecelerdeki Bernstein polinomlarından oluşan bir dizi olmak üzere, $B_{k_1,n_1},\cdots,B_{k_s,n_s}$ polinomlarının çarpımının türevi, Binom teoremi kullanılarak,

$$\frac{d}{dx}\left[\prod_{j=1}^{s} B_{k_j,n_j}(x)\right]$$

$$=\left(\prod_{y=1}^{s}\binom{n_y}{k_y}\right)\sum_{j=0}^{(n_1+\cdots+n_s)-(k_1+\cdots+k_s)}\binom{(n_1+\cdots+n_s)-(k_1+\cdots+k_s)}{j}(-1)^j(k_1+\cdots+k_s+j)x^{k_1+\cdots+k_s+j-1}$$

veya buna denk olarak,

$$\frac{d}{dx}\left[\prod_{j=1}^{s} B_{k_j,n_j}(x)\right]$$

$$=\prod_{y=1}^{s}\binom{n_y}{k_y}\frac{1}{\binom{n_1+\cdots+n_s}{k_1+\cdots+k_s}}B_{k_1+\cdots+k_s,n_1+\cdots+n_s}(x)\left[\frac{k_1+\cdots+k_s-(n_1+\cdots+n_s)x}{x(1-x)}\right]$$

şeklinde bulunur.

4.3 Bernstein Polinomlarının Kuvvetlerinin Türevi

Bu bölümde Bernstein polinomlarının kuvvetlerinin çarpımlarının türevleri ile ilgili elde edilen yeni sonuçlar verilecektir. Öncelikle *n*. dereceden Bernstein polinomunun *s*. kuvvetinin türevi hesaplanacak, sonra da farklı kuvvetlere ve farklı derecelere sahip olan Bernstein polinomlarının çarpımlarının türevleri verilecektir.

4.3.1 Teorem. $B_{k,n}^{s}(x)=\binom{n}{k}^{s}x^{ks}(1-x)^{(n-k)s}$, *n*. dereceden Bernstein polinomunun *s*. kuvvetini göstermek üzere,

$$\frac{d}{dx}\left(B_{k,n}^{s}(x)\right)=s\binom{n}{k}^{s}\left[\frac{k}{\binom{ns-1}{ks-1}}B_{ks-1,ns-1}(x)-\frac{n-k}{\binom{ns-1}{ks}}B_{ks,ns-1}(x)\right]$$

dir.

İspat. Bernstein polinomlarının tanımından,

$$\frac{d}{dx}\left(B_{k,n}^{s}(x)\right)=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}^{s}x^{ks}(1-x)^{(n-k)s}\right]$$

$$=\binom{n}{k}^{s}\frac{d}{dx}\left[x^{ks}(1-x)^{(n-k)s}\right]$$

$$=\binom{n}{k}^{s}\left[ksx^{ks-1}(1-x)^{(n-k)s}-(n-k)sx^{ks}(1-x)^{(n-k)s-1}\right]$$

$$=\binom{n}{k}^{s}ksx^{ks-1}(1-x)^{(n-k)s}-\binom{n}{k}^{s}(n-k)sx^{ks}(1-x)^{(n-k)s-1}$$

$$=s\left[\binom{n}{k}^{s}kx^{ks-1}(1-x)^{(n-k)s}-\binom{n}{k}^{s}(n-k)x^{ks}(1-x)^{(n-k)s-1}\right]$$

$$=s\left[\binom{n}{k}^{s}kx^{ks-1}(1-x)^{(ns-1)-(ks-1)}-\binom{n}{k}^{s}(n-k)x^{ks}(1-x)^{ns-1-ks}\right]$$

$$=s\left[\binom{n}{k}^{s}k\frac{1}{\binom{ns-1}{ks-1}}B_{ks-1,ns-1}(x)-\binom{n}{k}^{s}(n-k)\frac{1}{\binom{ns-1}{ks}}B_{ks,ns-1}(x)\right]$$

$$=s\binom{n}{k}^{s}\left[\frac{k}{\binom{ns-1}{ks-1}}B_{ks-1,ns-1}(x)-\binom{n}{k}^{s}\frac{n-k}{\binom{ns-1}{ks}}B_{ks,ns-1}(x)\right]$$

elde edilir.

4.3.2 Sonuç. Teorem 4.3.1 de $s=1$ alınırsa, daha önce verilmiş olan

$$\frac{d}{dx}B_{k,n}(x)=n\left(B_{k-1,n-1}(x)-B_{k,n-1}(x)\right)$$

bağıntısı elde edilir.

İspat. $s=1$ için,

$$\frac{d}{dx}B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}\left[\frac{k}{\binom{n-1}{k-1}}B_{k-1,n-1}(x)-\frac{n-k}{\binom{n-1}{k}}B_{k,n-1}(x)\right]$$

$$=\binom{n}{k}\left[\frac{k}{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}B_{k-1,n-1}(x)-\frac{n-k}{\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}}B_{k,n-1}(x)\right]$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left[\frac{k(k-1)!(n-k)!}{(n-1)!}B_{k-1,n-1}(x)-\frac{(n-k)k!(n-k-1)!}{(n-1)!}B_{k,n-1}(x)\right]$$

$$=\frac{n!k!(n-k)!}{k!(n-k)!(n-1)!}B_{k-1,n-1}(x)-\frac{n!k!(n-k)!}{k!(n-k)!(n-1)!}B_{k,n-1}(x)$$

$$=nB_{k-1,n-1}(x)-nB_{k,n-1}(x)$$

$$=n\big(B_{k-1,n-1}(x)-B_{k,n-1}(x)\big)$$

bulunur.

Şimdi s. kuvvete sahip n. dereceden Bernstein polinomu ile t. kuvvete sahip m. dereceden Bernstein polinomunun çarpımının türevi hesaplanacaktır:

4.3.3 Teorem. $B_{k,n}^{s}(x)=\binom{n}{k}^{s}x^{ks}(1-x)^{(n-k)s}$, n. dereceden Bernstein polinomunun s. kuvveti ve $B_{k,m}^{t}(x)=\binom{m}{k}^{t}x^{kt}(1-x)^{(m-k)t}$, m. dereceden Bernstein polinomunun t. kuvveti olmak üzere, $B_{k,n}^{s}(x)$ ve $B_{k,m}^{t}(x)$ nin çarpımının türevi,

$$\frac{d}{dx}\big(B_{k,n}^{s}(x)B_{k,m}^{t}(x)\big)=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\sum_{j=0}^{ns+mt-k(s+t)}\binom{ns+mt-k(s+t)}{j}(-1)^{j}(ks+kt+j)x^{ks+kt+j-1}$$

veya buna denk olarak,

$$\frac{d}{dx}\left(B_{k,n}^{s}(x)B_{k,m}^{t}(x)\right)=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\frac{1}{\binom{ns+mt}{k(s+t)}}B_{k(s+t),ns+mt}(x)\left[\frac{k(s+t)}{x}-\frac{ns+mt-k(s+t)}{1-x}\right]$$

dir.

İspat. Bernstein polinomlarının tanımı ve Binom teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(B_{k,n}^{s}(x)B_{k,m}^{t}(x)\right)&=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}x^{ks+kt}(1-x)^{ns+mt-k(s+t)}\right]\\&=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\frac{d}{dx}\left[x^{ks+kt}(1-x)^{ns+mt-k(s+t)}\right]\\&=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{ns+mt-k(s+t)}\binom{ns+mt-k(s+t)}{j}(-x)^{j}x^{ks+kt}\right]\\&=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{ns+mt-k(s+t)}\binom{ns+mt-k(s+t)}{j}(-1)^{j}x^{ks+kt+j}\right]\\&=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\sum_{j=0}^{ns+mt-k(s+t)}\binom{ns+mt-k(s+t)}{j}(-1)^{j}(ks+kt+j)x^{ks+kt+j-1}\end{aligned}$$

veya buna denk olarak,

$$\frac{d}{dx}\left(B_{k,n}^{s}(x)B_{k,m}^{t}(x)\right)=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}x^{ks+kt}(1-x)^{ns+mt-k(s+t)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\frac{d}{dx}\left[x^{ks+kt}(1-x)^{ns+mt-k(s+t)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\frac{d}{dx}\Big[k(s+t)x^{k(s+t)-1}(1-x)^{ns+mt-k(s+t)}$$

$$-(ns+mt-k(s+t))x^{k(s+t)}(1-x)^{ns+mt-k(s+t)-1}\Big]$$

$$=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\left[\frac{k(s+t)}{x}x^{k(s+t)}(1-x)^{ns+mt-k(s+t)}-\frac{ns+mt-k(s+t)}{1-x}x^{k(s+t)}(1-x)^{ns+mt-k(s+t)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\left[\frac{k(s+t)}{x}\frac{1}{\binom{ns+mt}{k(s+t)}}B_{k(s+t),ns+mt}(x)-\frac{ns+mt-k(s+t)}{1-x}\frac{1}{\binom{ns+mt}{k(s+t)}}B_{k(s+t),ns+mt}(x)\right]$$

$$=\binom{n}{k}^{s}\binom{m}{k}^{t}\frac{1}{\binom{ns+mt}{k(s+t)}}B_{k(s+t),ns+mt}(x)\left[\frac{k(s+t)}{x}-\frac{ns+mt-k(s+t)}{1-x}\right]$$

elde edilir.

4.3.4 Teorem. $n_1,n_2,\cdots,n_s\in\mathbb{N}$ farklı dereceler olmak üzere, $B_{k,n_1}^{m_1},\cdots,B_{k,n_s}^{m_s}$ ile verilen Bernstein polinomlarının çarpımının türevi,

$$\frac{d}{dx}\left(\prod_{j=1}^{s}B_{k,n_j}^{m_j}(x)\right)=\prod_{i=1}^{s}\binom{n_i}{k}^{m_i}\sum_{j=0}^{n_1m_1+\cdots+n_sm_s-k(m_1+\cdots+m_s)}\binom{n_1m_1+\cdots+n_sm_s-k(m_1+\cdots+m_s)}{j}$$

$$\times(-1)^j\left[k(m_1+\cdots m_s)+j\right]x^{k(m_1+\cdots m_s)+j-1}$$

veya buna denk olarak,

$$\frac{d}{dx}\left(\prod_{j=1}^{s}B_{k,n_j}^{m_j}(x)\right)=\prod_{i=1}^{s}\binom{n_i}{k}^{m_i}\frac{1}{\binom{n_1m_1+\cdots+n_sm_s}{k(m_1+\cdots+m_s)}}B_{k(m_1+\cdots+m_s),n_1m_1+\cdots+n_sm_s}(x)$$

$$\times\left[\frac{k(m_1+\cdots+m_s)}{x}-\frac{n_1m_1+\cdots+n_sm_s-k(m_1+\cdots+m_s)}{1-x}\right]$$

dir.

4.3.5 Teorem. $B^s_{k_1,n}(x)=\binom{n}{k_1}^s x^{k_1 s}(1-x)^{(n-k_1)s}$, n. dereceden Bernstein polinomunun s. kuvveti ve $B^t_{k_2,m}(x)=\binom{m}{k_2}^t x^{k_2 t}(1-x)^{(m-k_2)t}$, m. dereceden Bernstein polinomunun t. kuvveti olmak üzere, $B^s_{k_1,n}(x)$ ve $B^t_{k_2,m}(x)$ nin çarpımının türevi,

$$\frac{d}{dx}\left(B^s_{k_1,n}(x)B^t_{k_2,m}(x)\right)=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\sum_{j=0}^{ns+mt-(k_1s+k_2t)}\binom{ns+mt-(k_1s+k_2t)}{j}$$
$$\times(-1)^j(k_1s+k_2t+j)x^{k_1s+k_2t+j-1}$$

veya buna denk olarak,

$$\frac{d}{dx}\left(B^s_{k_1,n}(x)B^t_{k_2,m}(x)\right)=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\frac{1}{\binom{ns+mt}{k_1s+k_2t}}B_{k_1s+k_2t,ns+mt}(x)$$
$$\times\left[\frac{k_1s+k_2t}{x}-\frac{ns+mt-(k_1s+k_2t)}{1-x}\right]$$

dir.

İspat. Bernstein polinomlarının tanımı ve Binom teoremi kullanılırsa,

$$\frac{d}{dx}\left(B^s_{k_1,n}(x)B^t_{k_2,m}(x)\right)=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t x^{k_1s+k_2t}(1-x)^{ns+mt-(k_1s+k_2t)}\right]$$
$$=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\frac{d}{dx}\left[x^{k_1s+k_2t}(1-x)^{ns+mt-(k_1s+k_2t)}\right]$$
$$=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{ns+mt-(k_1s+k_2t)}\binom{ns+mt-(k_1s+k_2t)}{j}(-x)^j x^{k_1s+k_2t}\right]$$
$$=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=0}^{ns+mt-(k_1s+k_2t)}\binom{ns+mt-(k_1s+k_2t)}{j}(-1)^j x^{k_1s+k_2t+j}\right]$$

$$=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\sum_{j=0}^{ns+mt-(k_1s+k_2t)}\binom{ns+mt-(k_1s+k_2t)}{j}(-1)^j(k_1s+k_2t+j)x^{k_1s+k_2t+j-1}$$

veya buna denk olarak,

$$\frac{d}{dx}\left(B^s_{k_1,n}(x)B^t_{k_2,m}(x)\right)=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t x^{k_1s+k_2t}(1-x)^{(n-k_1)s+(m-k_2)t}\right]$$

$$=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\frac{d}{dx}\left[x^{k_1s+k_2t}(1-x)^{(n-k_1)s+(m-k_2)t}\right]$$

$$=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\frac{d}{dx}\Big[(k_1s+k_2t)x^{(k_1s+k_2t)-1}(1-x)^{(n-k_1)s+(m-k_2)t}-((n-k_1)s+(m-k_2)t)$$

$$\times x^{k_1s+k_2t}(1-x)^{(n-k_1)s+(m-k_2)t-1}\Big]$$

$$=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\Big[\frac{k_1s+k_2t}{x}x^{k_1s+k_2t}(1-x)^{ns+mt-(k_1s+k_2t)}-\frac{(n-k_1)s+(m-k_2)t}{1-x}$$

$$\times x^{k_1s+k_2t}(1-x)^{ns+mt-(k_1s+k_2t)}\Big]$$

$$=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\left[\frac{k_1s+k_2t}{x}\frac{1}{\binom{ns+mt}{k_1s+k_2t}}B_{k_1s+k_2t,ns+mt}(x)\right.$$

$$\left.-\frac{ns+mt-(k_1s+k_2t)}{1-x}\frac{1}{\binom{ns+mt}{k_1s+k_2t}}B_{k_1s+k_2t,ns+mt}(x)\right]$$

$$=\binom{n}{k_1}^s\binom{m}{k_2}^t\frac{1}{\binom{ns+mt}{k_1s+k_2t}}B_{k_1s+k_2t,ns+mt}(x)\left[\frac{k_1s+k_2t}{x}-\frac{ns+mt-(k_1s+k_2t)}{1-x}\right]$$

elde edilir.

4.3.6 Teorem. $n_1,n_2,\cdots,n_s\in\mathbb{N}$ farklı dereceler olmak üzere, $B^{m_1}_{k_1,n_1},\cdots,B^{m_s}_{k_s,n_s}$ ile verilen Bernstein polinomlarının çarpımının türevi,

$$\frac{d}{dx}\left(\prod_{j=1}^{s} B_{k_j,n_j}^{m_j}(x)\right)=\prod_{i=1}^{s}\binom{n_i}{k_i}^{m_i}\sum_{j=0}^{\sum_{i=1}^{s}n_im_i-\sum_{i=1}^{s}k_im_i}\binom{\sum_{i=1}^{s}n_im_i-\sum_{i=1}^{s}k_im_i}{j}(-1)^j\left[\sum_{i=1}^{s}k_im_i+j\right]x^{\sum_{i=1}^{s}k_im_i+j-1}$$

veya buna denk olarak,

$$\frac{d}{dx}\left(\prod_{j=1}^{s} B_{k_j,n_j}^{m_j}(x)\right)=\prod_{i=1}^{s}\binom{n_i}{k_i}^{m_i}\frac{1}{\binom{n_1m_1+\cdots+n_sm_s}{k_1m_1+\cdots+k_sm_s)}}B_{k_1m_1+\cdots+k_sm_s,n_1m_1+\cdots+n_sm_s}(x)$$

$$\times\left[\frac{k_1m_1+\cdots+k_sm_s}{x}-\frac{n_1m_1+\cdots+n_sm_s-(k_1m_1+\cdots+k_sm_s)}{1-x}\right]$$

dir.

KAYNAKLAR

Lorentz, G. G. 1986. Bernstein Polynomials. Chelsea Publishing Company, New York, U.S.A., 133 pp.

Bizim, O., Tekcan, A., Gezer, B. 2009. Genel Matematik I. Dora Yayınları, Bursa, 328 s.

Başkan, T., Bizim, O., Cangül, İ. N. 2006. Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş. Nobel Yayınları, Bursa, 153 s.

Balcı, M. 2008. Genel Matematik. Ertem Matbaası, 419 s.

Feinerman, R. P., Newman, D. J. Polynomial Aproximation. Waverly Pres, New York, U.S.A., 148 pp.

Lorentz, G. G. 1966. Approximation of Functions. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, U.S.A., 187 pp.

Joy, K. I. 2000. Bernstein Polynomials, On-Line Geometric Modeling Notes. University of California, http:// en. Wikipedia.org/wiki/Bernstein polynomial.

Açıkgöz, M., Aracı, S. 2010a. A Study on the Integral of the Product of Several Type Bernstein Polynomials. *IST Transactions of Applied Mathematics- Modeling and Simulation,* 1(2): 10-14.

Steffens, K. G. 2006. The History of Approximation Theory. Birkhauser, Boston, U.S.A., 217 pp.

Il'inskii, A., Ostrovska, S. 2002. Convergence of Generalized Bernstein Polynomials. *Journal of Approximation Theory,* 116: 100-112.

Kaptanoğlu, H. T. 1996. Gama Fonksiyonu. Matematik Dünyası, 2: 6-12.

Sebah, P., Gourdon, X. 2002. Introduction to the Gamma Function. numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html.

Çiçek, M. M. 2007. Bernstein Polinomları ve Yaklaşım Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi,* Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

Aydın, D. 2007. Bernstein Polinomları, q-Bernstein Polinomları ve Yakınsaklık Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi,* Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale.

Dikmen, A. B. 2009. Bernstein Polinomlarının q-Analoğu. *Yüksek Lisans Tezi,* Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale.

Şahin, S. 2008. +q-Integer Noktalarında Bernstein Polinomları ve Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi,* Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla.

Açıkgöz, M., Aracı, S. 2010b. New Generating Function of Bernstein Type Polynomial for Two Variables. ICNAAM, Numerical Analysis and Applied Mathematics, International Conference.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Elif ÇETİN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa 02.05.1987
Yabancı Dili	: İngilizce (İntermediate), Fransızca (Beginner),
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Sami Evkuran Anadolu Lisesi (2001-2005)
Lisans	: Uludağ Üniversitesi (2005-2009)
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi (2009-…)
Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl	: Çalışmadım.
İletişim (e-posta)	: elifc2@hotmail.com, elifc2@gmail.com
Yayınları	: